

无网格局部强弱法求解不规则域问题¹⁾

杨建军^{*,2)} 郑健龙^{†,3)}

^{*}(长沙理工大学道路结构与材料交通行业重点实验室, 长沙 410114)

[†](长沙理工大学交通运输工程学院, 长沙 410114)

摘要 无网格局部彼得洛夫-伽辽金 (meshless local Petrov-Galerkin, MLPG) 法是一种具有代表性的无网格方法, 在计算力学领域得到广泛应用. 然而, 这种方法在边界上需执行积分运算, 通常很难处理不规则求解域问题. 为了克服 MLPG 法的这种局限性, 提出了无网格局部强弱 (meshless local strong-weak, MLSW) 法. MLSW 法采用 MLPG 法离散内部求解域, 采用无网格介点 (meshless intervention-point, MIP) 法施加自然边界条件, 并采用配点法施加本质边界条件, 避免执行边界积分运算, 可适用于求解各类复杂的不规则域问题. 从理论上讲, 这种结合式方法, 既保持了 MLPG 法稳定而精确计算的优势, 同时兼备配点型方法在处理复杂结构问题时简洁而灵活的优势, 实现了弱式法和强式法的优势互补. 此外, MLSW 法采用移动最小二乘核 (moving least squares core, MLSc) 近似法来构造形函数, 是对传统移动最小二乘 (moving least squares, MLS) 近似法的一种改进. MLSc 使用核基函数代替通常的基函数, 有利于数值求解的精确性和稳定性, 而且其导数近似计算变得更为简单. 数值算例结果初步表明: 这种新方法实施简单, 求解稳定、精确, 表现出适合工程运用的潜力.

关键词 无网格法, 不规则域, 边界积分, MLPG 法, MIP 法, 介点原理

中图分类号: O241, O343 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-383

MESHLESS LOCAL STRONG-WEAK (MLSW) METHOD FOR IRREGULAR DOMAIN PROBLEMS¹⁾

Yang Jianjun^{*,2)} Zheng Jianlong^{†,3)}

^{*}(Key Laboratory of Road Structure and Material of Ministry of Transport, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

[†](School of Traffic and Transportation Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method is a representative meshless method, and is widely applied in computational mechanics. But, this method is necessary to execute the boundary integral operation, and it is always difficult to solve irregular domain problems. In order to remove this kind of limitation of the MLPG method, a meshless local strong-weak (MLSW) method is presented. The proposed method uses the MLPG method for domain discretization, adopts the meshless intervention-point (MIP) method for imposing the natural boundary conditions, and employs a collocation method for imposing the essential boundary conditions. Thus, the boundary integral is completely eliminated, and it favours to solve all kinds of irregular domain problem. Theoretically, the MLSW method deduced by coupling algorithm, not only has inherited the advantage of the MLPG method, which is always stable and accurate for

2016-12-20 收稿, 2017-03-01 录用, 2017-03-07 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (51478053) 和交通行业重点实验室 (长沙) 开放基金 (KFJ120201) 资助项目.

2) 杨建军, 讲师, 主要研究方向: 计算力学及其工程应用. E-mail: yangjianjun01@126.com

3) 郑健龙, 中国工程院院士, 教授, 主要研究方向: 公路工程、固体力学. E-mail: zjl@csust.edu.cn

引用格式: 杨建军, 郑健龙. 无网格局部强弱法求解不规则域问题. 力学学报, 2017, 49(3): 659-666

Yang Jianjun, Zheng Jianlong. Meshless local strong-weak (MLSW) method for irregular domain problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 659-666

numerical solution, but also has attained the superiority of the collocation-type method, which is naturally simple and flexible to cope with the domain of complex structure. Thereby, the method realizes advantageous complementarities of the weak-form method and the strong-form method. In addition, the MLSW method uses a moving least squares core (MLSc) approximation for constructing meshless shape function, which is an improvement for the traditional moving least squares (MLS) approximation. By replacing common basis function with core basis function, MLSc approximation is more stable and accurate, and also realizes a simple calculation for derivatives approximation. Early results with numerical tests have showed that the proposed new method is easy for numerical implementation, is accurate and stable for numerical solution, and is promising for engineering application.

Key words meshless method, irregular domain, boundary integral, MLPG method, MIP method, intervention-point principle

引言

无网格法是近 20 年来计算力学领域迅速崛起的一个研究分支, 此类方法采用散点信息执行计算, 可减少、甚至完全免除对网格的依赖, 节点单元的增减更为自由灵活, 其数值求解在自适应分析、大变形、结构破坏等问题中体现出独特的优越性^[1-3]. 无网格法的兴起又以弱式无网格法的提出和发展为主要特征^[4-7], 而在弱式无网格法中, Atluri 等提出的无网格局部彼得洛夫-伽辽金 (meshless local Petrov-Galerkin, MLPG) 法是一种重要且得到广泛应用的方法^[6,8-10]. 相比于全局弱式法, MLPG 法不需要全局背景积分网格, 向真正的无网格法前进了一大步. 此外, 该方法的刚度矩阵组装是基于节点的, 与通常的配点方法相类似, 数值实施较为直接, 而且计算稳定并能得到高精度的解^[11-12].

