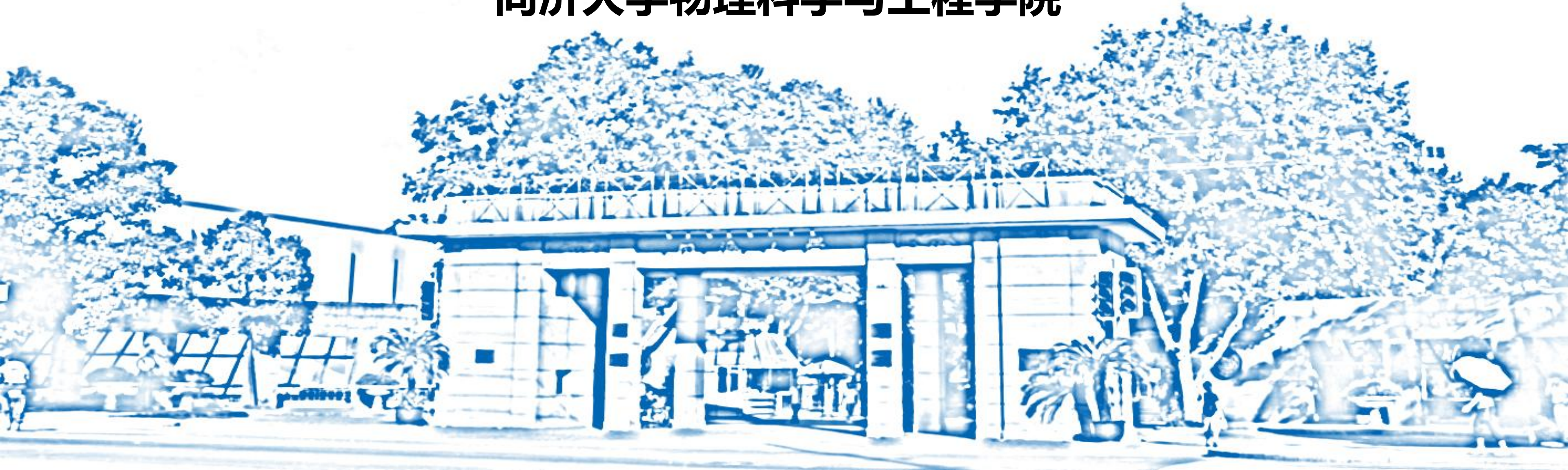
电动力学
Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



