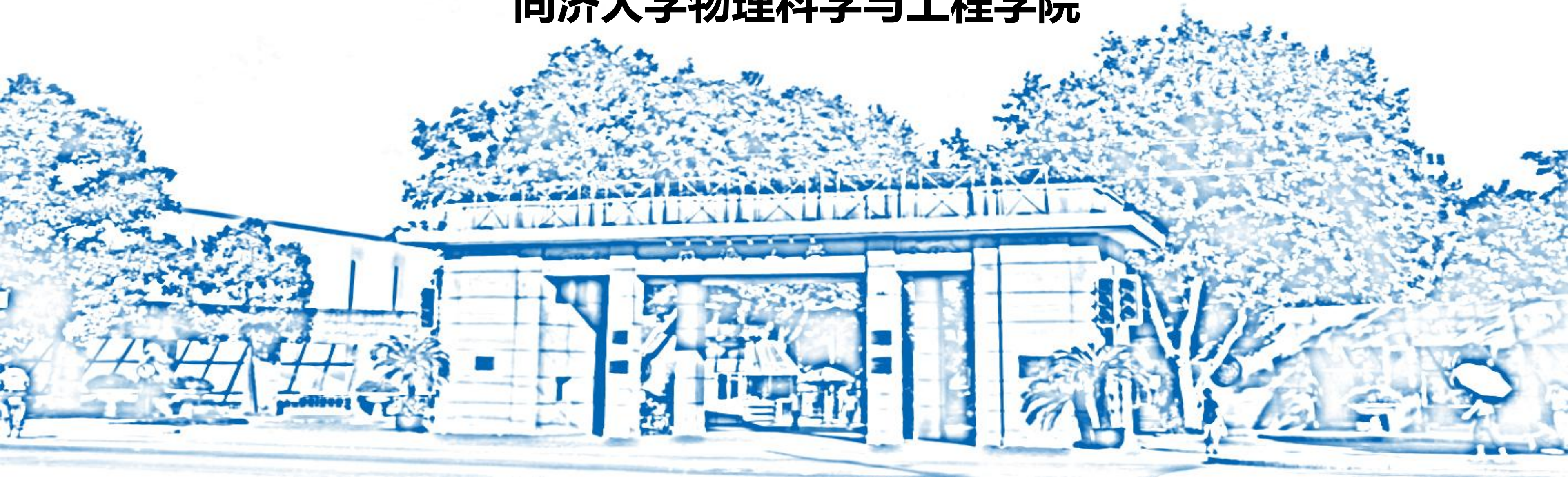
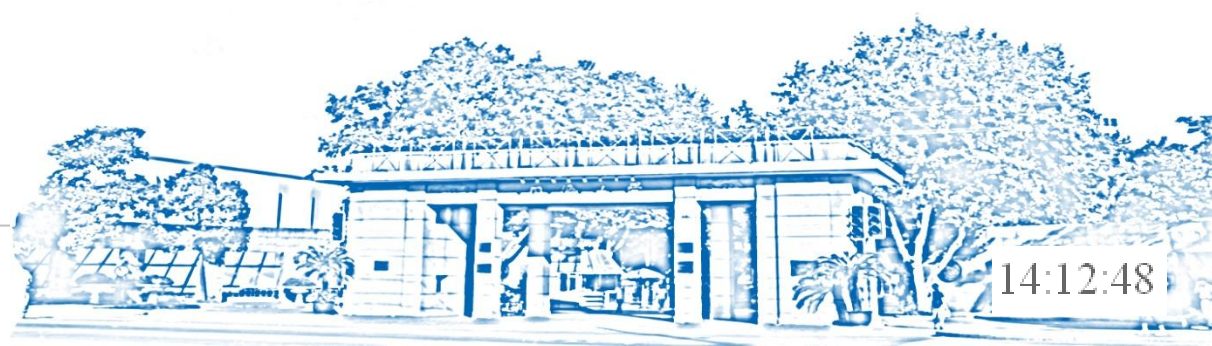
电动力学
Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



第四章 电磁波的传播

第四章 电磁波的传播



§3 有导体存在时电磁波的传播

内 容 概 要

1. 导体内的自由电荷分布
2. 导体内的电磁波
3. 趋肤深度和穿透效应
4. 导体表面上的反射

一、导体内的自由电荷分布

导体内有自由电荷，在电磁场作用下，形成传导电流，产生焦耳热，电磁波能量不断被消耗－－衰减波。导体内电磁波的传播过程是交变电磁场和自由电子运动相互制约的过程，决定电磁波在导体中的存在形式。

导体在静电情况，自由电荷只能分布在导体表面上。

导体内自由电荷分布： $\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=\rho$

传导电流为： $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{J}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

电荷守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

导体内部电荷密度随时间指数衰减的**特征时间**为

$$\boxed{\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}} \qquad \tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

只要电磁波的频率满足

$$\omega << \tau^{-1}=\frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{或} \quad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1 \quad \text{--}\textbf{良导体}$$

低频时可以把金属近似为良导体,高频时不行.

