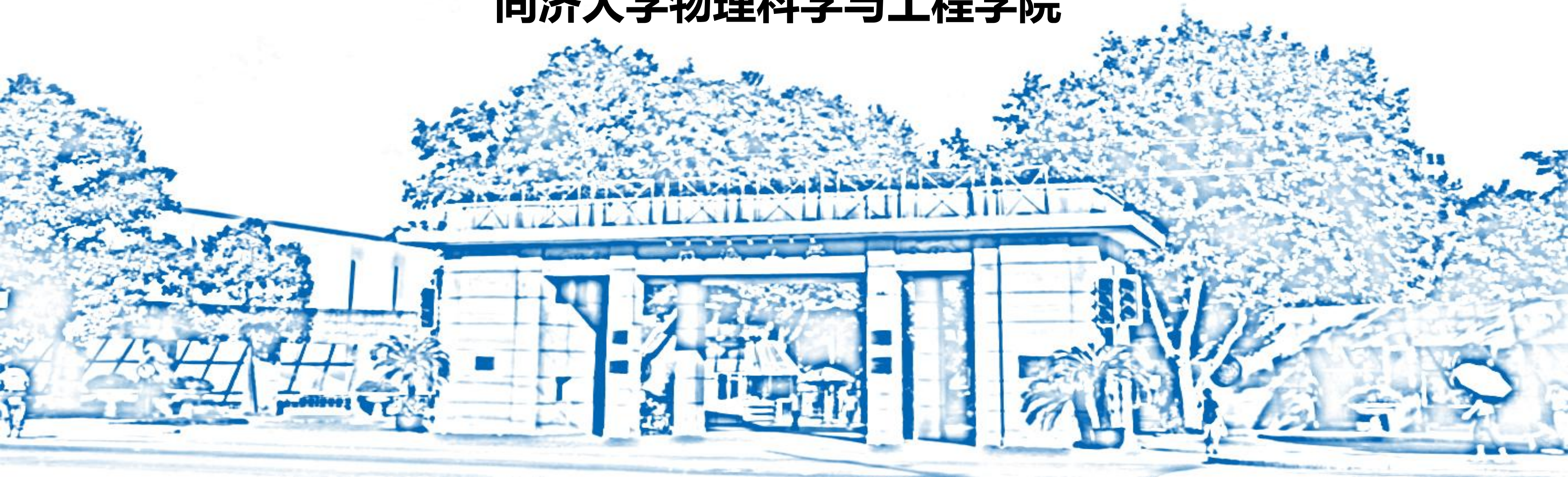
电动力学

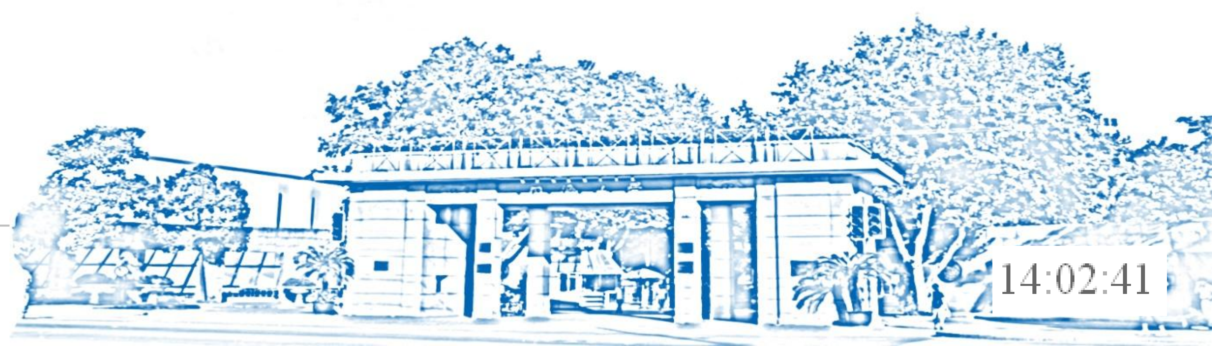
Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



