

透射边界条件在波动谱元模拟中的实现： 一维波动¹⁾

邢浩洁 李鸿晶²⁾

(南京工业大学土木工程学院, 南京 211816)

摘要 多次透射公式 (multi-transmitting formula, MTF) 是一种具有普适性的局部人工边界条件, 但其在近场波动数值模拟中一般与有限元法结合. 由于波动谱元模拟的数值格式与有限元格式有极大的不同, 传统的 MTF 在谱元离散格式中无法直接实现. 为了使物理概念清楚、精度可控的多次透射人工边界条件能够适应波动谱元模拟的需求, 首先指出多次透射边界与谱元离散格式结合的基本问题, 并分析了空间内插和时间内插两种方案的可行性. 然后从空间内插角度出发, 提出基于拉格朗日多项式插值模式的 MTF 谱元格式, 并采用一种简单内插方法实现高阶 MTF. 最后通过一维波动数值试验检验这些 MTF 谱元格式的精度, 并讨论其数值稳定性. 结果表明: 对于一、二阶 MTF, 几种格式的精度相当; 对于三、四阶 MTF, 基于谱单元位移模式插值的格式精度最高. 相反, 随着插值多项式阶次的升高, 不同 MTF 格式的的稳定临界值逐步降低, 但是所有格式均在人工波速大大超过物理波速时才可能发生失稳.

关键词 波动数值模拟, 谱元法, 多次透射边界, MTF, 数值稳定性, 数值精度

中图分类号: P315 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-282

IMPLEMENTATION OF MULTI-TRANSMITTING BOUNDARY CONDITION FOR WAVE MOTION SIMULATION BY SPECTRAL ELEMENT METHOD: ONE DIMENSION CASE¹⁾

Xing Haojie Li Hongjing²⁾

(College of Civil Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)

Abstract Multi-transmitting formula (MTF) is considered to be a universal local artificial boundary condition, which is generally employed in finite element simulation of near-field wave motion. Due to the great difference between spectral element method (SEM) and finite element method (FEM), the traditional numerical scheme of MTF cannot be simply adopted in SEM without any change. In order to make use of the advantages of MTF, i.e., clear physical mechanism and controllable accuracy, basic problems involved in the combination of MTF and SEM are discussed in this paper, then the feasibility of spatial or temporal interpolation schemes are investigated, respectively. From the view of spatial interpolation scheme, a set of numerical formulas of MTF based on Lagrange polynomial are proposed, where the higher-order MTF is implemented via a simple iteration process. The accuracy and stability of the above MTF schemes are examined by a standard 1-D spectral element model of wave motion. The numerical results show that all schemes have

2016-10-11 收稿, 2016-12-23 录用, 2016-12-27 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51278245) .

2) 李鸿晶, 教授, 主要研究方向: 地震工程学. E-mail: hjing@njtech.edu.cn

引用格式: 邢浩洁, 李鸿晶. 透射边界条件在波动谱元模拟中的实现: 一维波动. 力学学报, 2017, 49(2): 367-379

Xing Haojie, Li Hongjing. Implementation of multi-transmitting boundary condition for wave motion simulation by spectral element method: one dimension case. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 367-379

comparable accuracy for 1st- and 2nd-order MTF, and the MTF scheme based on spectral element displacement mode is superior to others for 3rd- or 4th-order MTF. On the contrary, the stability threshold descends with the growth of interpolation polynomials' order of different MTF schemes, but instabilities only occur under the unusual condition that artificial wave speed is far beyond the physical wave speed.

Key words numerical simulation of wave motion, spectral element method, multi-transmitting boundary, MTF, numerical stability, numerical accuracy

引 言

近场波动数值模拟需要从实际的无限介质中截取有限模型进行分析. 为保证波动模拟的有效性, 通常假定所有波源或散射体、不规则和不均匀区域都被包括在有限模型内, 而仅用模型边界上的人工边界条件来模拟外部无限介质对计算区域的影响. 因此, 它需要处理两个重要问题: 一是计算区域内的波场分布和介质几何、物理参数的空间离散; 二是模型边界上的人工边界条件^[1-2]. 针对具体问题采用适当的空间离散方法和人工边界条件. 在保证计算精度和数值稳定性的前提下, 最大程度地提高计算效率, 是近场波动数值模拟技术追求的目标.