理想**导体**：$\sigma \to \infty$

$$\tau \sim 10^{-17}\mathrm{s} \qquad f << 10^{17}\mathrm{Hz}(\lambda >> 3\mathrm{nm})$$

良导体是内部没有自由电荷分布,电荷只能分布在表面的导体.

二、导体内的电磁波

导体内部没有电荷，麦氏方程为

$$\nabla\cdot\vec{D}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

对于固定频率的电磁波 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$, $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$$\nabla^2\vec{E}=\underline{-i\sigma\mu\omega\vec{E}}-\varepsilon\mu\omega^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{B}=\underline{-i\sigma\mu\omega\vec{B}}-\varepsilon\mu\omega^2\vec{B}$$

$$\nabla^2\vec{E} = -i\sigma\mu\omega\vec{E} - \varepsilon\mu\omega^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{B} = -i\sigma\mu\omega\vec{B} - \varepsilon\mu\omega^2\vec{B}$$

$$\longrightarrow$$

$$\nabla^2\vec{E} = -\mu\omega^2(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{B} = -\mu\omega^2(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})\vec{B}$$

引入**复电容率** $\varepsilon' = \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$$

——亥姆霍兹方程

但是要时刻注意电磁波要满足 $\nabla\cdot\vec{E} = 0$

导体内部电磁波方程：

$$\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$$
$$\nabla\times\vec{B}=-i\omega\mu\varepsilon'\vec{E}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{B}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}\end{cases}\quad \text{or}\quad \begin{cases}\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \vec{E}=\dfrac{i}{\omega\mu\varepsilon'}\nabla\times\vec{B}\end{cases}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\qquad \varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$$

平面波解： $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $\qquad \vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$

$$\Rightarrow\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}e^{i\left(\vec{\beta}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$

β称相位常数, α称衰减常数.

$\vec{\beta}$为传播方向，$\vec{\alpha}$为衰减方向.

复波矢的物理意义

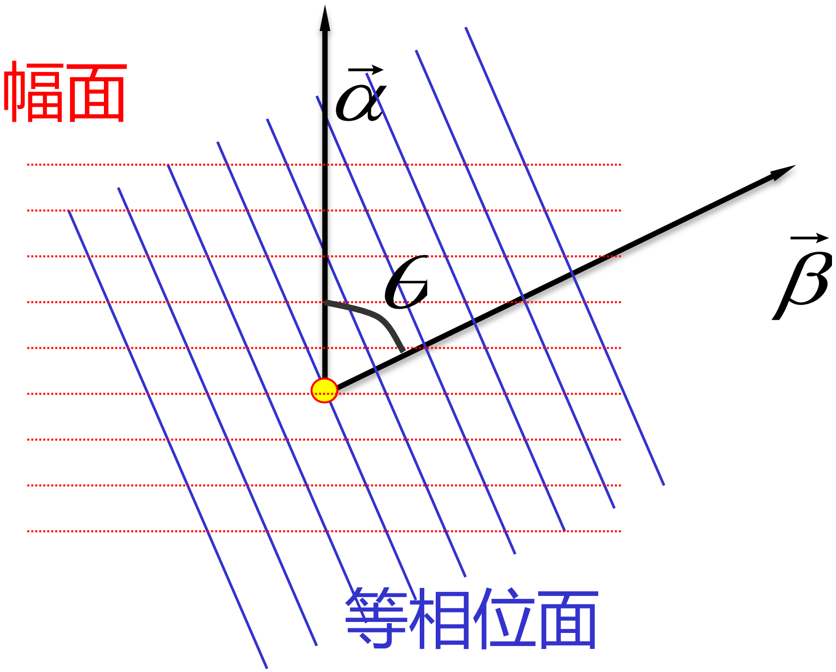
$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

等相位面方程为

$$\vec{\beta}\cdot\vec{r} = 常数$$

等振幅面方程为

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{r} = 常数$$



矢量α和β方向可以不一致, 利用边值关系可以解出.