第三章 静磁场

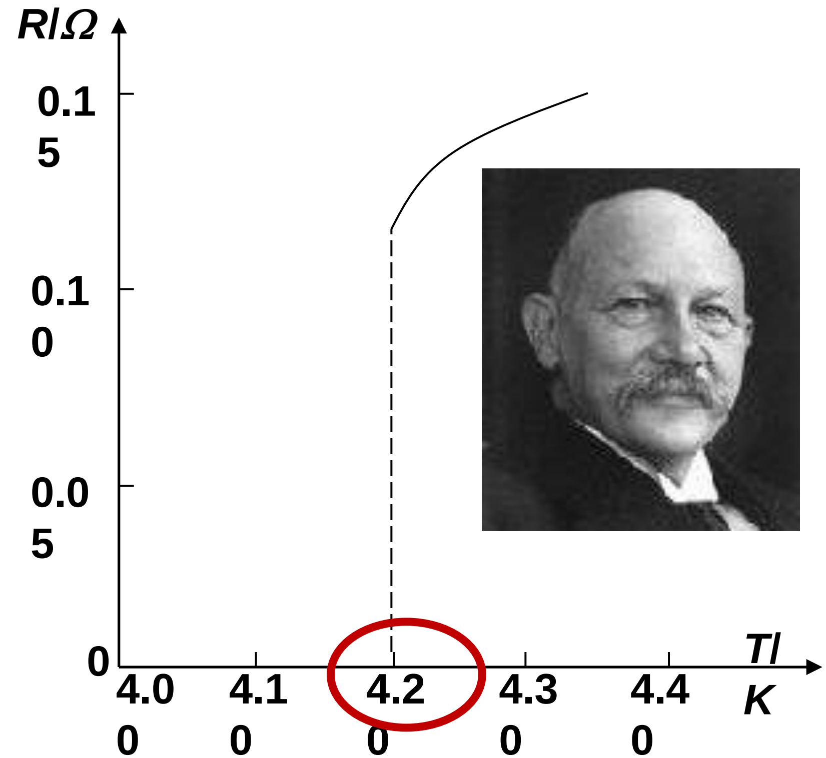
第三章 静磁场

§5 超导体的电磁性质

内 容 概 要

1. 超导的基本电磁性质
2. 超导的基本电磁方程
3. 超导的完全抗磁性
4. 超导的磁通量子化
5. 超导体的分类

一、超导体的基本电磁现象



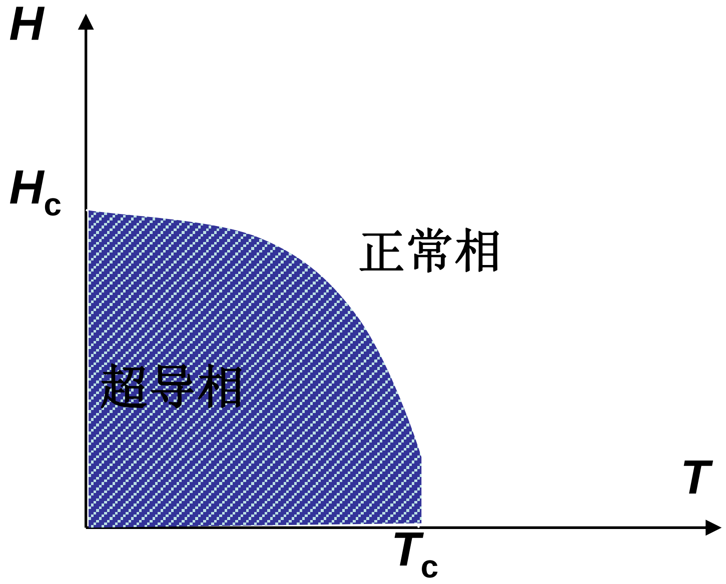
1911年，昂纳斯发现超导现象

超导电性：电阻率为零，电导率为无穷大 $\sigma \to \infty$

开始出现超导电性的温度称为临界温度T_C. 在T_C以上,物体处于正常态,在T_C以下为超导态。

临界温度与外加磁场相关，或曰临界磁场与温度相关

$$H_C(T) = H_C(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^2\right]$$



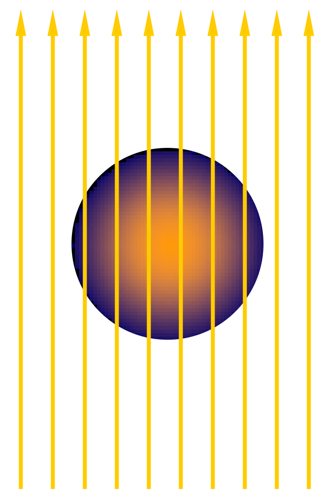
迈斯纳(Meissner)效应

1933年迈斯纳发现超导体的完全抗磁性。任何情况下，处于**超导态的物体内部有B = 0**。

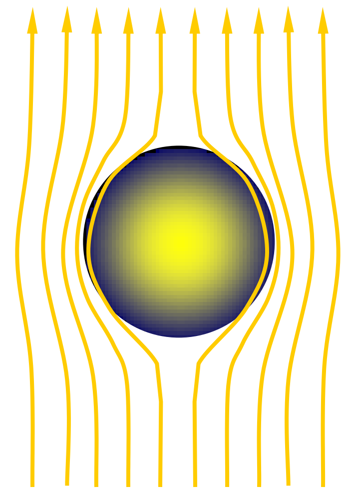
1) 处于超导态的物体，当加上外磁场时,只要磁场强度不超过H_C, 则B不能进入超导体内。

2) 处于正常态的物体放置在磁场内,当温度下降使物体转变为超导态时, B被排出超导体外。

迈斯纳效应与超导电性是**相互独立**的效应。



$T > T_c$
正常相



$T < T_c$
超导相

二、超导体的电磁性质方程

1 伦敦第一方程　　解释超导电性

超导现象的二流体唯象理论: 超导体中，传导电子可以分成两类：超导电子(密度为n_s)和正常电子(密度为n_n)则超导体内的传导电子密度

$$n = n_s + n_n$$

超导电子是结成库珀对的电子(L. N. Cooper,1957)

- 库珀电子对具有相反的动量，总动量为零
- 库珀对形成必须借助于晶格振动(声子),形成引力而关联
- 所有库珀对凝聚于相同的量子态，库珀对的能量比自由态要低

超导体内 $n = n_s + n_n$ $\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_n$

$$\vec{J}_n = \sigma\vec{E}$$

$$m_e \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$$

$$\vec{J}_s = -n_s e\vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = -n_s e \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{n_s e^2}{m_e}\vec{E} = \alpha\vec{E}, \quad \left(\alpha = \frac{n_s e^2}{m_e}\right)$$

