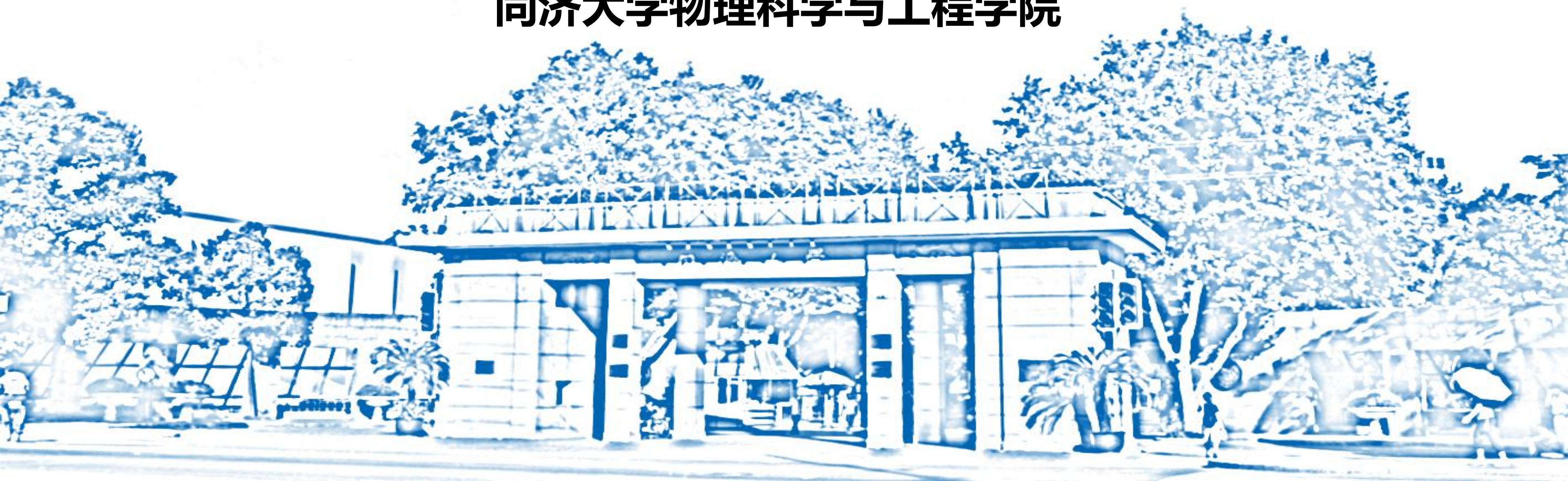
电动力学

Electrodynamics

谢双媛
同济大学物理科学与工程学院



第三章 静磁场

第三章 静磁场

§2 磁标势

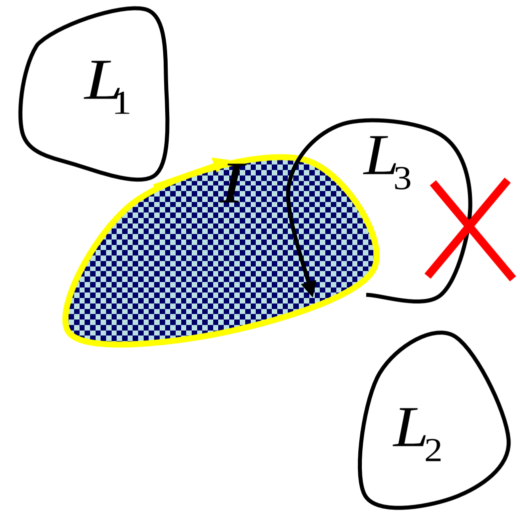
内 容 概 要

由于$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，所以任何情况下都可以用矢势A描述磁场，但解矢势的边值问题是比较复杂的。如果能引入磁标势的话，问题将变得简单。

磁标势引入的条件

（1）所考虑的空间区域没有传导电流

（2）空间应为单连通区域



对于J = 0 区域

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases} + \quad \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=f(\vec{H})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\nabla\times\vec{H}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nabla\times\vec{H}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu_0\end{cases}$$