然而, MLPG 法在实际应用中也面临一些严峻的挑战. 该方法对边界条件的施加需要执行边界积分运算, 对于复杂而不规则的边界, 不准确的数值积分将导致数值解失真, 而精确的数值积分需要对边界进行足够精确的刻画和度量, 这在实际数值执行中会面临多重困难. 正如一些学者已经明确指出: 如何有效地实施边界积分是局部弱式法面临的一个棘手课题, 尤其是对具有复杂几何形状的问题域^[13-14].

实际上, 到目前为止提出的诸多无网格法中, 每一种方法都有其优势和局限性, 简洁的方法可能计算精度不够令人满意, 求解精确的方法可能数值实施较为复杂繁琐. 所以, 发展结合式的方法, 将多种方法的优势相结合, 并避免单一方法的局限性, 成为当前无网格法的一个研究方向^[15-19]. 因此, 本文将基于 MLPG 法, 使用数值方法耦合技术消除其边界积分运算, 提出一种综合考虑精确、效率、易于

实施等多因素的方法, 而且, 这种方法将很容易求解不规则域问题.

1 移动最小二乘核近似法

首先给出本文方法中使用的无网格形函数构造方案. 目前, 有多种使用散点构造形函数的方法, 其中, 移动最小二乘 (moving least squares, MLS) 近似法应用非常广泛^[20-21]. 为了消除 MLS 近似计算不稳定的问题, 一种改进的方法是使用核基函数 $P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 代替普通基函数 $P(\mathbf{x})$, 并将这种改进的方法称为移动最小二乘核 (moving least squares core, MLSc) 近似法^[22]. 用 \mathbf{x}_* 表示目标点或计算点, 对 $\forall \mathbf{x} \in \Omega_S(\mathbf{x}_*)$, 其场函数 $u_*(\mathbf{x})$ 的近似公式用一个伴随 \mathbf{x}_* 定义的多项式表示

$$u_*(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}_*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{p}_*^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 为系数向量, $\mathbf{p}_*^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 为核基函数向量, 则二维完备 2 次多项式核基函数写为

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = [1 \quad x - x_* \quad y - y_* \quad (x - x_*)^2 \quad (x - x_*)(y - y_*) \quad (y - y_*)^2] \quad (2)$$

为了得到式 (1) 中系数向量 $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 的表达式, 基于散点集 $\{\mathbf{x}_J\}_{J=1}^{N_J}$ ($\forall \mathbf{x}_J \in \Omega_S(\mathbf{x}_*)$) 构造如下加权二乘泛函

$$J = \sum_{J=1}^{N_J} w_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \left[\mathbf{p}_J^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) - \hat{u}_J \right]^2 \quad (3)$$

式中, $\hat{u}_J \equiv u_J(\mathbf{x})$, $w_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 为权函数. 寻求该泛函关于 \mathbf{a} 的驻值, 令 $\partial J / \partial \mathbf{a} = 0$, 可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \hat{\mathbf{u}} \quad (4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &= \sum_{J=1}^{N_J} \bar{\mathbf{A}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \\ \bar{\mathbf{A}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &= w_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_J^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &= [\bar{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)]_{J=1}^{N_J} \\ \bar{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &= w_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{p}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, $[\cdot]_{J=1}^{N_J}$ 表示按脚标符号 J 从 1 到 N_J 顺序排列的行矩阵. 并有 $\hat{\mathbf{u}}^T = [\hat{u}_J]_{J=1}^{N_J}$. 将式 (4) 代入式 (1), 则得到 MLSc 的近似函数公式, 写为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &= \mathbf{P}_*^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \cdot \\ \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \hat{\mathbf{u}} &= \sum_{J=1}^{N_J} \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_J \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $\phi_J(\mathbf{x})$ 为支撑节点 x_J 对应的 MLSc 形函数, 并定义为

$$\begin{aligned} \phi_J(\mathbf{x}) &\equiv \phi_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \\ \mathbf{p}_J^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) &[\bar{\mathbf{A}}_J^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)] \end{aligned} \quad (8)$$

其偏导数计算, 本文建议采用如下规则

$$\left. \begin{aligned} \phi_{J,i}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}_{*,i}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \cdot [\bar{\mathbf{A}}_J^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)] \\ \phi_{J,ij}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}_{*,ij}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \cdot [\bar{\mathbf{A}}_J^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \bar{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, 显然 $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$ 被视为常数向量, 不参与导数计算. 这种简化的计算, 对于刚度矩阵是基于节点组装的数值方法, 不会对求解精度造成明显影响, 所以对于本文所建议的数值方法是适用的.

