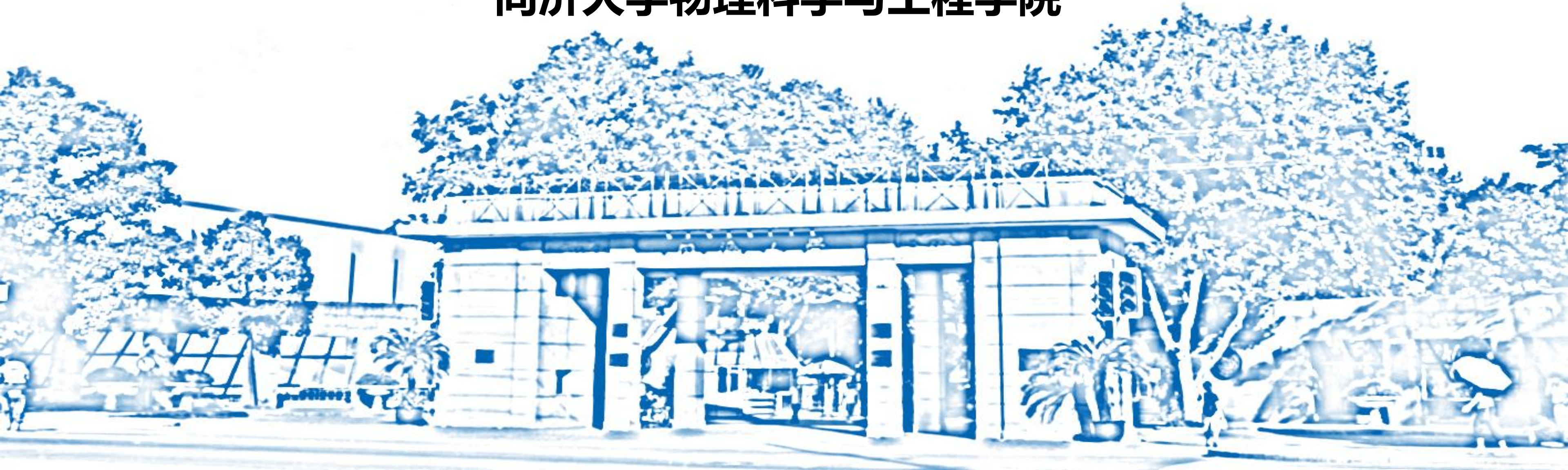
电动力学

Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



第三章 静磁场

§1 矢势及其微分方程

§2 磁标势

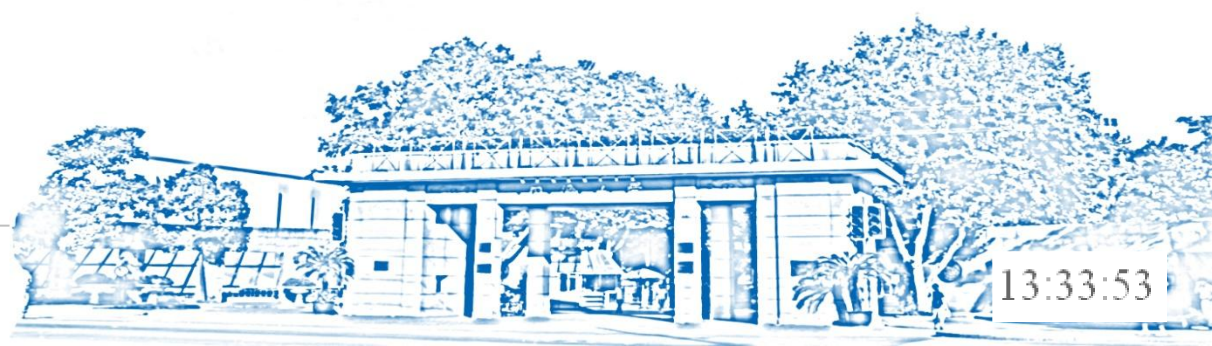
§3 磁多极矩

§4 阿哈罗诺夫—玻姆效应

§5 超导体的电磁性质

第三章 静磁场

§1 矢势及其微分方程
§2 磁标势
§3 磁多极矩
§4 阿哈罗诺夫—玻姆效应
§5 超导体的电磁性质



§3 磁多极矩

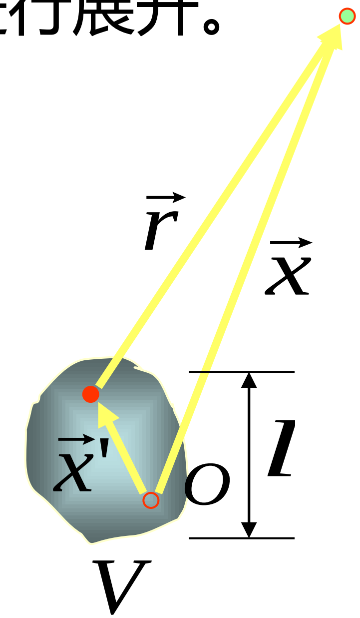
内 容 概 要

1. 矢势的磁多极矩展开
2. 磁偶极矩的场和磁标势
3. 小区域分布电流在外磁场中的相互作用

一、 矢势的多极展开

若电流分布在有限的空间，空间的线度为l,则该电流分布对空间较远处r产生的场，可以按小参量l/r进行展开。

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}\,')\mathrm{d}V'}{r}$$



记：$r=|\vec{x}-\vec{x}\,'|\quad R=|\vec{x}|\quad r'=|\vec{x}\,'|$

$|\vec{x}\,'|<<|\vec{x}|$ 将r在$\vec{x}\,'=0$处展开

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{R}\right)+\cdots$$

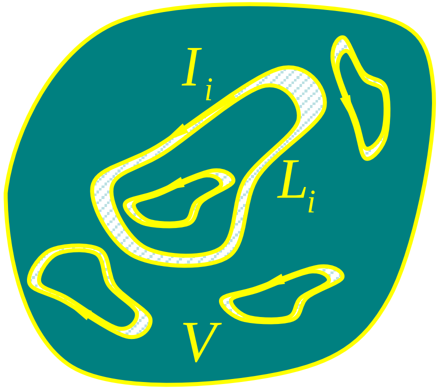
$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\left[\frac{1}{R}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right]\mathrm{d}V'$$

$$=\vec{A}^{(0)}(\vec{x})+\vec{A}^{(1)}(\vec{x})+\vec{A}^{(2)}(\vec{x})+\cdots$$

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{R}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=0$$

将V区域内的电流分成电流环的叠加

$$\int\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=\oint I\mathrm{d}\vec{l}=I\oint\mathrm{d}\vec{l}=0$$



无磁单极子!

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

对一个闭合线圈计算上式。若线圈电流为*I*, 有

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}\vec{l}\,' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint (\vec{x}'\cdot\frac{\vec{R}}{R^3})\mathrm{d}\vec{l}\,'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{l}\,'$$