在空间离散方法中, 有限差分法^[3]和有限元法^[4-5]是近场波动数值模拟中使用最广泛的两种. 但由于数值稳定性方面的限制, 它们均采用了低阶格式的数值方案, 数值精度和计算效率都不是很高. 谱方法 (spectral method)^[6]具有无穷阶收敛性的优点, 结合有限单元概念发展起来的谱元法 (spectral element method, SEM)^[7], 既保持了谱方法的指数收敛率, 又体现了有限元法的灵活性. 它不仅能够以较少的节点模拟复杂波场和不规则几何形状, 还可以有效地处理不均匀介质, 并能够有效地实现并行计算, 为求解大型波动问题提供了强有力的支持^[8-9]. 近年来, 应用谱元法实现波动数值模拟开始受到国内外学者的重视, 在地震波传播问题研究方面取得了一些进展^[10-23]. 在上述波动谱元模拟研究中, 人工边界条件一般采用黏性边界^[24]、CE 边界^[11,13,25]或完美匹配层边界 (perfectly matched layer, PML)^[26-30], 而多次透射边界作为一种具有普适性的人工边界却并未引起重视. 由多次透射公式 (multi-transmitting formula, MTF) 定义的透射边界条件^[31-32]是一种直接以离散形式给出的人工边界, 它通过模拟各种单向波动的共同运动学特征建立边界条件, 具有公式简单、施加方便、复杂波场模拟精度高等优点, 且其高阶形式易于与内域离散格式相结合. 但目前

MTF 一般只能与内域的有限元格式相结合完成近场波动的数值模拟, 而谱元法的单元模型数值格式与有限元法完全不同, 在谱元格式中不能直接套用同有限元法相结合的 MTF 格式, 因而需要按照谱元格式的要求专门研究与其相适应的 MTF 的具体格式.

实际上, 透射边界条件所具有的精度可控、易于实施以及善于处理复杂波场的优点, 与谱元法的理念是高度切合的, 因此, 在波动谱元模拟中引入透射边界条件, 可能是提高近场波动数值模拟精度和计算效率的一条值得重视的途径. 本工作旨在解决透射边界条件与谱元离散格式结合的关键问题, 即提出一种适用的 MTF 谱元格式, 确保其能够在离散意义上稳定地实现多次透射以达到提高精度的效果. MTF 与谱元离散格式结合的方式, 是将 MTF 公式中涉及到的计算点位移用邻近的谱元离散点位移进行插值表示的过程. 最直接的考虑是将目前广泛使用的 MTF 有限差分或有限元格式推广到谱元法中, 例如文献 [33] 所做的工作. 这一推广包括两个部分, 一是将实现一阶 MTF 的三点抛物线内插公式由等距节点推广到不等距节点; 二是将原来实现高阶 MTF 的齐次内插递推方案, 替换为一种简单内插方案. 研究表明, 这种基于谱元不等距节点进行三点抛物线内插的 MTF 谱元格式, 在通常情况下不失为一种可供选择的方案, 但是对于较为复杂的波动情形, 其模拟效果往往并不理想. 本文将从透射边界条件的数学本质和谱元离散格式的特定形式出发, 系统探讨 MTF 与谱元离散格式结合的相关问题, 包括空间内插方案与时间内插方案的含义、特点及适用性, MTF 插值多项式阶次的选取, 高阶 MTF 的实现方案等. 通过数值试验和理论分析总结高精度方案应当具有的特点, 在几种不同的数值方案中, 推荐一种能够较好地适应复杂波动情形的 MTF 谱元格式, 并分析该格式在一维波动问题谱元求解时的精度和稳定性.