2 无网格局部强弱法

无网格局部强弱 (meshless local strong-weak, MLSW) 法的数值执行策略是对域内节点和边界上的节点采用不同的数值离散方式, 如图 1 所示.

为了便于说明 MLSW 法的数值实施过程, 以二维弹性力学问题为例, 其求解域 Ω 上的控制方程写为

$$\sigma_{ij,i}(\mathbf{x}) - b_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (10)$$

其边界 Γ 上的定解条件为

$$n_i \sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \bar{t}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (11)$$

$$u_i(\mathbf{x}) - \bar{u}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (12)$$

式中, Γ_t 和 Γ_u 分别为自然边界和本质边界, n_i 表示自然边界的单位外法向向量的第 i 个坐标分量.

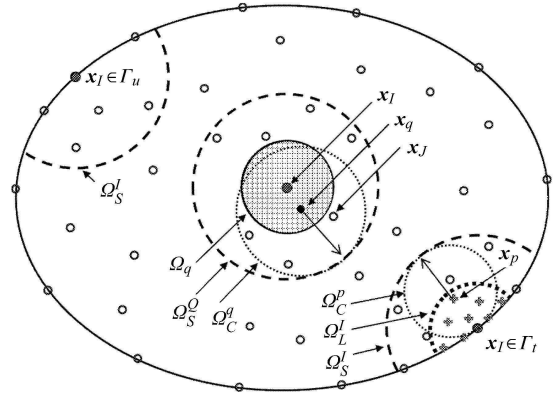


图 1 MLSW 法示意图

Fig. 1 Schematics of the MLSW method

对于问题域内计算节点 x_l , 即 $x_l \in \Omega$, 拟采用 MLPG 法^[6]进行数值离散. 图 1 中, Ω_q 是伴随域内计算节点 x_l 定义的积分分子域, x_q 是 Ω_q 内的任一积分点, Ω_C^q 是积分点 x_q 定义的覆盖域, x_j 是 Ω_C^q 内的任意一场节点, Ω_S^q 是积分分子域 Ω_q 的影响域, 是所有积分点覆盖域的并集, 即 $\Omega_S^q = \cup_{N_q} \Omega_C^q$. 对式 (10) 定义的控制方程, 其加权余量函数的局部弱式方程写为

$$\int_{\Omega_q} w_l(\mathbf{x}) \cdot (\sigma_{ij,i}(\mathbf{x}) - b_i(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \quad (13)$$

式中, $w_l(\mathbf{x})$ 是以计算节点 x_l 为中心而定义的权函数. 由 $w_l \sigma_{ij,i} = (w_l \sigma_{ij})_{,i} - w_{l,i} \sigma_{ij}$, 并应用散度定理, 当积分分子域与全局边界不相交时, 即 $\Omega_q \cap \Gamma = \emptyset$ 条件满足, 则上式可推得

$$\int_{\partial\Omega_q} n_i w_l \sigma_{ij} d\Gamma - \int_{\Omega_q} w_{l,i} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_q} w_l b_i d\Omega = 0 \quad (14)$$

当使用 Heaviside 阶跃函数作为权函数时, 即 $w(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})$, 则根据 $H(\mathbf{x})$ 的函数性质, 上式可改写为

$$\int_{\partial\Omega_q} n_i \sigma_{ij} d\Gamma - \int_{\Omega_q} b_i d\Omega = 0 \quad (15)$$

使用这种权函数的 MLPG 法计算形式更为简单, 计算效率更高, Atluri 等^[8-9]将这种离散格式称为 MLPG5. 须注意, 上式成立的前提条件是 $\Omega_q \cap \Gamma = \emptyset$, 对于任意的域内计算节点 x_l , 要求积分分子域 Ω_q 能覆盖到该节点即可, 故满足这一条件在数值实施中是容易做到的. 此外, 为了避免局部积分分子域与全局边界相交, 对靠近边界的计算节点可以定义较小的局部积分分子域, 并可适度向域内偏移, 该处理不会对

求解精度造成明显影响^[23-24]. 将式(7)代入式(15), 可得

$$\int_{\partial\Omega_q} n_i \sigma_{ij}(\tilde{u}_q) d\Gamma - \int_{\Omega_q} b_i d\Omega = \int_{\partial\Omega_q} n_i \sigma_{ij} \left(\sum_{J=1}^{N_J} \phi_J \hat{u}_J \right) d\Gamma - \int_{\Omega_q} b_i d\Omega = \sum_{J=1}^{N_J} \left(\int_{\partial\Omega_q} n_i \cdot \sigma_{ij}(\phi_J) d\Gamma \right) \hat{u}_J - \int_{\Omega_q} b_i d\Omega = 0 \quad (16)$$

由上式可以看出, 对域内计算节点 \mathbf{x}_I 的局部弱式离散, 其局部区域积分仅仅是已知内力分布的积分, 域内积分无需夹杂近似计算, 因此其计算效率能够得到保证^[8].