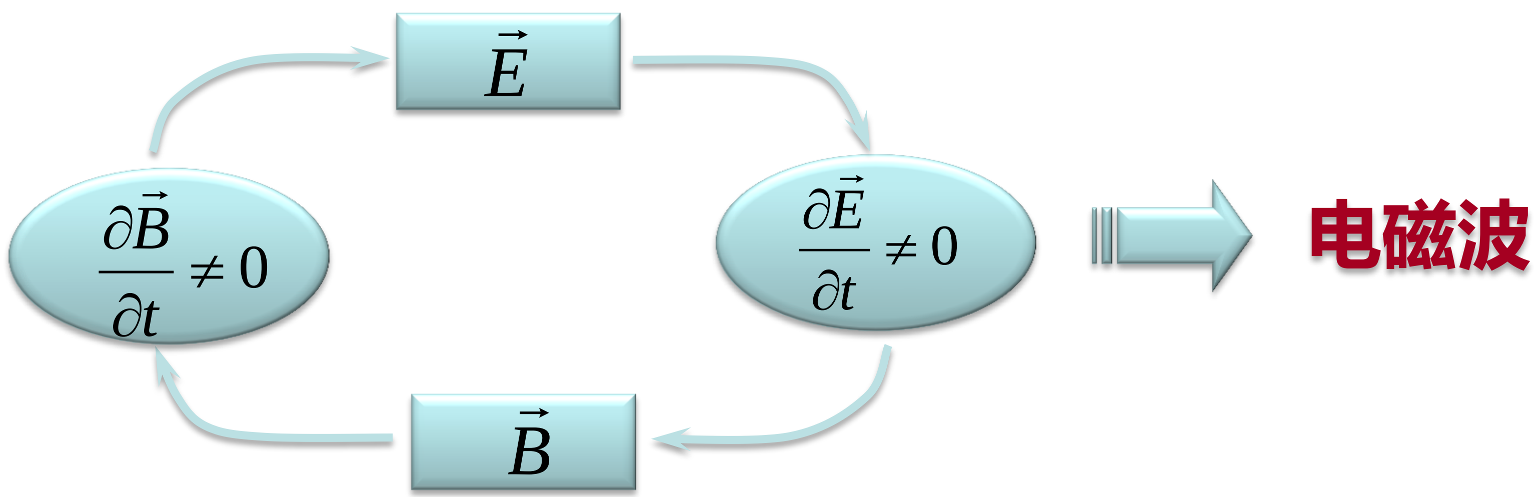
第四章 电磁波的传播

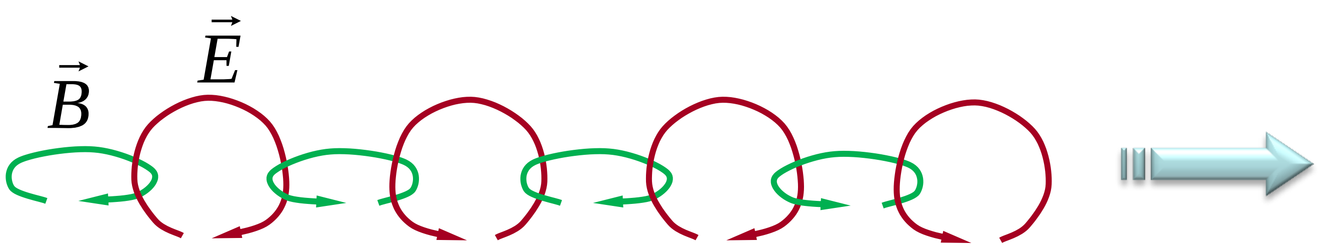
- §1 平面电磁波
- §2 电磁波在介质界面上的反射和折射
- §3 有导体存在时电磁波的传播
- §4 谐振腔
- §5 波导
- §6 光子晶体