α和β的值

$$k^2=\beta^2-\alpha^2+2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\omega^2\mu\left(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma \qquad \beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

设矢量α和β方向夹角为$\phi_{\alpha\beta}$：

$$\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\right\}=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2\cos^2\phi_{\alpha\beta}}}\pm 1\right]^{1/2}$$

$\phi_{\alpha\beta}$须由导体内电磁波的激发条件、边值关系确定。

对良导体：
$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1\Rightarrow\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2\cos\phi_{\alpha\beta}}}$$

对不良导体：
$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}<<1\Rightarrow\beta\approx\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ \alpha\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\beta<<\beta$$

衰减很小

例如：当电磁波从真空入射到导体时，设入射面为xz面，z轴为指向导体内部的法向，有边值关系

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x \Rightarrow \beta_x = k_x, \alpha_x = 0$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma \quad \Longrightarrow \quad \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \qquad\qquad \beta_x^{\,2} + \beta_z^2 - \alpha_z^{\,2} = \omega^2 \mu\varepsilon$$

可得到各个分量

三、趋肤效应和穿透深度

由于衰减因子, 导体表面传导电流,电磁波在导体内耗散为焦耳热.

考虑垂直入射,设导体平面为xy平面, z轴指向导体内部,则相位常数和衰减常数都沿z方向, 导体中电场为

$$\vec{k}_0 = k_0\vec{e}_z \qquad \vec{\beta} = \beta\vec{e}_z \qquad \vec{\alpha} = \alpha\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z-\omega t)}$$

$$\begin{cases} \beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon \\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}\omega\mu\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

对于良导体, 波矢量的虚部远远大于实部

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \qquad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$$

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma \qquad \Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad \begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma \end{cases}$$

电磁波进入导体的特征深度为：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

波幅 $E = E_0 e^{-\alpha z}$

降至原值1/e的传播距离称为**穿透深度**，用δ表示。

穿透深度与电导率及频率的平方根成反比, 对于高频电磁波、 高频电流只能集中在表面很薄一层内, 这现象称为趋肤效应.

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

可见穿透深度不仅与电导率有关，还与频率有关。例如对铜来说，$\sigma \sim 5 \times 10^{7}$ S · m^{-1}，当频率为 50Hz时， $\delta \sim$ 0.9cm；当频率为 100MHz时， $\delta \sim 0.7 \times 10^{-3}$cm．由此可见，对于高频电磁波，电磁场以及和它相作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内，这种现象称为**趋肤效应**。

考虑外界电磁波垂直入射导体时，在导体中磁场为

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla \times \vec{E} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\vec{n} \times \vec{E}$$

在良导体中， $\vec{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}\vec{n} \times \vec{E}$ $\qquad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

磁场相位比电场滞后45度

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\vec{H}}{\vec{E}}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} >> 1$$

在真空和介质中此比值是1,电场和磁场具有相同的能量, 在金属导体中, 相对真空和介质来说,磁场比电场重要,金属内的电磁波能量主要是磁场能量.

四、导体表面上的反射

定义 $r_p=\dfrac{R_p}{E_p}\qquad t_p=\dfrac{T_p}{E_p}\qquad r_s=\dfrac{R_s}{E_s}\qquad t_s=\dfrac{T_s}{E_s}$

S波

$$\Rightarrow\begin{cases} r_s=\dfrac{n_1\cos\theta-n_2\cos\theta''}{n_1\cos\theta+n_2\cos\theta''}=-\dfrac{\sin\left(\theta-\theta''\right)}{\sin\left(\theta+\theta''\right)} \\ t_s=\dfrac{2n_1\cos\theta}{n_1\cos\theta+n_2\cos\theta''}=\dfrac{\sin 2\theta''}{\sin\left(\theta+\theta''\right)} \end{cases}$$

P波

$$\Rightarrow\begin{cases} r_p=\dfrac{-n_1\cos\theta''+n_2\cos\theta}{n_1\cos\theta''+n_2\cos\theta}=\dfrac{\tan\left(\theta-\theta''\right)}{\tan\left(\theta+\theta''\right)} \\ t_p=\dfrac{2n_1\cos\theta}{n_1\cos\theta''+n_2\cos\theta}=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin\left(\theta+\theta''\right)\cos\left(\theta-\theta''\right)} \end{cases}$$

