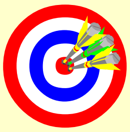
第七章 非线性方程的数值解法

/*Chapter7 Numerical Methods for Nonlinear Equations*/

1. 二分法



求 $f(x)=0$ 的根

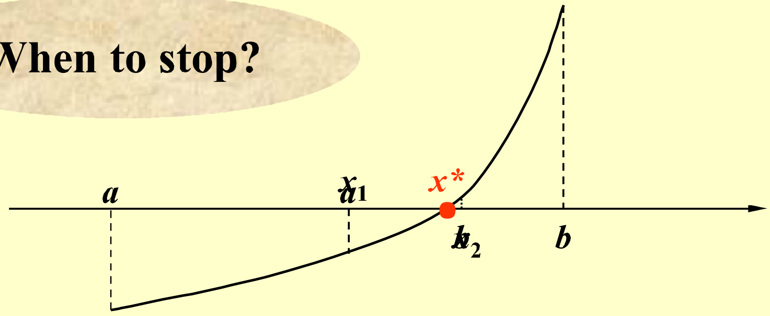
原理：若 $f \in C[a, b]$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，

则 f 在 (a, b) 上必有一根。

$$x_0=\frac{a+b}{2}$$

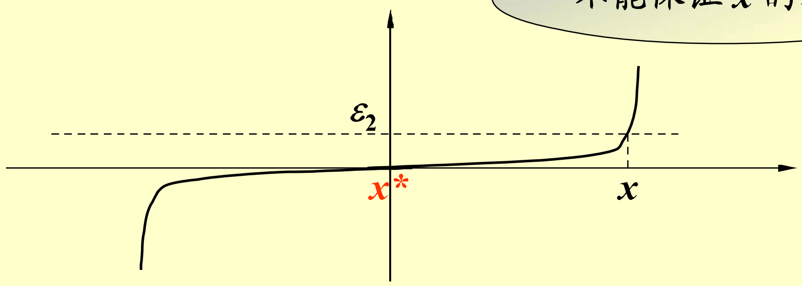
$$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$$

When to stop?



$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1 \quad 或 \quad |f(x)|<\varepsilon_2$$

不能保证 x 的精度



分析: 二分初始时刻 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ 有误差 $|x_1 - x^*| \le \dfrac{b-a}{2}$

二分 k 次产生的 x_k 有误差 $|x_k - x^*| \le \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$

对于给定的精度 ε,可估计二分法所需的步数 k:

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k > \frac{\left[\ln\left(b-a\right) - \ln 2\varepsilon\right]}{\ln 2}$$

① 简单;
② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可).

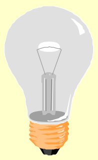
① 无法求复根及偶重根
② 收敛慢

注: 用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将 $[a, b]$ 分为若干小区间，对每一个满足 $f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$ 的区间调用二分法程序，可找出区间 $[a, b]$ 内的多个根，且不必要求 $f(a)\cdot f(b) < 0$ 。

2. 不动点迭代法 /* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \;\xleftrightarrow{\text{等价变换}}\; x=g(x)$$