对于自然边界上的计算节点 \mathbf{x}_I , 即 $\mathbf{x}_I \in \Gamma_I$, 拟采用无网格介点 (meshless intervention-point, MIP) 法^[1,25] 进行数值离散. 如图1中, Ω_L^I 为计算节点的局部域, \mathbf{x}_p 是 Ω_L^I 内的任一介点, Ω_C^p 为该介点的覆盖域, Ω_C^I 为 \mathbf{x}_I 的影响域, 是所有介点 \mathbf{x}_p 的覆盖域的并集. MIP 法采用局部介点近似技术^[25], 能够保证导数边界条件的精确施加, 其计算节点的近似函数写为

$$\tilde{u}_I(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \phi_p(\mathbf{x}) \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_J \quad (17)$$

将上式直接代入式(11), 则有

$$n_i \sigma_{ij}(\tilde{u}_I) - \bar{t}_i = n_i \sigma_{ij} \left(\sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \phi_p \phi_J \hat{u}_J \right) - \bar{t}_i = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} n_i \cdot (\sigma_{ij}(\phi_p)) \phi_J \hat{u}_J - \bar{t}_i = 0 \quad (18)$$

由上式可知, 这种自然边界条件的施加方法可以完全避免执行边界积分运算.

对于本质边界上的计算节点 \mathbf{x}_I , 即 $\mathbf{x}_I \in \Gamma_u$, 因只需对场函数 (位移函数) 本身直接近似, 故可采用配点法进行数值离散, 这是一种简单而有效的本质边界条件施加方法^[8]. 将式(7)代入式(12)得

$$u_i - \bar{u}_i = \sum_{J=1}^{N_J} \phi_J \hat{u}_J - \bar{u}_i = 0 \quad (19)$$

综上, 对 N 个场节点, 可得到 N 个方程, 联立方程组并写成矩阵形式, 则可得该二维弹性力学问题的 MLSW 法数值求解方程

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (20)$$

其中, \mathbf{K} 为离散方程刚度矩阵, \mathbf{F} 为载荷矩阵, \mathbf{U} 为待解的场 (位移) 矩阵. 则, 对任意的场节点 \mathbf{x}_I , 其对应的离散方程有如下计算格式

$$\mathbf{K}_I = \begin{cases} \sum_{J=1}^{N_J} \int_{\partial\Omega_q} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Gamma_q, & \mathbf{x}_I \in \Omega \\ \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{J=1}^{N_J} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_p \phi_J(\mathbf{x}), & \mathbf{x}_I \in \Gamma_I \\ \sum_{J=1}^{N_J} \mathbf{I}_J, & \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_I = \begin{cases} \int_{\Omega_q} \mathbf{b}_q(\mathbf{x}) d\Omega, & \mathbf{x}_I \in \Omega \\ \bar{\mathbf{t}}_I(\mathbf{x}), & \mathbf{x}_I \in \Gamma_I \\ \bar{\mathbf{u}}_I(\mathbf{x}), & \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \end{cases} \quad (22)$$

式中

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_{J||p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{J||p}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_{J||p}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_{J||p}}{\partial y} & \frac{\partial \phi_{J||p}}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

$$\mathbf{I}_J = \begin{bmatrix} \phi_J & 0 \\ 0 & \phi_J \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中, E , ν 分别为弹性模量和泊松比.

需提及, Liu 等^[26-28] 早前曾提出一种强弱式结合的方法, 即无网格强弱式 (meshless weak strong, MWS) 法, 该方法基于提高求解效率的考虑, 采用配点法离散域内节点并处理本质边界条件, 而采用 MLPG 法处理自然边界条件. 这种方法有两方面的不足, 一是为了保证自然边界条件的施加, 需执行边界积分运算, 因此难于处理不规则域问题; 二是对一些特殊问题, 如轴对称问题, 或场函数高度不光滑的问题, 可能会产生明显的不稳定计算. 相比而言, 本文方法在原理上, 应不存在这两方面的问题. 此外, 本文方法对域内计算节点采用 MLPG5 的离散格式, 其计算效率也能够得到保证.