电场磁场相互为源

当 $\partial/\partial t \neq 0$ 时，电场和磁场相耦合，相互为源，可以脱离电荷、电流而存在：





平面电磁波是交变电磁场存在的一种最基本的形式。

1. 无界空间中平面电磁波传播的主要特性

2. 电磁波在介质界面上的反射和折射

   从电磁理论出发导出光学中的反射和折射定律．

3. 有导体存在时的电磁波传播问题。

   说明电磁波在导体内有一定的穿透深度，在良导体内只有很小部分电磁能量透入，因而良导体成为电磁波存在的边界。

4. 有界空间的电磁波．

   微波技术中常用的谐振腔、传输线和波导都属于有界空间中的电磁波问题．在这两节中我们以谐振腔和波导为例说明电磁波边值问题的解法．

§1 平面电磁波

内 容 概 要

1. 电磁场波动方程
2. 时谐电磁波
3. 平面电磁波
4. 电磁波的能量和能流

一、电磁场波动方程

麦氏方程组

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$\xrightarrow{\text{无源情况下}}$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

真空中 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}\quad\vec{B}=\mu_0\vec{H}$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

自由空间的电磁场波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

$$\xrightarrow{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

电磁场在真空中应满足“波动方程”

电、磁波动方程

真空中电、磁场形式上可以分离

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{E}=0$$

电波动方程 + 横波条件

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

磁波动方程 + 横波条件

真空中光速 $c=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$

但不能替代麦克斯韦方程，还需要考虑电场与磁场的联系

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

对介质的考虑

介质中，电磁场方程能否写成波动方程的形式？

如果可以，有无条件？条件是什么？ $c \to (\mu\varepsilon)^{-1/2}$ ？

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad\Rightarrow\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}\right)\quad\overset{?}{\Rightarrow}\nabla\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0\qquad\Rightarrow\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right)=0\qquad\overset{?}{\Rightarrow}\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\ \overset{?}{=}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

均匀、稳定的介质也不行！！

$$\vec{D}(t)=\varepsilon\vec{E}(t)\qquad\vec{B}(t)=\mu\vec{H}(t)$$ 一般不成立

介质的色散性质

一般的介质具有色散性质，即介质对电磁场的响应性质与电磁场的变化频率有关：

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \qquad \vec{B}(\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\omega)$$

$$\longrightarrow \quad \vec{D}(t)\neq\varepsilon\vec{E}(t) \qquad \vec{B}(t)\neq\mu\vec{H}(t)$$

对一般的介质中的电磁场，不满足波动方程

$$\omega\rightarrow\infty \qquad \varepsilon\rightarrow\varepsilon_0 \qquad \mu\rightarrow\mu_0$$

介质中的微观粒子（如电子）由于其惯性，来不及响应外场.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

在线性介质中(对一定频率)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

考虑在没有电荷分布的自由空间 $\rho = 0, \nabla \cdot \vec{E} = 0$ 又

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

—— 电磁场波动方程

二、时谐电磁波

任一时域函数 $\vec{E}(t)$，可以视为由频域函数 $\vec{E}(\omega)$ 叠加而成，反之亦然。这就是傅里叶（Fourier）变换：

正变换 $$\vec{E}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

逆变换 $$\vec{E}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

对电磁场作傅里叶变换：

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad \vec{B}(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{B}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{D}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu(\omega)}\vec{B}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

时谐电磁波(单色波): 一定频率作正弦振荡的波.

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t} \qquad \vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\vec{D}(\vec{x})e^{-i\omega t}=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\vec{H}(\vec{x})e^{-i\omega t}=\frac{1}{\mu(\omega)}\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=-i\omega\mu\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=-i\omega\mu\varepsilon\vec{E}\end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\end{cases} \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

一定频率下电磁波的基本方程

亥姆霍兹方程
（ Helmhotz 方程 ）

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \vec{B}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{E}=\dfrac{i\omega}{k^2}\nabla\times\vec{B} \end{cases}$$

此处的E、B是电磁场的振幅，时间变化部分不包含在内．

此处每一个满足$\nabla\cdot\vec{E}=0$ 的解代表一种可能存在的**波模**.