$$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{l}\,' = \mathrm{d}\vec{x}\,'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}\,'$$

$$0=\oint_L \mathrm{d}[(\vec{x}'\cdot\vec{R})\vec{x}']=\oint_L (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}'+\oint_L (\mathrm{d}\vec{x}'\cdot\vec{R})\vec{x}'$$

$$\Rightarrow \oint_L (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}'=-\oint_L (\mathrm{d}\vec{x}'\cdot\vec{R})\vec{x}'$$

$$\oint_L (\vec{x}'\times\mathrm{d}\vec{x}')\times\vec{R}=\oint_L (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}'-\oint_L (\mathrm{d}\vec{x}'\cdot\vec{R})\vec{x}'$$

$$\Rightarrow \oint_L (\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}'=\frac{1}{2}\oint_L (\vec{x}'\times\mathrm{d}\vec{x}')\times\vec{R}$$

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x})=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint(\vec{x}'\cdot\vec{R})\mathrm{d}\vec{x}' =\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I}{2}\oint \vec{x}'\times\mathrm{d}\vec{l}\,'\right)\times\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}\times\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{l}\,'=\mathrm{d}\vec{x}'$$

电流线圈的磁矩
(**磁偶极矩**)

$$\vec{m}=\frac{I}{2}\oint \vec{x}'\times \mathrm{d}\vec{l}'$$

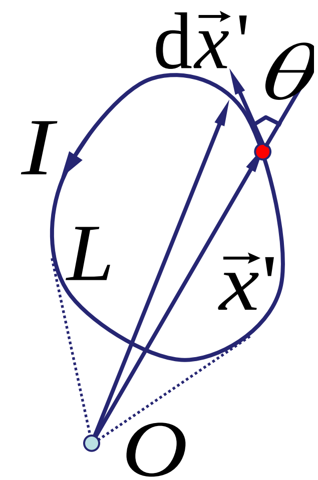
对体电流分布

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int \vec{x}'\times J(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