与$\nabla\cdot P$ = -ρ_P对应，假想**磁荷密度** $\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=0 \\ \nabla\cdot\vec{H}=\rho_m/\mu_0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\nabla\times\vec{E}=0 \\ &\nabla\cdot\vec{E}=\left(\rho_f+\rho_p\right)/\varepsilon_0 \end{aligned}$$

对比差别：没有自由磁荷

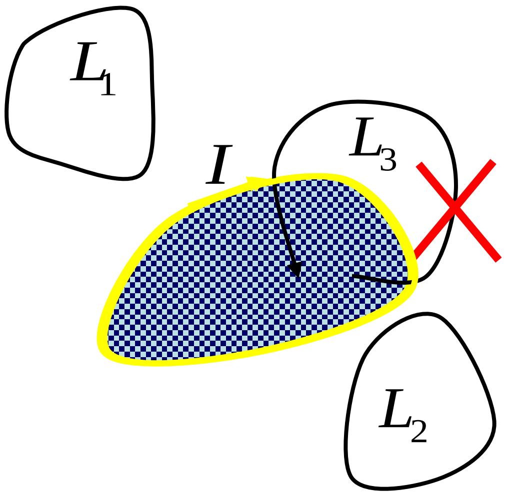
在$J=0$区域内,同时对区域内任何环路

$$\oint_L \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

引入磁标势：φ_m

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$



静磁场与静电场的对比

静磁场	静电场
$\nabla \times \vec{H} = 0,$	$\nabla \times \vec{E} = 0,$
$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m / \mu_0$	$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\rho_f + \rho_p\right) / \varepsilon_0$
$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$	$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$	$\vec{E} = -\nabla \varphi$
$\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m / \mu_0$	$\nabla^2 \varphi = -\left(\rho_f + \rho_p\right) / \varepsilon_0$

除无自由磁荷外，完全与静电场相同

显然可以把静电问题求解方法应用到磁场问题中去

$$\boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \begin{array}{c}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\sigma_f\end{array}}$$

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

边值关系

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \qquad \varphi_{m1}\big|_S=\varphi_{m2}\big|_S$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \qquad \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}\right|_S=\vec{n}\cdot(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$$

对于非铁磁质来说 $\vec{B}=\mu\vec{H}$

$$\mu_2\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\right|_S=\mu_1\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}\right|_S$$

静磁问题的唯一性定理：

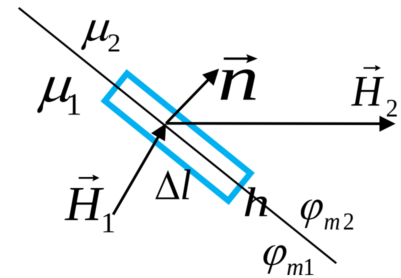
如果可均匀分区的区域V中没有传导电流分布，只要在边界S上给出下列条件之一，则V内磁场唯一地确定：

(i)磁标势之值$\varphi_m|_S$

(ii)磁场强度的法向分量 $H_n|_S = -\left.\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right|_S$

(iii)磁场强度的切向分量 $H_t|_S$

磁标势的边值关系：



$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=0 \Rightarrow (H_{2t}-H_{1t})\Delta l=0 \Rightarrow \varphi_{m1}=\varphi_{m2}$$

推导时已注意到：$\Delta l >> h$

又由 $\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\to B_{2n}=B_{1n}$ 得

$$\vec{n}\cdot\left[\mu_0\left(\vec{H}_2+\vec{M}_2\right)-\mu_0\left(\vec{H}_1+\vec{M}_1\right)\right]=0 \qquad \vec{n}\cdot\left(\vec{H}_2+\vec{M}_2\right)=\vec{n}\cdot\left(\vec{H}_1+\vec{M}_1\right)$$

$$\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\vec{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)=\frac{\sigma_m}{\mu_0} \qquad \sigma_m=\mu_0\vec{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$$ 为磁荷面密度

对于线性介质：$\vec{B}=\mu\vec{H}$ $\qquad \vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\to\vec{n}\cdot\left(\mu_2\vec{H}_2-\mu_1\vec{H}_1\right)=0$