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2\vec{E}=-i\sigma\mu\omega\vec{E}-\varepsilon\mu\omega^2\vec{E},$$
$$\nabla^2\vec{B}=-i\sigma\mu\omega\vec{B}-\varepsilon\mu\omega^2\vec{B}.$$

$$\boxed{k^2=\varepsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega}$$

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0,$$
$$\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0.$$

亥姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{B}=-\dfrac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \vec{E}=\dfrac{1}{\sigma\mu-i\varepsilon\mu\omega}\nabla\times\vec{B}\end{cases}$$

电磁场时空联合傅里叶变换

对任一时空变化的函数 $\vec{E}(\vec{x},t)$，可以进行时空联合的傅里叶变换：

正变换

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\iiint\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(k_x,k_y,k_z,\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\mathrm{d}\omega$$

逆变换

$$\vec{E}(k_x,k_y,k_z,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\iiint\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(x,y,z,t)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\mathrm{dxdydzdt}$$

任意的时空写成下列基（本）函数之叠加：

$$\exp[-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)]$$

$$\boxed{k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\qquad\boxed{k^2=\varepsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega}$$

三、平面电磁波

上述方程有一个最基本、最简单的解

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$$ —— **平面电磁波**

振幅

相位因子

$$k^2=\varepsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega$$

在真空中 $\varepsilon=\varepsilon_0,\mu=\mu_0,\sigma=0,c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$$

$$\phi=\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t \qquad \Delta\phi=\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}-\omega\Delta t=0$$

$$\vec{v}_p=\frac{\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}}{k\Delta t}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)=\frac{\omega}{k}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)=\frac{\omega}{\vec{k}}$$

相速度：即(传播方向上）相位传播速度

真空中电磁波的传播速度为 $v_p=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$

介质中电磁波的传播速度为 $v_p=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\dfrac{c}{n}$

介质的折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

引起色散现象

一般平面波形式为：

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}_0 e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

空间两点 $\vec{x}_1,\vec{x}_2$,若满足 $(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\cdot\vec{k}=0$,则场相同，

垂直于$\vec{k}$ 的平面上各点场值相同 $\longrightarrow$ **平面波**

电磁波是沿着 $\vec{k}$ 方向传播的, $\vec{k}$ 称为**波矢量**, k称为**波数**. 在电磁场传播方向相距$\Delta x=2\pi/k$的两点有相位差2π

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \qquad \Rightarrow k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

记着电磁波必须要满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$

对平面波电场部分求散度，则

$$\nabla\cdot\vec{E}=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(E_{0x}\vec{i}+E_{0y}\vec{j}+E_{0z}\vec{k}\right)e^{-i\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}$$

$$=i\left(E_{0x}k_x+E_{0y}k_y+E_{0z}k_z\right)e^{-i\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}=i\vec{k}\cdot\vec{E}$$

$$\because\nabla\cdot\vec{E}=0,\therefore\vec{k}\perp\vec{E}$$

—— 平面电磁波是横波

$$\because\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega},\therefore\vec{k}\perp\vec{B}$$

平面电磁波有两种独立偏振态

特定的平面电磁波有一个独立变化的矢量$\vec{E}_0$，

$$\vec{E}_0\cdot\vec{k}=0$$

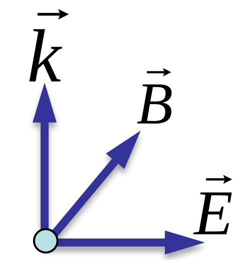
$\longrightarrow$ 两个自由度、两种状态 $\longrightarrow$ 偏振态。

平面电磁波:

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \qquad \vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