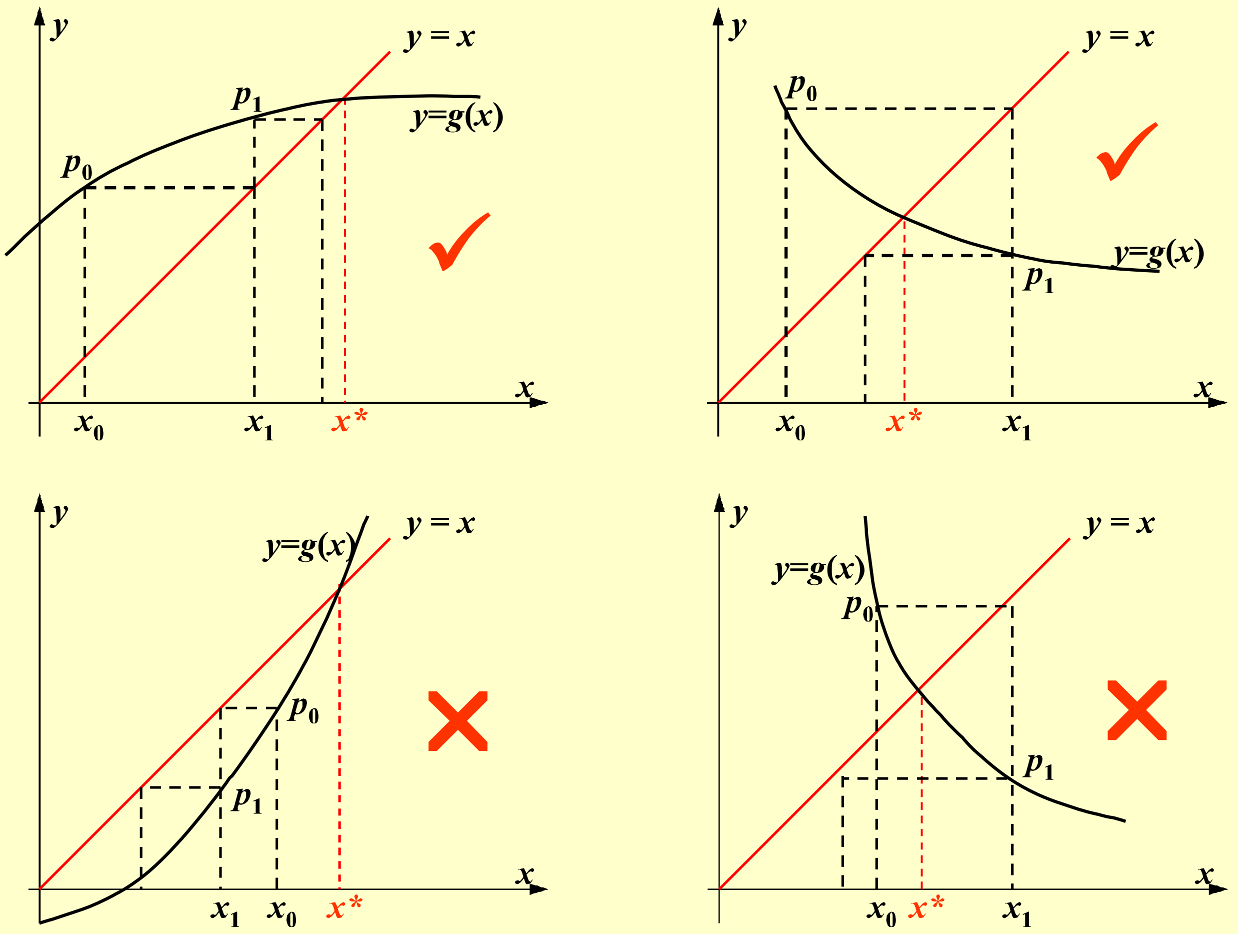
$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点



思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, …, $x_{k+1}=g(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$ 可知 $x^* = g(x^*)$，即 x^* 是 g 的不动点，也就是 f 的根。

Oh yeah? Who tells you that the method is **convergent**?


y
y = x
p0
p1
y=g(x)
x
x0
x1
x*
y
y = x
p0
y=g(x)
p1
x
x0
x*
x1
y
y = x
y=g(x)
p0
p1
x
x1
x0
x*
y
y = x
y=g(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1

定理 考虑方程 $x = g(x)$, $g(x) \in C[a, b]$, 若

(I) 当 $x \in [a, b]$ 时， $g(x) \in [a, b]$;

(II) $\exists\, 0 \le L < 1$ 使得 $|g'(x)| \le L < 1$ 对 $\forall\, x \in [a, b]$ 成立。

则任取 $x_0 \in [a, b]$，由 $x_{k+1} = g(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的唯一不动点。并且有误差估计式:

① $|x^* - x_k| \le \dfrac{1}{1-L} |x_{k+1} - x_k|$

($k = 1, 2, \ldots$)

② $|x^* - x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$

且存在极限 $\displaystyle \lim_{k \to \infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = g'(x^*)$

证明: ① $g(x)$ 在$[a, b]$上存在不动点?