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial n}$$

注意该式与 $\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\vec{n}\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$ 的异同。

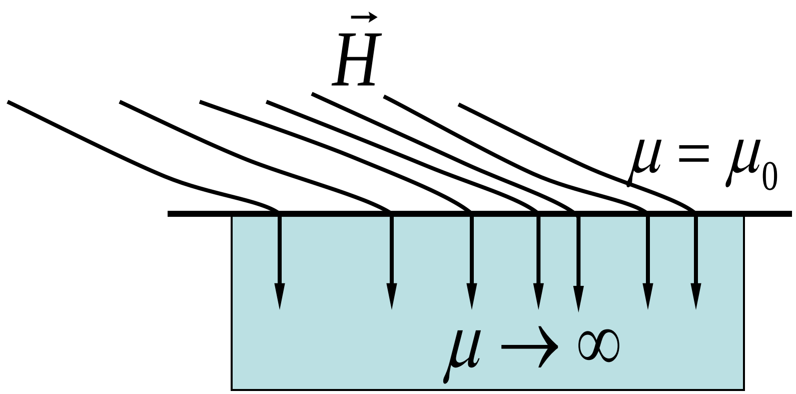
例题 证明$\mu\to\infty$的磁性物质表面为等磁势面。

解： 以角标1代表磁性物质，2代表真空，由磁场边界条件

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0,$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0$$

$$\vec{B}_1=\mu_1\vec{H}_1\qquad \vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2$$



$$\mu_0 H_{2n}=\mu H_{1n}\qquad H_{2t}=H_{1t}$$

式中n和t分别表示法向和切向分量。两式相除得

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}}=\frac{\mu_0 H_{1t}}{\mu H_{1n}}\to 0$$

在该磁性物质外面，H_2与表面垂直——表面为等磁势面。

软磁物质内部磁场垂直于界面，表面是等势的

例题 求磁化矢量为M_0的均匀磁化铁球产生的磁场。

解： 铁球内和铁球外为两均匀区域. 在铁球外没有磁荷. 在铁球内由于均匀磁化，$M=M_0$,

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0$$

磁荷只分布在铁球表面上。球外磁势φ_1和球内磁势φ_2都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

球外磁势必随距离增大而减小，展开式只含R负幂次项

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

球内磁势当$R=0$时有限, 故只含R正幂次项

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta)$$

铁球表面边界条件为当 $R=R_0$(R_0为铁球半径)时

$$B_{1R}=B_{2R}$$

$$H_{1\theta}=H_{2\theta}\quad(\text{或}\ \varphi_1=\varphi_2)$$

设球外为真空,

$$B_{1R}=\mu_0 H_{1R}=-\mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}=\mu_0\sum_n\frac{(n+1)b_n}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)$$

$$B_{2R}=\mu_0 H_{2R}+\mu_0 M_R=-\mu_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}+\mu_0 M_0\cos\theta$$

$$=-\mu_0\sum_n na_n R^{n-1}P_n(\cos\theta)+\mu_0 M_0\cos\theta$$

$$\sum_n\frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}}P_n(\cos\theta)=-\sum_n na_n R_0^{n-1}P_n(\cos\theta)+M_0 P_1(\cos\theta)$$

$$\sum\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum a_n R_0^n P_n(\cos\theta)$$

比较P_n的系数, 得

$$a_1 = \frac{1}{3} M_0\,, \quad b_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3$$

$$a_n = b_n = 0, \quad n \neq 1$$

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3} \frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 R \cos\theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}$$

铁球外的磁场是磁偶极子产生的场, 磁矩为

$$\vec{m} = \frac{4\pi R_0^3}{3} \vec{M} = \vec{M} V$$

球外磁场是

$$H_1 = -\nabla\varphi_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)\frac{M_0 R_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{R^2}$$

$$= \frac{2M_0 R_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{R^3}\vec{e}_R + \frac{M_0 R_0^3}{3}\frac{\sin\theta}{R^3}\vec{e}_\theta$$