1 基本问题

本文以一维波动问题为例，探讨在谱元离散格式中实现透射边界条件的方法。之所以选择从一维波动问题开始研究，主要基于如下两点考虑。

(1) 一维条件下得到的多次透射边界数值格式可以不加修改地直接用于二维、三维模型，因为后两者实现 MTF 的方式也是“一维化”的，即只涉及到每个边界节点上一条指向内域的离散网格线上的节点。

(2) 一维波动模型摒除了二维、三维模型的诸多复杂性，有助于获得对 MTF 离散格式的精度和稳定性较为清晰的认识，而一维波动问题的求解方法和数值规律，可为二维、三维波动的模拟奠定基础。

1.1 一维波动谱元模型

对于一维无限或半无限长直杆中无阻尼波的传播问题，在适当的位置截取人工边界得到有限计算模型。模型中质点的运动由如下波动方程控制

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1}$$

式中， $u = u(x, t)$ 为待求的波动位移函数， c 为介质波速， $f(x, t)$ 为输入场。

采用具有高精度集中质量矩阵的勒让德谱元法 (Legendre spectral element method, LSEM)，对波动方程进行空间离散。主要步骤包括从等效积分“弱”形式出发、划分互不重叠的单元、将关于每个物理单元的计算变换到标准的参考单元上进行，最后利用伽辽金原理得到空间离散的运动方程

$$\sum_e (\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e) = \mathbf{0} \tag{2}$$

式中， \mathbf{u} 为谱元离散模型的节点位移向量， $\mathbf{M}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{f}^e$ 分别为单元的质量矩阵、刚度矩阵和等效节点向量。

谱元法与有限元法的区别在于：单元位移模式和计算单元特性矩阵的数值积分方法不同。波动模拟选择的有限单元通常为线性单元，只用到两个端节点，数值积分采用高斯积分。勒让德谱单元则为高阶单元，除了两个端节点之外还有内节点，单元节点位置根据 GLL(Gauss Lobatto Legendre) 积分点的相对位置来确定，数值积分采用 GLL 积分。具体过程见文献 [1, 34]，这里仅讨论与文中主题高度相关的谱单元位移模式，以及谱单元和有限单元的空间离散尺度。

谱单元位移模式定义在标准的参考单元 $\Lambda \in [-1, 1]$ 上，单元内任意位置的位移由下式表示

$$u^e(\xi) = \sum_{i=1}^{ng} u^e(\xi_i) N_i(\xi) \tag{3}$$

其中， ng 为单元节点数， $ng = N_E + 1$ ， N_E 为单元阶次； ξ_i 为 GLL 节点坐标， $N_i(\xi)$ 为节点 i 的形函数。表 1 列出了部分单元阶次 N_E 下的 GLL 节点坐标。形函数为定义在 GLL 节点上的拉格朗日插值函数

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{ng} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}, \quad i = 1, 2, \dots, ng \tag{4}$$

表1 LSEM 在参考单元上的节点坐标

Table 1 Node coordinates of LSEM in reference element

LSEM order	GLL coordinates
3	$\pm 0.4472135955, \pm 1$
4	$0, \pm 0.6546536707, \pm 1$
5	$\pm 0.2852315165, \pm 0.7650553239, \pm 1$
6	$0, \pm 0.4688487935, \pm 0.8302238963, \pm 1$

由于 GLL 节点为勒让德多项式的极值点，是根据对勒让德多项式的数值求解确定的，因此该函数也被称为勒让德基函数。

各个物理单元的节点位移与相应参考单元的节点位移 $u^e(\xi_i)$ 是一一对应的，单元节点坐标通过转换关系 $(x - x_1^e) / \Delta x_E = [\xi - (-1)] / 2$ 来确定， x_1^e 为 1 号单元节点的坐标， Δx_E 为谱单元尺寸。在等效积分方程的实际计算中，通过雅可比行列式 $|J| = dx/d\xi = \Delta x_E / 2$ 实现积分区间的变换。

高精度谱单元相对于有限单元的优势在于数值频散低，能够以较少节点模拟波场。对于感兴趣的最短波长 $\lambda_{\min} = c / f_{\max}$ 的空间离散，有限元通常采用 10 个单元左右 [1]，而四阶谱单元则只需采用一个单元 [10]，如图 1 所示。

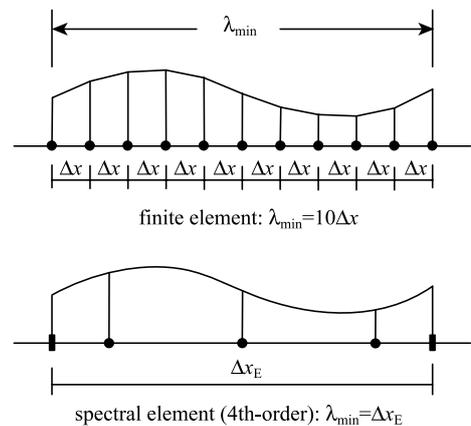


图 1 有限单元与谱单元对波场的空间离散

Fig. 1 Spatial discretization of wave field using finite element or spectral element