令 $f(x) = g(x) - x \qquad \because \ a \le g(x) \le b$

$\therefore f(a) = g(a) - a \ge 0, \quad f(b) = g(b) - b \le 0$

$\Rightarrow f(x)$ 有根

② 不动点唯一?

反证: 若不然, 设还有 $\tilde{x} = g(\tilde{x})$, 则

$x^* - \tilde{x} = g(x^*) - g(\tilde{x}) = g'(\xi)(x^* - \tilde{x})$, ξ 在 x^* 和 $\tilde{x}$ 之间

$\Rightarrow \ (x^* - \tilde{x})(1 - g'(\xi)) = 0$ 而 $|g'(\xi)| < 1 \quad \therefore \ x^* = \tilde{x}$

③ 当$k \to \infty$ 时, x_k 收敛到 x^* ?

$$|x^* - x_k| = |g(x^*) - g(x_{k-1})| = |g'(\xi_{k-1})| \cdot |x^* - x_{k-1}|$$

$$\le L\,|x^* - x_{k-1}| \le \ldots\ldots \le L^k\,|x^* - x_0| \to 0$$

④ $|x^*-x_k| \le \dfrac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$?

$$|x_{k+1}-x_k| \ge |x^*-x_k| - |x^*-x_{k+1}| \ge |x^*-x_k| - L|x^*-x_k| \quad ✓$$

可用 $|x_{k+1}-x_k|$ 来控制收敛精度

⑤ $|x^*-x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$?

$$|x_{k+1}-x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})|$$

$$\le L|x \cdots | \quad ✓$$

L 越小收敛越快

⑥ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = g'(x^*)$?

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{g'(\xi_k)(x^*-x_k)}{x^*-x_k} = g'(x^*) \quad ✓$$

注：定理条件非必要条件，可将$[a, b]$缩小，定义局部收敛性：若在 x^* 的某δ领域 $B_\delta = \{x \mid |x - x^*| \le \delta\}$ 有 $g \in C^1[a, b]$ 且 $|g'(x^*)| < 1$，则由$\forall x_0 \in B_\delta$开始的迭代收敛。即调整初值可得到收敛的结果。

局部收敛性与迭代法的收敛阶

定义　设$\varphi(x)$有不动点x^*,如果存在x^*的某个邻域$R:|x-x^*|\le\delta$,对任意$x_0\in R$,若迭代法产生的序列收敛到x^*，则称迭代法是局部收敛的.

定理　设x^*为$\varphi(x)$的不动点，$\varphi'(x)$在x^*的某个邻域连续，且$|\varphi'(x)|<1$，则迭代法是局部收敛的.

定义 设迭代 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛到$g(x)$ 的不动点 x^*。

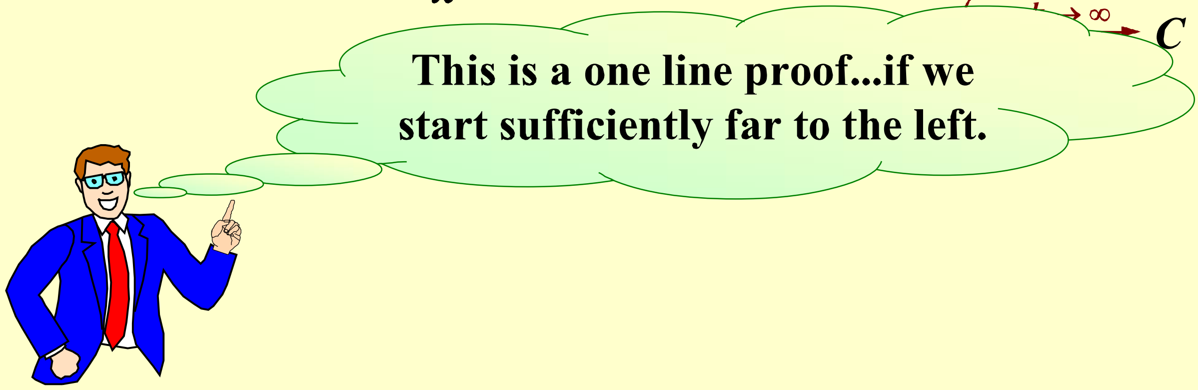
设 $e_k=x_k-x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C>0$，则称该迭代为$p$ 阶收敛。