3 数值算例

3.1 算例 1

考虑一个不规则域上的 Laplace 方程问题, 其边界由外旋轮线函数确定^[29]

$$\rho(\theta) = \sqrt{(a+b)^2 + 1 - 2(a+b)\cos(a\theta/b)} \quad (27)$$

其中, 取 $a = 3, b = 1$, 则得到不规则域的边界形状如图 2(a) 所示. 问题域上的控制方程为

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2} = -\sin x - \cos y \quad (28)$$

其自然边界 $\rho(\theta: \pi \leq \theta \leq 2\pi)$ 条件取为

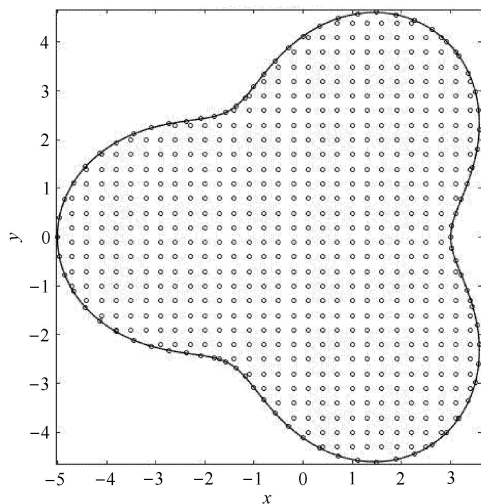
$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} = \cos x - \sin y \quad (29)$$

并将 $\rho(\theta: 0 \leq \theta \leq \pi)$ 作为本质边界条件 (将解析解方程代入). 该问题的解析解为

$$u(\mathbf{x}) = \sin x + \cos y \quad (30)$$

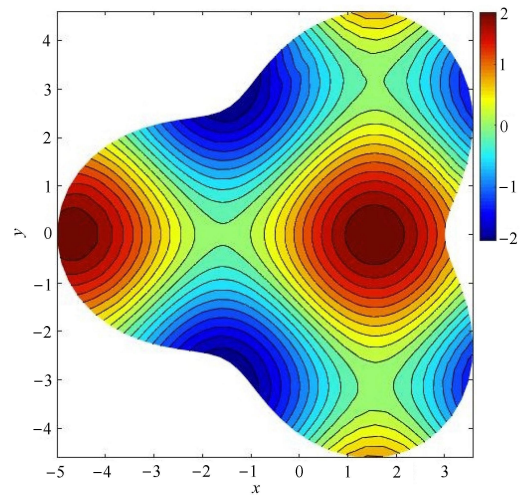
本文方法求解该问题的场节点离散方案如图 2(a) 所示, 其域上的数值解结果如图 2(b) 所示.

一般配点法数值实施简单, 而且无需任何积分运算, 因此在技术上很容易处理不规则域问题. 本文



(a) 布点方案

(a) Distribution of nodes



(b) 数值解云图

(b) Cloud chart of numerical solution

图 2 算例 1 的布点方案和数值解云图

Fig. 2 Nodal distribution and numerical cloud chart of example 1

在对比计算中, 把配点法也列入比较对象. 为了便于直观考察数值方法的求解精度, 将数值解和精确解映射到问题域内 $r = 2$ 的圆上, 求解结果如图 3 所示. 可见, 本文方法能够得到非常精确的数值解, 而且其求解精度明显高于配点法.

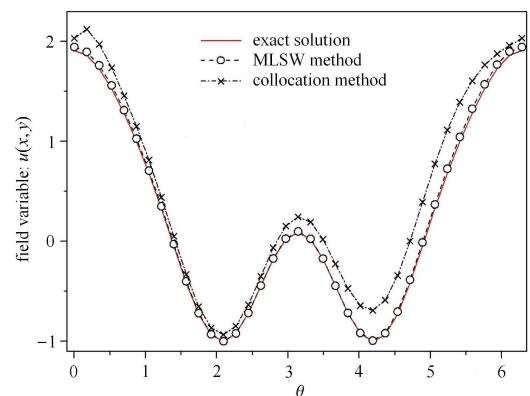


图 3 算例 1 的数值解和精确解比较

Fig. 3 Comparing the exact solution and numerical solution of example 1

3.2 算例 2

考虑一个不规则域内包含圆孔的复边界问题, 其外边界由下式确定^[30-31]

$$\rho(\theta) = \exp(\sin \theta) \sin^2(2\theta) + \exp(\cos \theta) \cos^2(2\theta) \quad (31)$$

问题域上的控制方程为

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2} = 0 \quad (32)$$

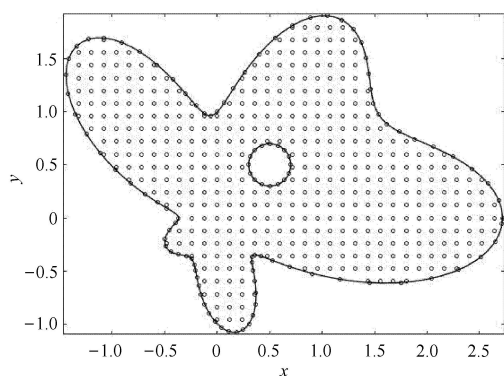
问题域的外边界取为自然边界, 其边界条件设为

$$n_x \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} + n_y \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{n_x(x-0.5) + n_y(y-0.5)}{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} \quad (33)$$