1.2 多次透射公式

有限模型人工边界节点的位移由多次透射公式计算, 这是一种直接以离散形式给出的一维化的时、空外推公式. MTF 涉及的外推节点如图 2 所示的空心圆点 $1a, 2a, 3a, \dots$, 它们以时、空步距 $(\Delta t, c_a \Delta t)$ 从边界节点逐步向内域延伸. 其中 c_a 为人工波速, 这些外推节点被称之为边界计算点. MTF 定义式为

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_{ja}^{p+1-j} \quad (5)$$

式中, 二项式系数 $C_j^N = N! / [j!(N-j)!]$, N 为透射阶次. 上式表示人工边界节点 0 在 $p+1$ 时刻的位移, 由边界计算点 $1a$ 在 p 时刻的位移、 $2a$ 在 $p-1$ 时刻的位移、 \dots 、以及 Na 在 $p+1-N$ 时刻的位移来推算. 由于边界计算点位置与内域波动模拟的离散网格点不一致, 上式无法直接用于波动数值计算, 但是只需采用适当的插值方法, 由临近内域离散点位移插值得到各个边界计算点位移, 就可以得到适用于波动模拟的 MTF 数值格式.

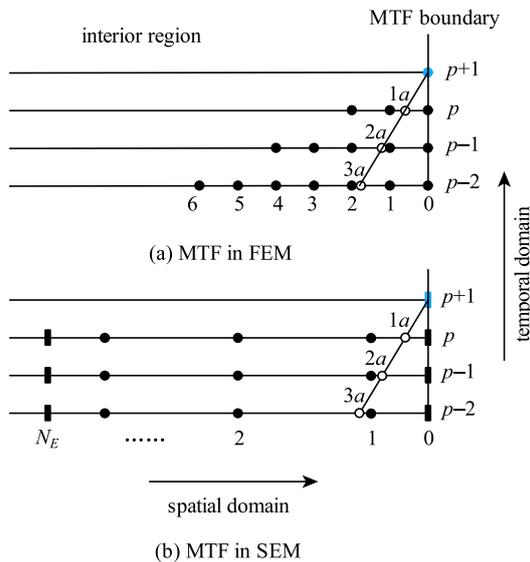


图 2 有限元、谱元离散网格中的 MTF

Fig. 2 MTF in the discrete grid of finite element and spectral element

图 2(a) 给出了目前广泛使用的 MTF 有限元格式^[1,31-32]所涉及的离散网格点, $1a, 2a, 3a, \dots$ 点的位移分别由 3, 5, 7, \dots 个有限元节点的位移插值得到. 这是一种基于三点抛物线内插公式计算 $1a$ 点位移, 再由一种齐次内插递推过程计算 $2a, 3a, \dots$ 各点位移^[1]的数值格式. 这种格式是由时、空移动算子表示的 MTF 二项式形式^[37]得到的, 其优点在于各阶 MTF 的反射系数为 $R = -f^N$, f 为一阶 MTF 的反射

因子^[38], 使得在满足稳定条件 $|f| \leq 1$ 时, 随着透射阶次 N 的增加, 反射系数能够稳步地减小. 不过, 二项式递推只能在等距节点下实现, 因此该 MTF 数值格式要求涉及到的有限元节点为等距离分布.

图 2(b) 表示谱元离散网格中的 MTF, 与有限元相比, 谱元节点之间的间距要大得多且为不等距分布, 此时点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 的位移可能需要采用与有限元不同的插值方式来计算. 可供选用的插值方式有多种, 对应不同的 MTF 谱元格式, 关键在于确定能够较好地满足精度和稳定性要求的格式. 关于不同 MTF 数值格式对精度和稳定性的影响, 相关研究几乎未曾见到, 目前所有讨论都是基于上述格式进行的^[35-45], 它仅是一种有限元等距节点下的 MTF 数值格式. 研究发现, 不同 MTF 数值格式会受到插值公式本身和内域网格频散效应两方面的影响, 在精度和稳定性方面表现出一定差异. 与内域离散格式结合的 MTF 数值格式和 MTF 定义式的区别在于, 前者并不总能稳步地实现多次透射, 达到提高精度的效果, 而这将是判断 MTF 数值格式好坏的重要标准.