如果我们定义一个复数光学常数（折射率）

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}=\frac{\tilde{n}\,\omega}{c}$$

$$k^2=\beta^2-\alpha^2+2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\omega^2\mu\left(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

$$\tilde{n}^2=(n+i\kappa)^2=k^2c^2/\omega^2=\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}+i\frac{\sigma\mu}{\mu_0\varepsilon_0\omega}=\mu_r\varepsilon_r+i\frac{\sigma\mu_r}{\varepsilon_0\omega}$$

对于金属表面, 折射率有虚部

$$\tilde{n}_2=n_2+i\kappa_2 \qquad k''=\tilde{n}_2\,\omega/c=(n_2+i\kappa_2)\omega/c$$

则折射定律为

$$n_1 \sin\theta = \tilde{n}_2 \sin\theta'' = (n_2 + i\kappa_2)\sin\theta''$$

定义

$$\tilde{n}_2 \cos\theta'' \equiv u_2 + iv_2$$

$$(u_2 + iv_2)^2 = \tilde{n}_2^{\,2} \cos^2\theta'' = \tilde{n}_2^2\left(1 - \frac{n_1^2}{\tilde{n}_2^2}\sin^2\theta\right)$$

$$= \tilde{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta$$

$$u_2^2 - v_2^2 = n_2^2 - \kappa_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta$$

$$2u_2 v_2 = 2n_2\kappa_2$$

$$u_2^2=\frac{n_2^2-\kappa_2^2-n_1^2\sin^2\theta+\sqrt{\left(n_2^2-\kappa_2^2-n_1^2\sin^2\theta\right)^2+4n_2^2\kappa_2^2}}{2}$$

$$v_2^2=\frac{-\left(n_2^2-\kappa_2^2-n_1^2\sin^2\theta\right)+\sqrt{\left(n_2^2-\kappa_2^2-n_1^2\sin^2\theta\right)^2+4n_2^2\kappa_2^2}}{2}$$

对于P波

$$r_p=\rho_p e^{i\phi_p}=\frac{\tilde{n}_2\cos\theta-n_1\cos\theta''}{\tilde{n}_2\cos\theta+n_1\cos\theta''}$$

$$=\frac{\tilde{n}_2^2\cos\theta-n_1\tilde{n}_2\cos\theta''}{\tilde{n}_2^2\cos\theta+n_1\tilde{n}_2\cos\theta''}$$

$$=\frac{\left(n_2^2-\kappa_2^2+2in_2\kappa_2\right)\cos\theta-n_1\left(u_2+iv_2\right)}{\left(n_2^2-\kappa_2^2+2in_2\kappa_2\right)\cos\theta+n_1\left(u_2+iv_2\right)}$$

$$t_p = T_p e^{i\chi_p} = \frac{2n_1 n_2 \cos\theta + i2n_1\kappa_2 \cos\theta}{n_1 u_2 + \left(n_2^2 - \kappa_2^2\right)\cos\theta + i\left(n_1 v_2 + 2n_2\kappa_2 \cos\theta\right)}$$

对于S波

$$r_s = \rho_s e^{i\phi_s} = \frac{n_1 \cos\theta - \tilde{n}_2 \cos\theta''}{n_1 \cos\theta + \tilde{n}_2 \cos\theta''} = \frac{n_1 \cos\theta - (u_2 + iv_2)}{n_1 \cos\theta + (u_2 + iv_2)}$$

$$t_s = T_s e^{i\chi_s} = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_1 \cos\theta + \tilde{n}_2 \cos\theta''} = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_1 \cos\theta + u_2 + iv_2}$$

金表面

$\lambda = 632.8nm$ $\qquad n = 0.181$ $\qquad \kappa = 2.99$

$\lambda = 3100nm$ $\qquad n = 1.728$ $\qquad \kappa = 19.2$

对于垂直入射时，P波

$$r_p = \rho_p e^{i\phi_p} = \frac{\tilde{n}_2 - n_1}{\tilde{n}_2 + n_1} = \frac{\beta + i\alpha - \dfrac{\omega}{c}}{\beta + i\alpha + \dfrac{\omega}{c}}$$

$$t_p = T_p e^{i\chi_p} = \frac{2n_1}{n_1 + \tilde{n}_2}$$

对于垂直入射时，S波

$$r_s = \rho_s e^{i\phi_s} = \frac{n_1 - \tilde{n}_2}{n_1 + \tilde{n}_2}$$

$$t_s = T_s e^{i\chi_s} = \frac{2n_1}{n_1 + \tilde{n}_2}$$

对于垂直入射时，可以看出P波和S波具有相同的反射场强和透射场强，但是反射波相位相差180度. 考虑良导体时

$$r_p = -r_s = \frac{\beta + i\alpha - \frac{\omega}{c}}{\beta + i\alpha + \frac{\omega}{c}} = \frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

$$\boxed{\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}$$

反射率:

$$R = r_s^{\ 2} = r_p^{\ 2} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

良导体是良反射体!