问题域内的半径 $r = 0.2$ 的圆孔取为本质边界, 其边界条件由精确解代入. 该问题的解析解为

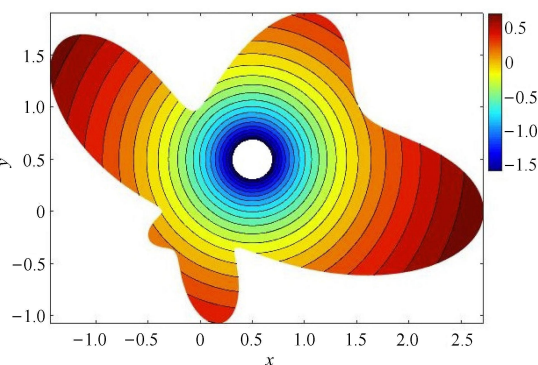
$$u(\mathbf{x}) = \ln \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} \quad (34)$$

本文方法求解该问题的场节点离散方案如图 4(a) 所示, 其域上的数值解结果如图 4(b) 所示.



(a) 布点方案

(a) Distribution of nodes



(b) 数值解云图

(b) Cloud chart of numerical solution

图 4 算例 2 的布点方案和数值解云图

Fig. 4 Nodal distribution and numerical cloud chart of example 2

数值方法中, 不精确的边界条件施加会导致系统方程丧失协调性, 从而可能严重影响求解精度. 本文方法中用 MIP 法施加自然边界条件 (natural boundary condition, NBC) 是一个重要的数值实施策略. 为了验证其必要性, 结合本算例, 在 MLPG5 方法基础上, 改用配点法施加 NBC 和本质边界条件的数值结

果也列入比较对象. 将数值解和精确解结果映射到问题域内 $\rho' = \rho/2$ 的闭曲线上, 如图 5 所示. 可见, 本文方法能对该问题给出精确的解答, 且求解精度明显优于其他两种数值方法. 显然, 用配点法施加 NBC 的 MLPG5 方法, 其求解精度也不够理想, 由此说明, 本文方法用 MIP 法施加 NBC 是非常必要的.

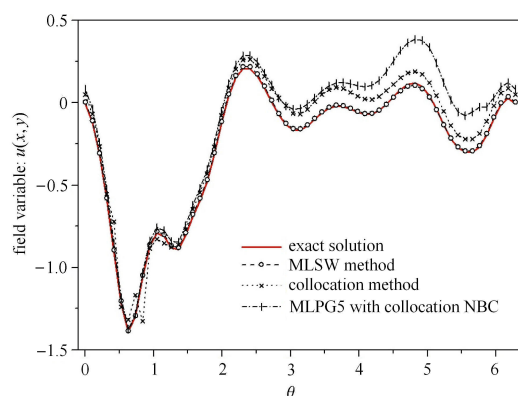


图 5 算例 2 的数值解和精确解比较

Fig. 5 Comparing the exact solution and numerical solution of example 2

3.3 算例 3

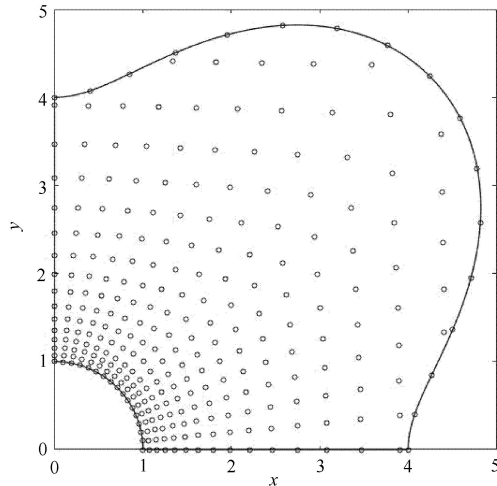
考虑一个不规则域的二维弹性力学问题. 一个内部带圆孔的无限板, 在 x 方向受集度为 q 的均布拉伸荷载. 该问题存在如下解析解^[32]

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{q}{4\eta} \left\{ r \left(\frac{\kappa-1}{2} + \cos 2\theta \right) + \frac{c^2}{r} \left[1 + (1+\kappa) \cos 2\theta \right] - \frac{c^4}{r^3} \cos 2\theta \right\} \\ u_\theta &= \frac{q}{4\eta} \left[(1-\kappa) \frac{c^2}{r} - r - \frac{c^4}{r^3} \right] \sin 2\theta \\ \sigma_x(x, y) &= q \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \\ \sigma_y(x, y) &= -q \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \\ \tau_{xy}(x, y) &= -q \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) - \frac{3c^4}{2r^4} \sin 4\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