2 MTF 谱元格式

Liao 等^[32]在提出多次透射公式时就指出: 多项式、三次样条、三角函数等各种插值方法, 甚至时间步内插法, 都可以尝试作为 MTF 的数值格式, 只是每种格式都存在需要进一步研究的数值误差问题. 文献 [1] 对于 MTF 的有限元格式, 除了上述常用的三点抛物线内插和齐次内插的 MTF 有限元格式之外, 还提出了简单内插、时间内插两种思路. 文献 [33] 对于 MTF 的谱元格式, 提出了空间域回退、时间域回退两种方式. 我们研究发现, 在谱元离散网格下选择 MTF 插值方式是有规律可循的, 如: 从 MTF 的本质以及波动数值计算的具体实践考虑, 时间内插方案并不适用; 从单元位移模式考虑, 多项式插值是最简单可能也是最好的选择.

2.1 时空内插方案的选取

理论上, 在离散格式中实现 MTF 可以采用空间内插与时间内插两类方案. 针对谱元离散格式, 我们考察了这两类方案的具体含义, 并探讨了它们的可行性.

空间内插方案如图 2(b) 所示, 其基本特点是: MTF 计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 与内域网格点的时间

坐标相同，空间坐标不同，此时插值只需在空间方向进行。观察 MTF 的定义式 (5) 不难发现，采用这类插值方案是十分自然的，如图 2(a) 作为目前唯一广泛使用的 MTF 有限元格式，就是一种空间内插方案。随后是谱元离散网格下具体插值格式的选择，这将在下一节进行专门探讨。

时间内插方案如图 3 所示，其基本特点为：MTF 计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 与内域网格点的空间坐标相同，时间坐标不同，插值只需在时间方向进行。这种方案与文献 [1] 介绍的有限元网格下的时间内插思路类似，它无法从 MTF 定义式 (5) 得到，而是基于另一种形式的 MTF 表达式

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_j^{p+1 - \frac{s_j}{c_a \Delta t}} \quad (6)$$

式中各个 MTF 计算点所在的时刻为 $p + 1 - s_j / (c_a \Delta t)$ ， s_j 为第 j 个谱元节点与边界节点的距离，显然它们内域节点对应的时刻不一致。

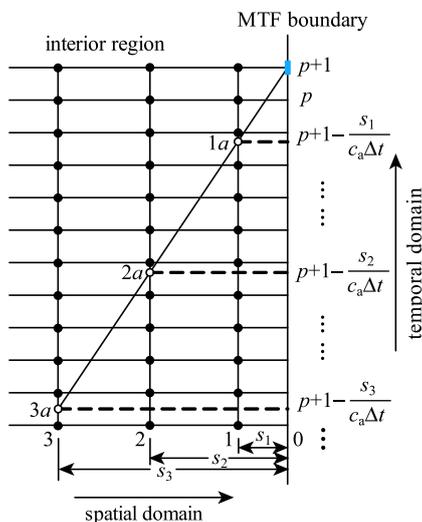


图 3 谱元离散网格的 MTF 时间内插方案

Fig. 3 Temporal interpolation scheme of MTF in the discrete grid of spectral element

目前关于 MTF 时间内插方案的研究很少，仅在文献 [33] 中见到，其模拟结果显示时间域插值的精度和稳定性不如空间域插值。我们对 MTF 时间内插方案进行了研究，从波动数值模拟的具体实践并结合对多次透射公式本质的认识，认为谱元离散网格的 MTF 时间内插方案存在以下问题：

(1) 式 (6) 的有效性缺乏理论支持。与图 2 相比，图 3 中的计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 间隔要大得多且为不等距分布。间隔大导致的问题是计算点所在范围内的波形起伏变化加大(如图 1)，此时通过少量计算点

推算边界节点位移的准确性会下降。不等距分布导致的问题是导出的 MTF 定义式 (5) 时所使用的时空差分原理不再适用于此，因此，仅仅仿照式 (5) 的形式写出的式 (6)，在增加透射阶次以提高精度方面缺乏严格的理论支持。