伦敦第一方程
(超导体的欧姆定律)

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \alpha\vec{E}$$

稳态情况: $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \vec{J}_n = 0 \quad \vec{J}_s = \vec{J}_0$

✓ 无电场时仍可以存在电流----超导电流

✓ 超导电流完全来源于超导电子的贡献

2 伦敦第二方程　解释超导体的磁性

当超导体外部有磁场时,迈斯纳效应指出超导体内部B=0

$$H_{2t} = H_{1t}$$

磁场不可能在超导体内侧紧贴表面处变为零,它必存在于超导体表面一薄层内。

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

除了麦氏方程外,在超导体内还有另一个磁场与电流互相制约的关系

伦敦第二方程　$$\nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}$$

若超导体中的电流产生的磁场总是抵消外加磁场，则可以解释迈斯纳效应.

超导体电磁性质方程

描述超导体现象的超导体电磁性质方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \alpha \vec{E} \\ \nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B} \end{cases} \qquad \left(\alpha = \frac{n_s e^2}{m_e} \right) \qquad \begin{aligned} \vec{J}_n &= \sigma \vec{E} \\ \vec{J} &= \vec{J}_n + \vec{J}_s \end{aligned}$$

两个方程的系数应该一致，因为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{J}_s) = -\alpha_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \alpha_1 \nabla \times \vec{E} \;\Rightarrow\; \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} - \alpha_1 \vec{E} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \alpha_1 \vec{E} + \nabla \psi$$

ψ为任意标量场

欲与第一方程自洽，应该取： $\alpha_1 = \alpha$， $\nabla \psi = 0$

3 迈斯纳效应的解释

对恒定电流, $J = J_s$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \mu \vec{J}_s$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu \nabla \times \vec{J}_s$$

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}$$

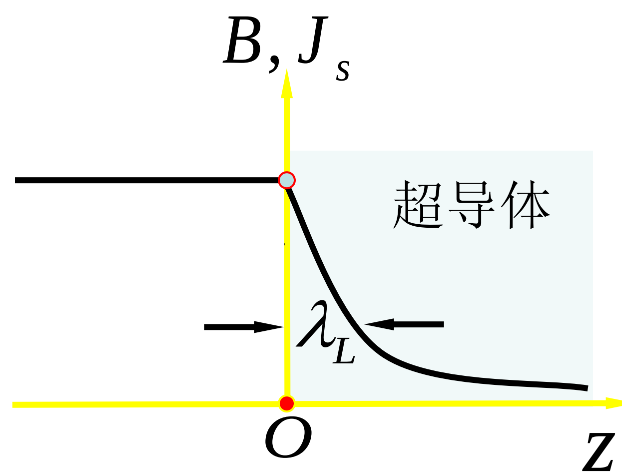
$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \qquad \left(\lambda_L = \frac{1}{\sqrt{\mu\alpha}}\right)$$

如果假定超导体占满$z>0$的上半空间，并设B沿x轴方向，$B_x=B(z)$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{\lambda_L^2}B, \qquad \Rightarrow B(z)=B(0)e^{-z/\lambda_L}$$

λ_L——穿透深度

$$\nabla^2\vec{J}_s=\frac{1}{\lambda_L^2}\vec{J}_s$$



超导体内部磁场指数衰减，若穿透深度很小，即可以解释迈斯纳效应。

例题 求超导体的面电流密度α_s与边界上的磁感应强度B的关系。

解：因为超导体内的电流只存在于表面薄层内，我们可以用面电流密度α_s来描述它. 设超导球占据$z>0$的上半空间. 有

$$\vec{\alpha}_s=\int_0^\infty \vec{J}_s(z)\mathrm{d}z=\int_0^\infty \vec{J}_s(0)e^{-z/\lambda_L}\mathrm{d}z=\lambda_L\vec{J}_s(0)$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{\alpha}_s$$

其中H_2为边界上真空一侧的磁场强度, H_1为超导体一侧在面电流流过的区域以内的磁场强度. 由迈斯纳效应, $H_1=B_1/\mu=0$. 由$H_2=B/\mu_0$, 得

$$\vec{n}\times\vec{B}=\mu_0\vec{\alpha}_s$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

磁场的法向分量边值关系为$B_{2n}=B_{1n}=0$, 表示在边界上B与界面相切。

超导体是完全抗磁体

可以将超导电流视为磁化电流,超导体视为磁介质

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \qquad \Rightarrow \vec{M} = -\vec{H}$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_0 (1 + \chi_M) = 0 \qquad 或 \qquad \chi_M = -1$$