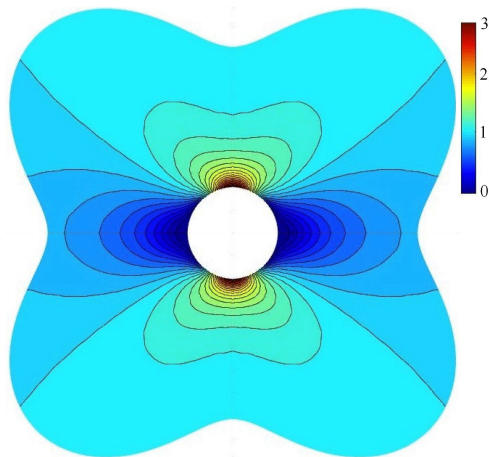
式中, $\eta = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$. 本文计算中, 圆孔半径取 $c = 1$, 外荷载集度取 $q = 1$, 材料弹性模量取 $E = 10^3$, 材料泊松比取 $\nu = 0.3$.

本文数值计算中, 采用带孔的有限区域建立几何模型, 其不规则外边界由式 (27) 定义, 边界曲线参数取 $a = 4$, $b = 1$. 求解域形状如图 6(b) 所示, 利用结构的对称性, 取 1/4 结构建模, 计算模型及其

场节点离散方案如图 6(a) 所示. 在求解域的 x 轴和 y 轴上, 根据式 (35) 给出的位移解, 施加对称位移边界条件. 在求解域的外边界上, 根据式 (36) 给出的应力解, 施加表面力载荷. 由本文方法解得的全求解域上的 x 方向应力分布如图 6(b) 所示.



(a) 布点方案
(a) Distribution of nodes



(b) x 方向应力解云图
(b) Cloud chart of x -direction stress solution

图 6 算例 3 的布点方案和数值解云图

Fig. 6 Nodal distribution and numerical cloud chart of example 3

在比较计算中, 将求解域 y 轴上的 x 方向应力解结果进行分析. 本文方法、配点法和采用配点技术施加 NBC 的 MLPG5 方法的数值解结果, 及其与精确解的对照如图 7 所示. 可见, 本文方法能够给出非常精确的数值解, 而另外两种方法在内圆孔附件应力集中区域的解均有明显偏差. 此外, 由配点技术施加 NBC 的 MLPG5 方法, 其数值解曲线光滑性较差, 在

区间求解稳定性方面反而不及完全的配点法, 由此可进一步说明本文方法所采用算法的合理性.

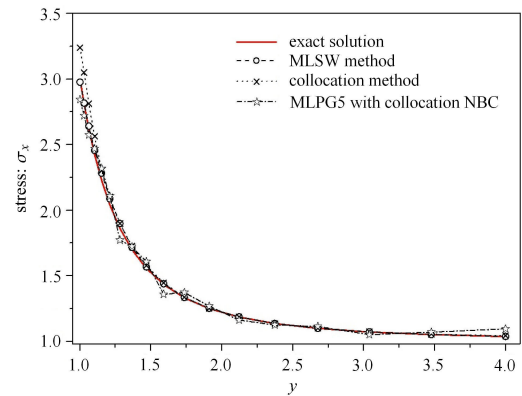


图 7 算例 3 的数值解和精确解比较

Fig. 7 Comparing the exact solution and numerical solution of example 3

4 结论

弱式方法具有求解精度高、计算稳定性好的优势. 一个重要的原因就是通过弱式转换, 降低了控制方程的导数近似阶数. 比如, 通常给定边值的二阶偏微分方程问题, 其控制方程经弱式转换后, 就变成一阶偏微分的积分形式. 这种对导数近似要求的降阶, 通常意味着计算精度呈数量级的提升, 而且对目标场函数的光滑性降低了敏感度. 因此, 本文方法对域内节点采用 MLPG 法的局部弱式离散, 能够继承基础方法的这种优势.

本文建议的 MLSW 法是对 MLPG 法实用性的一个扩展, 采用配点法施加本质边界条件, 采用 MIP 法施加自然边界条件, 完全避免了局部弱式方法的边界积分运算. 因此, 本文方法能够将弱式方法和强式方法各自优势结合起来, 并消减了各自的局限性. 通过初步数值检验, 本文方法容易处理不规则域问题, 而且具有精确、稳定、可靠的计算性能.

总之, 计算力学面临的实际工程问题, 通常都具有非常复杂的几何结构. 工程计算不仅要求能精确稳定的求解, 而且要求能够高效便捷的处理复杂结构问题. 本文提出的方法, 可以作为兼而满足这两个要求的可供选择方案.