(2) 边界计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 跨越的时间步较多。如图 3 所示， $1a$ 点跨越 3 个时间步， $2a$ 点跨越 7 个时间步， $3a$ 点跨越 11 个时间步，这相当于三阶 MTF 计算公式采用的时间步长约为 $3\Delta t, 7\Delta t$ 和 $11\Delta t$ ，计算精度较低。另外，时间步数大大超过了内域时间积分通常采用的一个时间步 (Newmark 法) 或两个时间步 (中心差分法)，不仅需要在初始时刻对边界进行专门处理，还可能导致较为严重的稳定性问题。

(3) 具体的插值公式难以确定。图 3 中计算点 $1a, 2a, \dots$ 附近的内域节点比较密集，可以用来插值的内域节点数目以及节点位置存在多种组合，插值公式难以确定。

上述问题表明，时间内插方案不宜作为研究 MTF 谱元格式的出发点。接下来，将从空间内插方案出发，导出具体的 MTF 谱元格式。

2.2 插值格式的确定

为了从空间内插角度得到 MTF 的谱元格式，首先考虑套用传统 MTF 有限元格式的可行性。根据 1.2 节内容不难得知，直接套用的做法行不通，理由是：(1) 等距节点的三点抛物线内插可以推广到谱元不等距节点，但二者的插值系数并不相同；(2) 高阶 MTF 计算点的齐次内插递推过程无法在不等距节点下实现。

于是，我们决定采用不等距节点的三点抛物线内插公式在谱元网格中实现一阶 MTF，并借鉴文献 [1] 介绍的简单内插思路，即对点 $2a, 3a, \dots$ 采用与点 $1a$ 完全相同的插值格式，在谱元网格中实现高阶 MTF。由此得到一种基于三点抛物线内插的 MTF 谱元格式，如图 4 所示。

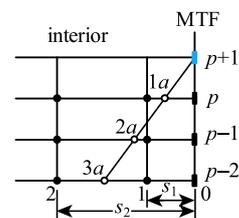


图 4 基于三点抛物线内插的 MTF 谱元格式

Fig. 4 MTF scheme based on parabolic interpolation applied in spectral element method

该格式人工边界节点 0 在 $p+1$ 时刻的位移由下式计算

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N \mathbf{T}_j \mathbf{u}_j \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_j = [t_{j,0}, t_{j,1}, t_{j,2}] \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_j = [u_0^{p+1-j}, u_1^{p+1-j}, u_2^{p+1-j}]^T \quad (9)$$

其中, 上标 T 表示向量的转置. 式 (8) 中的插值系数 $t_{j,0}, t_{j,1}, t_{j,2}$ 与 MTF 计算点 $ja (j = 1, 2, \dots, N)$ 以及式 (9) 中的谱元网格点是一一对应的, 其数值由拉格朗日插值公式确定.

$$t_{j,0} = (jc_a \Delta t - s_1)(jc_a \Delta t - s_2) / [(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)] \quad (10a)$$

$$t_{j,1} = (jc_a \Delta t - s_0)(jc_a \Delta t - s_2) / [(s_1 - s_0)(s_1 - s_2)] \quad (10b)$$

$$t_{j,2} = (jc_a \Delta t - s_0)(jc_a \Delta t - s_1) / [(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)] \quad (10c)$$

其中, $s_0 (s_0 = 0)$, s_1 和 s_2 为离散网格点与边界节点的距离 (图 4), 可根据谱单元尺寸和表 1 给出的 GLL 节点坐标进行计算.

从图 4 可以看出, 式 (7)~ 式 (10) 表示的 MTF 谱元格式需要满足各个计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 位移均由三点抛物线“内插”公式计算的条件, 即

$$Nc_a \Delta t \leq s_2 \quad (11)$$

上式对能够实现的 MTF 阶次作了一定限制. 根据内域时间积分的稳定条件以及谱元节点位置关系不难得出, 当人工波速等于物理波速时 (实际计算时通常如此), 能够实现的 MTF 阶次一般能够达到 3 以上, 基本满足使用要求. 但是, 若人工波速取值较大且时间步长接近稳定临界值时, 则需要验算 MTF 阶次是否满足上式要求.