- 一般 Fixed-Point Iteration 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=|g'(x^*)|\neq 0$，称为线性收敛 /* linear convergence */，这时 $p=1$，$0<C<1$。
- $p>1$，称为超线性收敛，
- $p=2$，称为平方收敛。

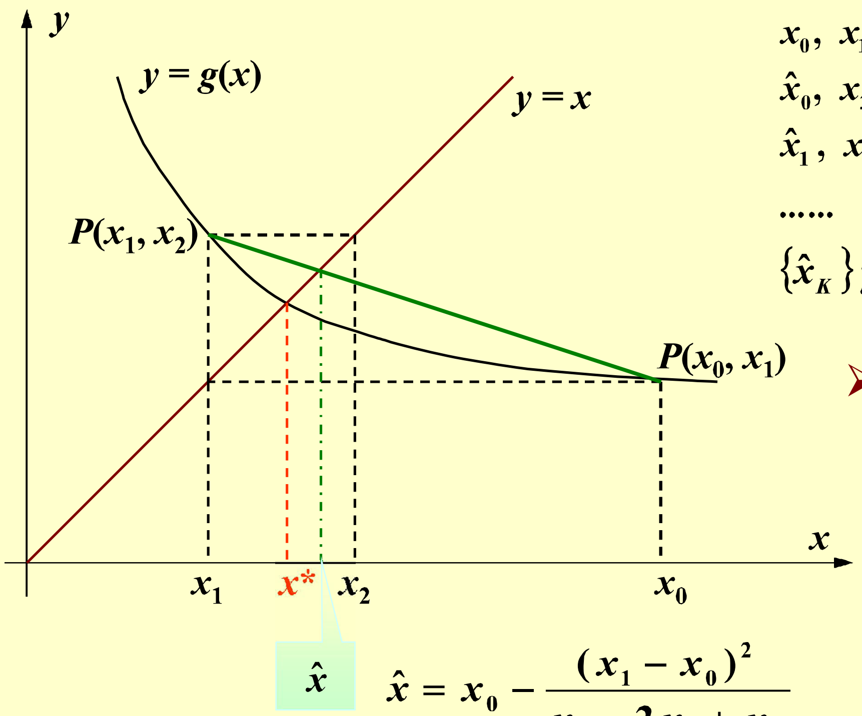
定理 设 x^* 为 $x=g(x)$ 的不动点，若 $g\in C^p(B_\delta(x^*))$ $p\geq 2$; $g'(x^*)=\ldots=g^{(p-1)}(x^*)=0$, 且 $g^{(p)}(x^*)\neq 0$, 则 $x_{k+1}=g(x_k)$ 在 $B_\delta(x^*)$ 内 p 阶收敛。

证明: $x_{k+1}=g(x_k)=\underset{\substack{\parallel\\ x^*}}{g(x^*)}+g'(x^*)(x_k-x^*)+\ldots+\frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p$