超导体是完全抗磁体，超导电流源于外加磁场

两种描述方式：

（1）超导电流为自由电流，磁导率 $\mu = \mu_0$

（2）超导电流为磁化电流，磁导率 $\mu = 0$

例题 超导球体置于均匀外磁场H_0中，求磁场和超导面电流分布。

解：第二种观点：没有自由电流, 在超导体外和超导体内, 都可以用磁标势来描述磁场。磁标势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_1 = 0\,,\quad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

其中φ_1和φ_2分别代表球外和球内的磁标势. 采用球坐标系，取极轴沿外场方向, 原点在球心上。均匀外磁场H_0的磁标势为

$$\varphi_0 = -\vec{H}_0\cdot\vec{x} = -H_0 R\cos\theta$$

$$\varphi_1 = -H_0 R\cos\theta + \frac{b}{R^2}\cos\theta\,,$$

$$\varphi_2 = \alpha R\cos\theta$$

边值关系式在球面$R=R_0$上,

$$H_{1t}=H_{2t}\qquad B_{1n}=B_{2n}=0$$

用磁标势表出边值关系为

$$\varphi_1=\varphi_2\,,\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=0\;.\quad (R=R_0)$$

$$-H_0R_0+\frac{b}{R_0^2}=aR_0\qquad -H_0-\frac{2b}{R_0^3}=0$$

$$a=-\frac{3H_0}{2}\,,\qquad b=-\frac{H_0R_0^3}{2}$$

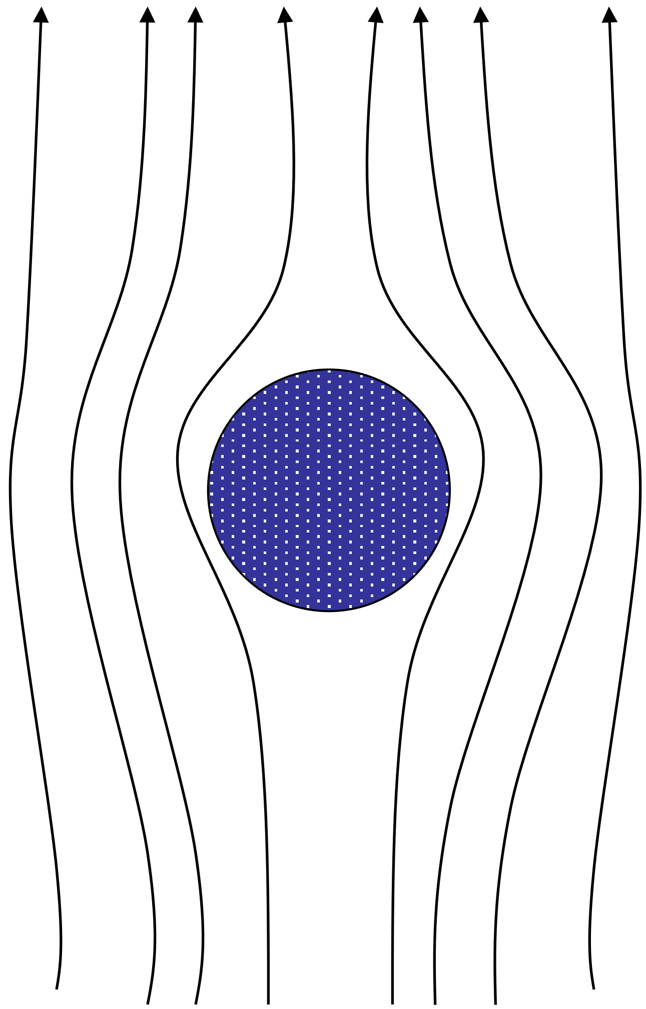
$$\varphi_1=-H_0R\cos\theta-\frac{H_0R_0^3}{2R^2}\cos\theta\,,\qquad \varphi_2=-\frac{3H_0}{2}R\cos\theta$$

球内磁场强度为 $\vec{H}_2 = \frac{3}{2}\vec{H}_0$ ，因球内 $\vec{B}_2 = \mu_0\left(\vec{M} + \vec{H}_2\right) = 0$ ，因磁化强度为 $\sigma \to \infty \vec{M} = -\vec{H}_2 = -\frac{3}{2}\vec{H}_0$ 。上式第一式表示球外磁场等于外磁场 $\vec{H}_0$ 加上一个磁矩 $\vec{m} = -\frac{4\pi R_0^3}{3} \cdot \frac{3}{2}\vec{H}_0 = \vec{M}V$ 产生的磁场 (V为球体积)。