数值试验表明, 一般情形下该 MTF 谱元格式能够有效地模拟外行波在人工边界上的透射过程, 但对于比较复杂的情形, 如人工波速与介质物理波速差异较大时, 该格式往往难以随着透射阶次的提高而较好地收敛到理想结果. 分析其原因, 可能是三点抛物线内插格式的插值多项式阶次仅为 2, 与常用的谱单元阶次 (如 4~8) 差距较大, 导致精度不足. 考虑到复杂二维、三维波动问题的模拟要求, 有必要开发精度更高的 MTF 谱元格式.

为改善边界精度, 提高插值多项式阶次, 即利用更多的谱元节点进行插值, 得到新的 MTF 谱元格

式. 若采用的插值多项式阶次为 M , 则称之为基于 M 次多项式插值的 MTF 谱元格式, 如图 5 所示.

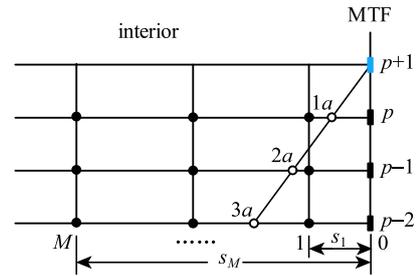


图 5 基于 M 次多项式插值的 MTF 谱元格式

Fig. 5 MTF scheme based on M th-order polynomial interpolation applied in spectral element method

此时人工边界节点 0 在 $p+1$ 时刻的位移计算公式为

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N \mathbf{T}_j \mathbf{u}_j \quad (12)$$

$$\mathbf{T}_j = [t_{j,0}, t_{j,1}, \dots, t_{j,M}] \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_j = [u_0^{p+1-j}, u_1^{p+1-j}, \dots, u_M^{p+1-j}]^T \quad (14)$$

式 (13) 中的插值系数 $t_{j,0}, t_{j,1}, \dots, t_{j,M}$ 可根据拉格朗日插值多项式计算

$$t_{j,i} = \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq i}}^M \frac{(jc_a \Delta t - s_k)}{(s_i - s_k)} \quad (15)$$

离散网格点与边界节点的距离 $s_k (k = 0, 1, \dots, M)$, 根据谱单元尺寸和表 1 给出的 GLL 节点坐标进行计算.

提高后的插值多项式阶次 M 的取值可以为 $3, 4, \dots, N_E$, N_E 为谱单元阶次 (这里不考虑超过谱单元阶次的情形); 当 M 取值为 2 时, 式 (12)~ 式 (15) 与式 (7)~ 式 (10) 相同. 因此, 本文 MTF 谱元格式可概括为基于 M 次多项式插值的格式, M 取值从 2 到 N_E .

对于式 (12)~ 式 (15) 表示的 MTF 谱元格式, 保证各个计算点 $1a, 2a, 3a, \dots$ 位移的插值公式均为“内插”的条件是

$$Nc_a \Delta t \leq s_M \quad (16)$$

上式与式 (11) 类似, 对通常使用的 MTF 阶次不构成限制, 只是在人工波速大大超过介质物理波速或透射阶次很高时, 才需要进行验证.

数值试验表明, 提高插值多项式阶次 M 能够有效地提高本文 MTF 谱元格式的模拟精度, 尤其是能够改善低阶插值格式在高阶 MTF 方面的不足, 增强

模拟复杂波场的能力. 那么, 在具体的波动谱元模拟中, 插值多项式阶次 M 取多少最为合适? 这个问题难以单纯地从对数值试验结果的总结来回答, 还必须结合数值分析的基本理论进行分析. 分析认为: 当阶次很高时等距节点下的高阶多项式插值会出现龙格现象, 导致精度降低; 谱单元采用不等距的 GLL 节点, 能够有效地避免龙格现象的出现, 具有很高精度. 不过, 插值精度是以单元为单位来确定的, 由 N_E 阶谱单元组成的离散网格中节点的最高插值精度为 $2N_E - 1$ 阶. 因此, 插值多项式阶次取 $M = N_E$ 最为合适.

对比式 (15) 与式 (4) 不难发现, 当插值多项式阶次取为 $M = N_E$ 时, 式 (12)~ 式 (15) 的 MTF 谱元格式与内域的单元位移模式是一致的, 这似乎暗示了某种一般性原则. 需要指出的是, 一般情况下, 插值多项式阶次低于谱单元阶次的边界格式同样具有较好模拟效果, 不同格式之间的差异只有在模拟复杂波动问题时才表现得较为明显.