一般平面电磁波的**特性**

（1）平面电磁波是横波，E和B都垂直传播方向



$$\vec{E}\cdot\vec{k}=\vec{B}\cdot\vec{k}=0$$

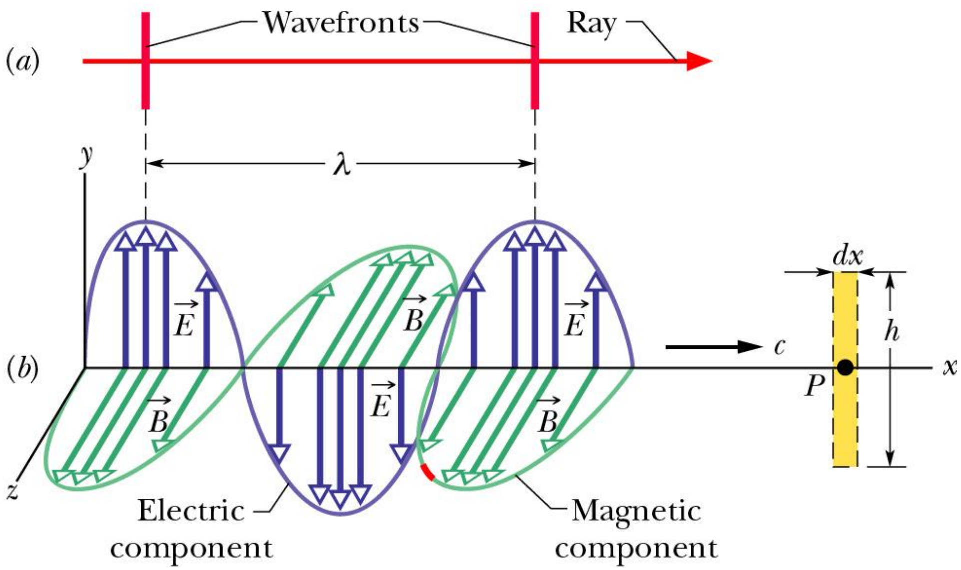
（2）E、B、k相互垂直，构成右手螺旋: $\vec{E}\times\vec{B}=\vec{k}$

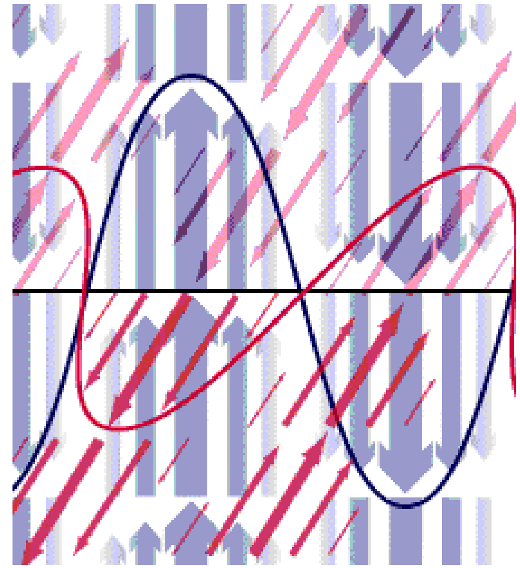
（3）二者振幅比为介质中光的传播速度，相位不一定相同. 但是在无电导均匀介质时相位相同.

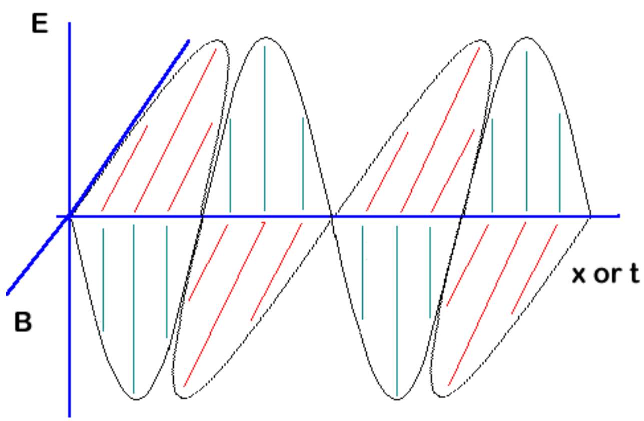
$$\frac{|E|}{|B|}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v_p$$