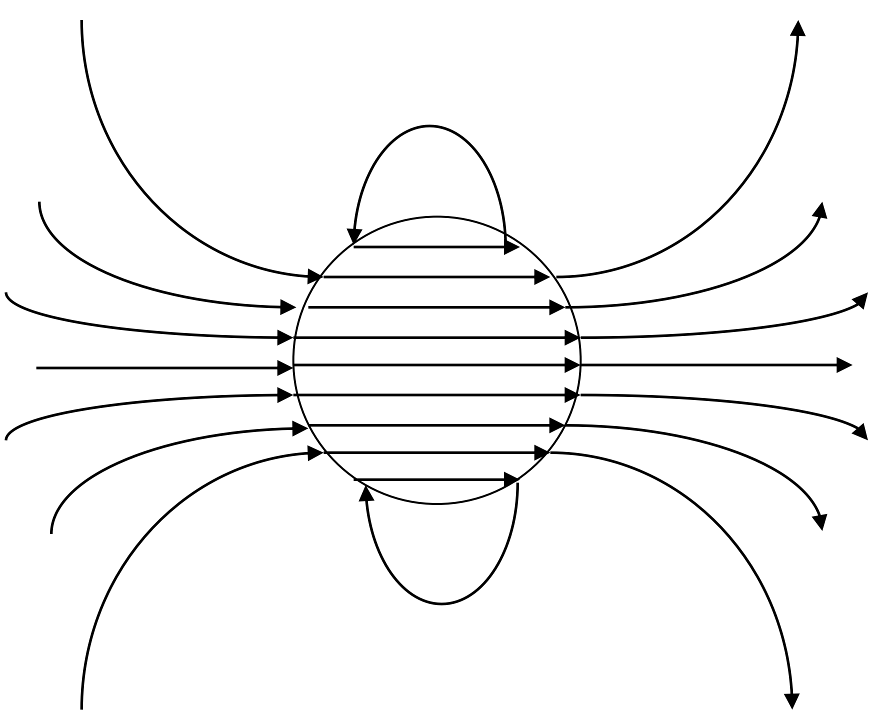
$$= \frac{2m}{4\pi}\frac{\cos\theta}{R^3}\vec{e}_R + \frac{m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R^3}\vec{e}_\theta$$

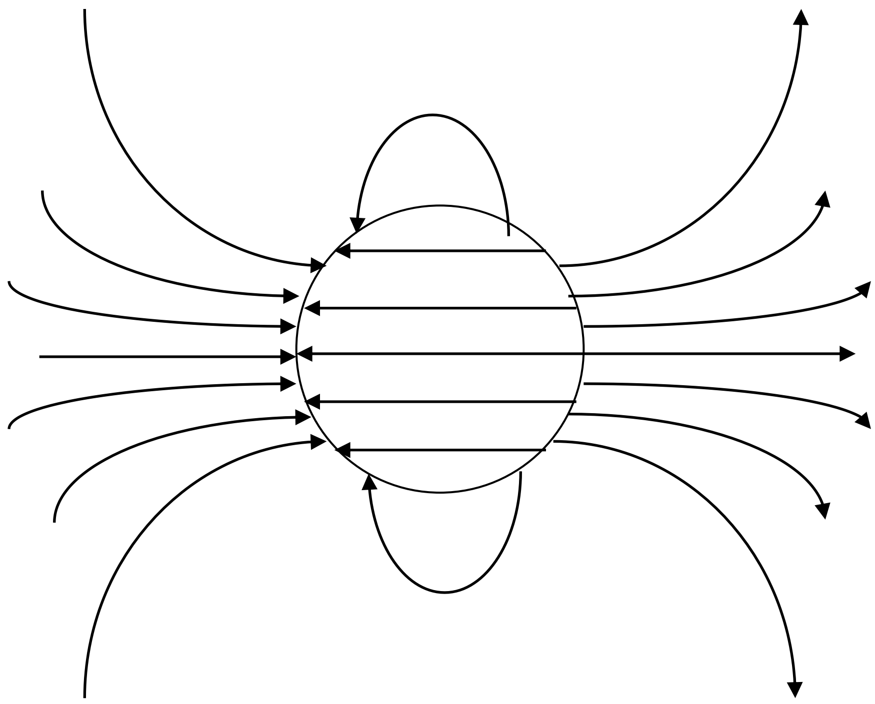
球内磁场是

$$\vec{H} = -\nabla\varphi_2 = -\frac{1}{3}M_0(\cos\theta\vec{e}_R - \sin\theta\vec{e}_\theta) = -\frac{1}{3}\vec{M}_0$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}_0\right) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$$