参 考 文 献

- 1 Yang JJ, Zheng JL. Intervention-point principle of meshless method. *Chinese Science Bulletin*, 2013, 58(4-5): 478-485
- 2 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 3-47
- 3 张雄, 刘岩, 马. 无网格法的理论及应用. *力学进展*, 2009, 39(1): 1-36 (Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree methods and their applications. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36 (in Chinese))
 - 4 Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10(5): 307-318
 - 5 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229-256
 - 6 Atluri SN, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 117-127
 - 7 Liu WK, Jun S, Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20(8-9): 1081-1106
 - 8 Atluri SN, Shen S. The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *Advances in Computational Mathematics*, 2005, 23(1-2): 73-93
 - 9 Atluri SN, Shen S. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *Tech Science Press*, 2002, 5(3): 235-255
 - 10 Sladek J, Stanak P, Han ZD, et al. Applications of the MLPG method in engineering & sciences: a review. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2013, 92(5): 423-475
 - 11 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法. *力学学报*, 2001, 33(4): 508-517 (Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin method for the elasticity problem. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2001, 33(4): 508-517 (in Chinese))
 - 12 张雄, 刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社, 2004: 121-141 (Zhang Xiong, Liu Yan. Meshless Methods. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 121-141 (in Chinese))
 - 13 Liu GR, Gu YT. An introduction to meshfree methods and their programming. Springer, 2005: 237-292
 - 14 Liu GR. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. 2nd ed. CRC Press, 2009: 237-272
 - 15 Jarak T, Sorić J, Atluri SN. On the mixed meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) paradigm for the 4th order differential equations//Online Journal of ICCES: International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences. 2015
 - 16 Zhang T, Dong L, Alotaibi A, et al. Application of the MLPG mixed collocation method for solving problems of linear isotropic/ anisotropic elasticity with simply/multiply-connected domains. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2013, 94(1): 1-28
 - 17 Zhang T, He Y, Dong L, et al. Meshless local petrov-galerkin mixed collocation method for solving cauchy inverse problems of steady-state heat transfer. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2014, 97(6): 509-553
 - 18 杜超凡, 章定国. 光滑节点插值法: 计算固有频率下界值的新方法. *力学学报*, 2015, 47(4): 839-847 (Du Chaofan, Zhang Dingguo. Node-based smoothed point interpolation method: A new method for computing lower bound of natural frequency. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(4): 839-847 (in Chinese))
 - 19 Dong L, Alotaibi A, Mohiuddine SA, et al. Computational methods in engineering: a variety of primal & mixed methods, with global & local interpolations, for well-posed or ill-Posed BCs. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2014, 99(1): 1-85
 - 20 程玉民, 彭妙娟, 李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用. *力学学报*, 2005, 37(6): 719-723 (Cheng Yumin, Peng Miaojuan, Li Jiuhong. The complex variable moving least-square approximation and its application. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(6): 719-723(in Chinese))
 - 21 程玉民. 移动最小二乘法研究进展与述评. *计算机辅助工程*, 2009, 18(2): 5-11 (Cheng Yumin. Advances and review on moving least-square methods. *Computer Aided Engineering*, 2009, 18(2): 5-11(in Chinese))
 - 22 杨建军, 郑健龙. 移动最小二乘法的近似稳定性. *应用数学学报*, 2012, 35(4): 637-648 (Yang Jianjun, Zheng Jianlong. Stability of moving least squares approximation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2012, 35(4): 637-648 (in Chinese))
 - 23 Atluri SN, Kim HG, Cho JY. A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, 1999, 24(5): 348-372
 - 24 Atluri SN, Zhu TL. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 169-179
 - 25 杨建军, 郑健龙. 无网格节点法: 一种具有 h,p,d 适应性的无网格法. *应用数学和力学*, 2016, 37(10): 1013-1025 (Yang Jianjun, Zheng Jianlong. A meshless intervention-point method with h-p-d adaptability. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(10): 1013-1025 (in Chinese))
 - 26 Liu GR, Gu YT. A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids. *Computational Mechanics*, 2003, 33(1): 2-14
 - 27 Liu GR, Wu YL, Ding H. Meshfree weak-strong (MWS) form method and its application to incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, 46(10): 1025-1047
 - 28 Dehghan M, Salehi R. A meshfree weak-strong (MWS) form method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow in pipe with arbitrary wall conductivity. *Computational Mechanics*, 2013, 52(6): 1445-1462
 - 29 Liu C. A highly accurate solver for the mixed-boundary potential problem and singular problem in arbitrary plane domain. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2007, 20(2): 111-122
 - 30 Chen W, Fu ZJ. A novel numerical method for infinite domain potential problems. *Chinese Science Bulletin*, 2010, 55(16): 1598-1603
 - 31 Liu C. A modified Trefftz method for two-dimensional Laplace equation considering the domain's characteristic length. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2007, 21(1): 53-65
 - 32 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity. 3rd ed. Columbus: McGraw-Hill Book Company, 1970