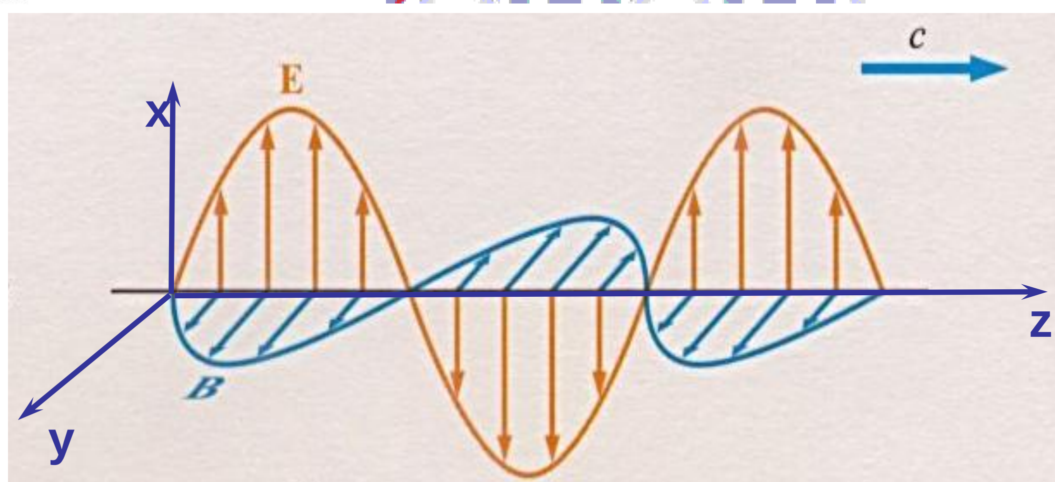
平面电磁波是均匀、无限大介质中麦克斯韦方程的解, $\mu\varepsilon$为常数.

可脱离电荷、电流在空间传播 → 电磁波









四、电磁波的能量和能流

电磁场的能量密度为（线性均匀介质）

$$w=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2\right)$$

平面电磁波能量密度：

$$w=\varepsilon\vec{E}^2=\frac{1}{\mu}\vec{B}^2$$

电场能量和磁场能量相等

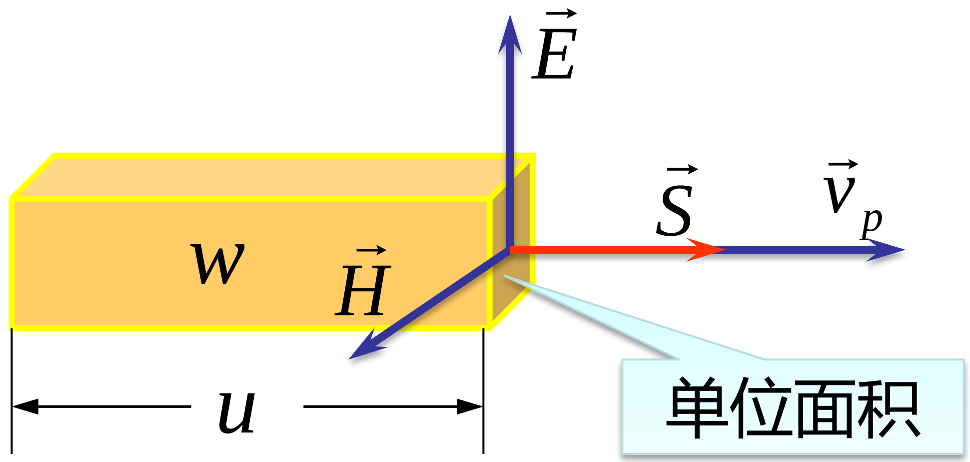
平面电磁波的能流密度：

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\left(\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}\right)$$

$$=\frac{E^2}{\omega\mu}\vec{k}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)=wv_p\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)$$

$$\vec{S}=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}w\vec{e}_k=v_p w\vec{e}_k$$

能流方向为波矢方向，其值为能量密度与相速度之积



能量、能流密度瞬时值：

$$w(\vec{x},t)=\varepsilon E_0^2\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\left[1+\cos 2\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right]$$

平面电磁波的能量密度和能流密度时间平均值为：

$$\overline{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2$$

$$\overline{\vec{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\times\vec{H}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k$$

$$\overline{\vec{S}}=\overline{w}v_p\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)$$