球面上的超导电流线密度由 $\vec{n} \times \vec{M} = -\vec{\alpha}_s$ 给出

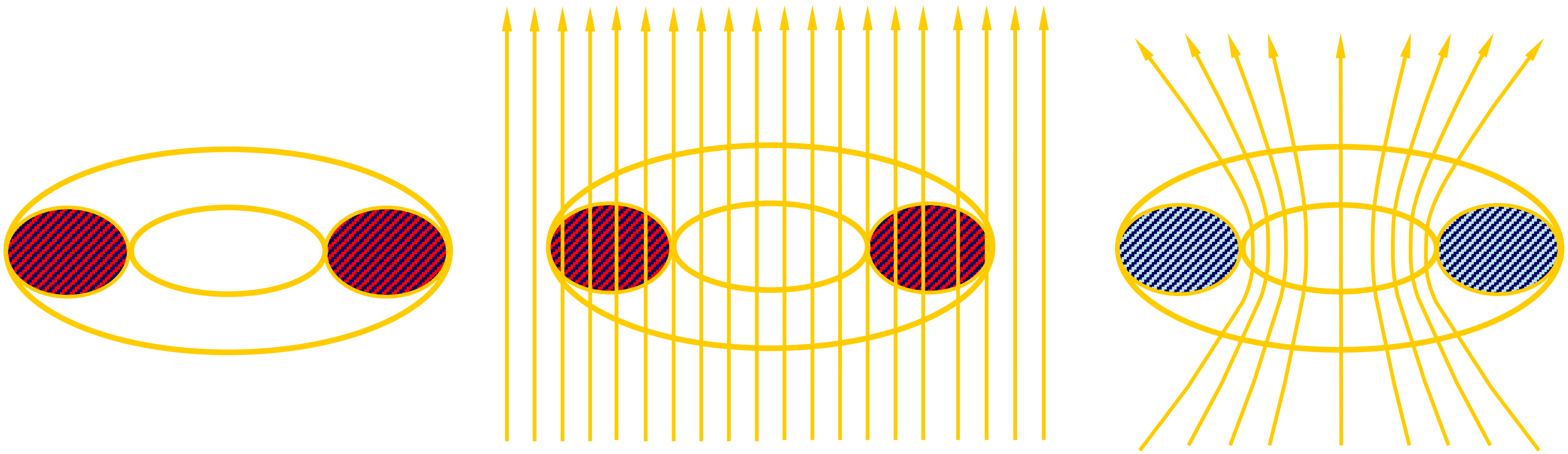
$$\alpha_s = -\vec{n} \times \vec{M} = \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{e}_r \times \frac{3}{2}\vec{H}_0 = -\frac{3}{2}H_0 \sin\theta e_\phi$$

磁感应强度*B*如图所示



超导磁体

超导体环可以构成磁体



正常相 $T > T_c$　　加外磁场 $T > T_c$　　超导磁体 $T < T_c$

超导体应用：

屏蔽磁场、压缩磁通、磁悬浮、储能 ……

4 非局域理论 第一类和第二类超导体

伦敦方程是局域方程，一点上的超导电流只和该点邻域上的电磁场直接发生作用。但是超导电子是以电子对为单元凝聚于一个量子态中，不同点上的电子互相有着强的关联，导致电磁场与某一线度ξ范围内的超导电流发生相互作用。皮帕首先提出了相干长度ξ的概念，并对伦敦理论作了非局域的修正。

根据非局域理论，超导体内存在两个特征线变：伦敦穿透深度λ_L和相干长度ξ。这两个长度的相对大小决定着超导体的性质。

(i) 第一类超导体($\lambda_L << \xi$). 这类超导体伦敦方程不成立，仍表现出迈斯纳效应。当磁场$H > H_c$时，超导态变为正常态。

(ii) 第二类超导体($\lambda_L >> \xi$)。在弱磁场中，伦敦方程成立，超导体表现迈斯纳效应，在其内部$B = 0$。当磁场增强至超过第一临界磁场H_{C1}时，磁场开始以量子化磁通线形式进入超导体内。在磁通线内为正常态，磁通线之间仍为超导态。由于超导区域是连通的，物体仍保持超导电性。当磁场再增强至超过第二临界磁场H_{C2}时，磁场布满物体内部，整个物体转变为正常态。这类超导体有较高的临界磁场H_{C2}，能通过较强的超导电流，因而有重要的实际应用。