考虑垂直入射，电磁场边界条件：

$$\begin{cases} E+E'-E''=0 \\ H-H'-H''=0 \end{cases}$$

$$H=(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}E$$

$$H'=(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}E'$$

$$H''=(\sigma/\mu_0\omega)^{1/2}e^{i\pi/4}E''$$

$$\begin{cases} E+E'-E''=0 \\ E-E'-(\sigma/2\varepsilon_0\omega)^{1/2}(1+i)E''=0 \end{cases}$$

$$\frac{E'}{E}=-\frac{1+i-(2\varepsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}}{1+i+(2\varepsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}}$$

反射率：

$$R=\left|\frac{E'}{E}\right|^2=\frac{\left[1-(2\varepsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}\right]^2+1}{\left[1+(2\varepsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}\right]^2+1}\approx 1-2(2\varepsilon_0\omega/\sigma)^{1/2}\approx 1$$

应用：微波炉，雷达“眼睛”

例题 证明在良导体内，非垂直入射情形有

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \qquad \beta_x << \beta_z$$

解： 设空间中入射波矢为$k^{(0)}$，由边值关系 $k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x$

$$\alpha_x = 0, \qquad \beta_x = k_x^{(0)}$$

良导体内波数平方为

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 \approx 0$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \alpha_z\beta_z = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma = \frac{1}{2}\omega^2\mu_0\varepsilon_0\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} >> \frac{1}{2}k^{(0)2}$$

$$\alpha_z \beta_z >> \beta_x^2$$

略去 β_x^2,得

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \qquad \beta_x << \beta_z$$

因此, 在任意入射角情形下, α垂直于表面, β亦接近法线方向.

穿透深度δ仍由 $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 给出.

例题 计算高频下的良导体的表面电阻.

解： 由于趋肤效应, 高频下仅在导体表面薄层内有电流通过. 取z轴沿指向导体内部的法线方向. 导体内体电流密度为

$$\vec{J}(\vec{x},t)=\sigma\vec{E}(x,t)=\sigma\vec{E}_0(x,y)e^{-\alpha z+i\beta z-i\omega t}$$

面电流的线密α_f定义为通过单位横截线的电流, 即等于在薄层内把J对z积分.

$$\vec{\alpha}_f=\int_0^{\infty}\vec{J}\mathrm{d}z$$

$$\vec{\alpha}_f=\sigma\vec{E}_0\int_0^{\infty}e^{-\alpha z+i\beta z}\mathrm{d}z=\frac{\sigma\vec{E}_0}{\alpha-i\beta}$$

$$=\frac{\sigma\vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{i\phi}.\qquad\left(\tan\phi=\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

其中E_0为表面上的电场值.

导体内平均损耗功率密度为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{J}^{*}\cdot\vec{E}\right)=\frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

导体表面单位面积平均损耗功率为

$$P_L=\frac{1}{2}\sigma E_0^2\int_0^{\infty}e^{-2\alpha z}\mathrm{d}z=\frac{\sigma E_0^2}{4\alpha}$$

$$P_L=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\alpha\sigma}\alpha_{f0}^2$$

式中α_{f0}为面电流密度的峰值. 把$\alpha\approx\beta\approx 1/\delta$代入得

$$P_L=\frac{1}{2\sigma\delta}\alpha_{f0}^2\qquad\left(P=RI^2\right)$$

定义导体相对表面阻抗：

$$\xi_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}}$$

对良导体:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 (1 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}) \approx i\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\xi_r = \xi_r' + i\xi_r'' = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}(1-i) \Rightarrow \xi_r' = -\xi_r'' = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}} << 1$$

引入

$$\xi = \xi_r\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \xi' + i\xi'', \quad \xi_r' = -\xi_r'' = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}} \Rightarrow \xi' = -\xi'' = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$$

$$P_L = \frac{1}{2\sigma\delta}\alpha_{f0}^2 = \frac{1}{2}\xi'\alpha_{f0}^2 \qquad \delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

式中ξ称为金属表面阻抗,起到表面电阻的作用 $\left(P = RI^2\right)$