对于一个小线圈,设它所围的面元为ΔS,有

$$\Delta\vec{S}=\frac{1}{2}\oint \vec{x}'\times \mathrm{d}\vec{l}'$$

$$\vec{m}=I\Delta\vec{S}$$



电流环之磁偶极矩

平面电流环

$$\vec{m}=\frac{I}{2}\oint \vec{x}'\times \mathrm{d}\vec{l}'=I\Delta\vec{S}$$

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}x\sin\theta\mathrm{d}x$$

二、磁偶极矩的场和磁标势

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)} + \cdots\right]$$

$$= \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)} + \cdots$$

$$\vec{B}^{(0)} = \nabla \times \vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}\right)\vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}\right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{R}$$

$$= -\nabla^2 \frac{1}{R} = 0, \quad (R \neq 0)$$

$$\vec{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = -\mu_0\nabla\varphi_m^{(1)}$$

$$\nabla\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = \vec{m}\times\underbrace{\left(\nabla\times\frac{\vec{R}}{R^3}\right)}_{=0} + (\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3} = (\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{(1)} = -\nabla\varphi_m^{(1)}$$

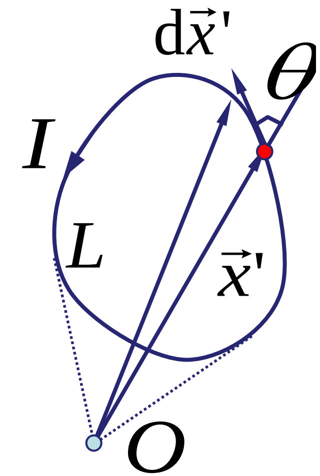
磁偶极子磁标势 $\varphi_m^{(1)} = \frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$

$$\varphi_m^{(1)} \propto R^{-2} \qquad B^{(1)} \propto R^{-3}$$

电流环之磁偶极矩

平面电流环

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{x}'\times \mathrm{d}\vec{l}\,' = I\Delta\vec{S}$$



$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}x\sin\theta\mathrm{d}x$$

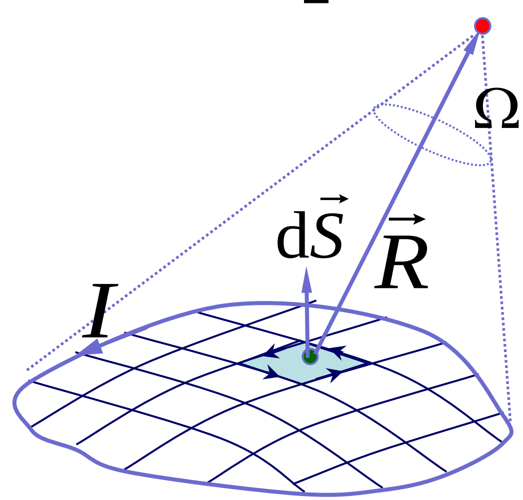
电流环在远处产生的场可以用偶极子近似：

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0\nabla\varphi_m^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

电流环在近处产生的场：

$$\varphi_m = \int_S \frac{I\vec{R}}{4\pi R^3}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{I}{4\pi}\Omega$$

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0\nabla\varphi_m^{(1)} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega$$



三、小区域内电流分布在外磁场中的能量

电流分布J在外磁场(电流分布J_e,矢势A_e)中的相互作用能量为

$$W_{\text{interaction}} = \int \vec{A}\cdot\vec{J}_e \mathrm{d}V = \int \vec{A}_e \cdot \vec{J}\mathrm{d}V$$

载电流I的线圈(电流环)在外磁场中

$$W_{\text{interaction}} = I\oint_L \vec{A}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I\int_S \vec{B}_e \cdot \mathrm{d}\vec{S} = I\Phi_e$$

取坐标原点在线圈内，如线圈小，则可展开外磁场

$$\vec{B}_e(\vec{x}) = \vec{B}_e(0) + \vec{x}\cdot\nabla\vec{B}_e(0) + \cdots$$

小区域电流分布与外场中的相互作用能量：

$$W_{\text{interaction}} \approx I\vec{B}_e(0)\cdot\int_S \mathrm{d}\vec{S} = \vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$$

其中m是电流线圈的磁偶极矩。

磁偶极矩在外场中可以引入势能

$$U = -W_{\text{interaction}} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)$$

磁偶极矩在外场中受力

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)\right) = \vec{m}\times\nabla\times\vec{B}_e(0) + \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e(0)$$

$$= \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_e(0)$$

$$\vec{L} = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\vec{m}\cdot\vec{B}_e(0)\right) = -mB_e(0)\sin\theta$$