铁球内外的B和H如图





例题 求电流线圈的磁标势。

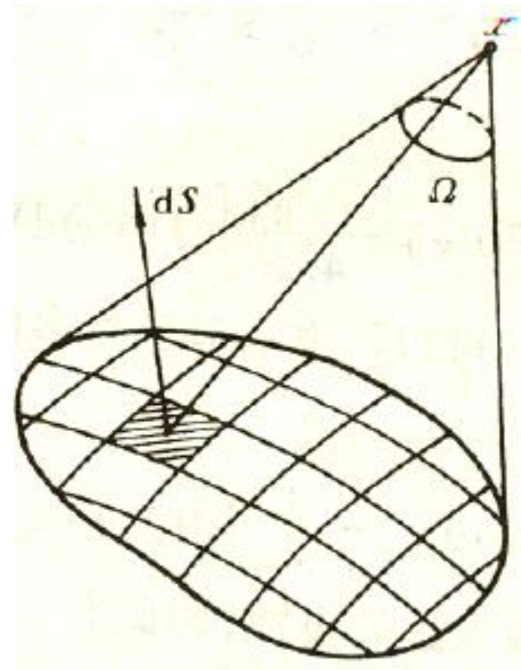
解： 设电流线圈载有电流 I，它可以看作线圈所围的一个曲面上许多载电流 I 的小线圈组合而成。设位于x点上的小线圈的面元为$\mathrm{d}S'$，它的磁矩为

$$\mathrm{d}\vec{m} = I\mathrm{d}\vec{S}'$$

磁偶极子的磁标势为

$$\mathrm{d}\varphi_m = \frac{\mathrm{d}\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'}{r^3}$$

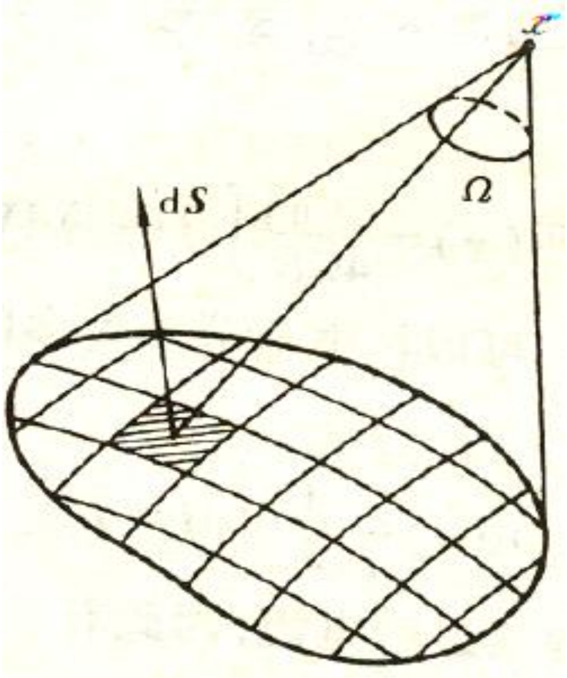
$$= \frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega$$



其中dΩ为面元dS' 对场点x张开的立体角。
整个电流线圈产生的磁标势为

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\Omega$$

Ω为线圈对场点x所长开的立体角



如图，若x点在线圈所围曲面的上方时，则$\Omega > 0$ ；若x点在曲面下方，则$\Omega < 0$ 。当x点跨越曲面时, Ω有不连续值$\Delta\Omega = 4\pi$，因此，用磁标势法描述电流的磁场时，必须除去线圈所围的一个曲面。