$\xrightarrow{k\to\infty} C$



- **Aitken 加速：**



$$\hat{x} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

一般地有：

$$\hat{x}_K = x_K - \frac{(x_{K+1} - x_K)^2}{x_K - 2x_{K+1} + x_{K+2}}$$

$x_0,\ x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),$

$\hat{x}_0,\ x_3 = g(x_2),$

$\hat{x}_1,\ x_4 = g(x_3),$

……

$\{\hat{x}_K\}$比$\{x_K\}$收敛得略快。

- **Steffensen 加速：**

$x_0,\ x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),$

$\hat{x}_0,\ \bar{x}_1 = g(\hat{x}_0),\ \bar{x}_2 = g(\bar{x}_1),$

$\hat{\hat{x}}_0,$ ……

§ 6.1.4 牛顿法 /* Newton - Raphson Method */

原理：将非线性方程线性化

—— Taylor 展开 /* Taylor's expansion */

取 $x_0 \approx x^*$，将 $f(x)$ 在 x_0 做一阶Taylor展开：

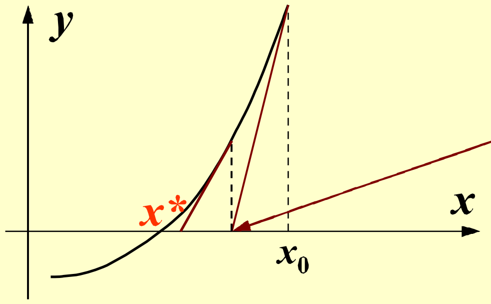
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$ ξ 在 x_0 和 x 之间。

将 $(x^* - x_0)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0 = f(x^*) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \quad \Rightarrow \quad x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

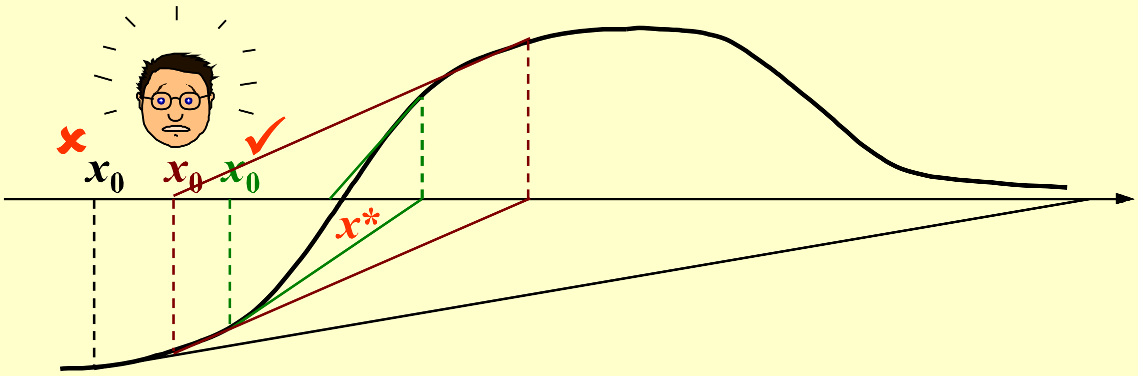
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

线性 /* linear */



只要 $f \in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k) \neq 0$，而且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$，则 x^*就是 f 的根。

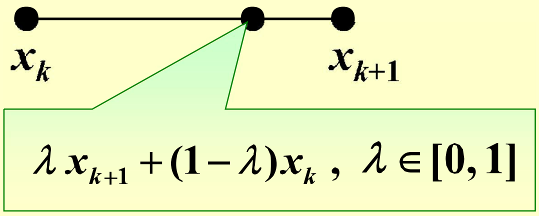
注：**Newton's Method** 收敛性依赖于 x_0 的选取。



➢ 下山法 /* Descent Method */

——Newton's Method 局部微调:

原理: 若由 x_k 得到的 x_{k+1} 不能使 $|f|$ 减小，则在 x_k 和 x_{k+1} 之间找一个更好的点 $\overline{x_{k+1}}$，使得 $\left|f(\overline{x_{k+1}})\right| < \left|f(x_k)\right|$。



$$\overline{x_{k+1}} = \lambda\left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] + (1-\lambda)x_k$$

$$= x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

注: $\lambda = 1$ 时就是Newton's Method 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算。