3 精度

通过一维半无限均匀弹性直杆中波传播问题的数值试验来检验本文 MTF 谱元格式的精度. 计算模型如图 6 所示, 左端为输入端, 人工边界位于距杆端 $L = 200$ m 处, 杆中波速为 $c = 200$ m/s. 内域采用勒让德谱单元离散, 单元阶次 $N_E = 5$, 时间积分采用中心差分法, 人工边界采用式 (12)~ 式 (15) 表示的 MTF 谱元格式.

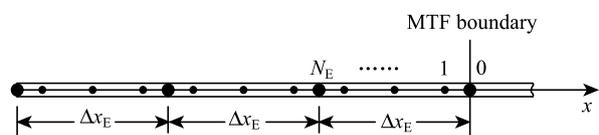


图 6 半无限均匀弹性直杆的谱元离散模型

Fig. 6 Discretized spectral element model for a semi-infinite straight uniform elastic rod

输入波采用三次样条脉冲波 $S(t)$, 幅值 1 m, 脉冲非零段时间宽度 T s, 表达式为

$$S(t) = \begin{cases} 16t^3/T^3, & 0 \leq t \leq 0.25T \\ 1 - 48t(t - 0.5T)^2/T^3, & 0.25T < t \leq 0.5T \\ 1 + 48(t - T)(t - 0.5T)^2/T^3, & 0.5T < t \leq 0.75T \\ -16(t - T)^3/T^3, & 0.75T < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (17)$$

计算时取 $T = 0.2$ s, 根据傅里叶分析可知其上限频率约为 14 Hz, 此时杆中最短波长 $\lambda_{\min} \approx 14.3$ m. 模型的单元数目取为 14, 则单元尺寸 Δx_E 与 λ_{\min} 一致, 符合谱元离散的精度要求^[10,13]. 时间步长取为 $\Delta t = 0.002$ s, 满足时域积分稳定条件^[34]. 分别使用插值多项式阶次为 $M = 2 \sim 5$ 对应的四种 MTF 谱元格式进行模拟, 并将它们记为 interp 2, interp3, interp 4 和 interp spec.

人工边界条件是通过一种假定的外行波动模式来推算边界节点位移的, 该波动模式与实际外行波动的接近程度决定了边界的精度. 多次透射边界假定的波动模式由人工波速 (c_a) 和透射阶次 (N) 两个基本参数确定, 其优点在于高精度和灵活性, 具体为: 人工波速取值适当时, 较低的透射阶次就能达到很好的模拟效果; 人工波速与介质物理波速差异较大时, 增加透射阶次同样能够逐步提高模拟精度. 为不失一般性, 这里考虑人工波速等于、大于和小于介质物理波速三种情形.

对于人工波速等于介质物理波速的情形, 即 $c_a = c$, 四种 MTF 谱元格式计算得到的边界节点位移时程如图 7 所示.

此时对于这四种 MTF 谱元格式中的任何一种, 采用一阶 MTF 得到的边界位移结果已经十分接近精确解. 给出高阶 MTF 计算结果的目的在于观察当透射阶次 N 增加时, 每种 MTF 谱元格式能否进一步提高或者至少保持相当于一阶 MTF 的精度. 图 7 反映了 MTF 数值格式与 MTF 定义式的不同, 前者并不总是能够稳步地达到增加透射阶次提高边界精度的效果. 从图 7(a) 可以看出, 在提高 MTF 阶次后插值阶次与单元阶次差异较大的 interp 2 格式, 不仅没有提高精度, 反而误差越来越大. 图 7(b) 和图 7(c) 表明, 插值阶次接近单元阶次的 interp 3 和 interp 4 格式, 其高阶 MTF 在提高精度方面仍未达到效果, 但是在控制误差方面有所改善. 图 7(d) 结果表明, 与单元位移模式一致的 interp spec 格式, 始终能够保持数值解十分接近于精确解, 它在控制高阶 MTF 误差方面效果最好.

多次透射公式的优点在于: 先以一个统一的人工波速^[1,31-32]来描述外行波沿边界“法线”的视传播, 再通过多次透射的方法逐步消除由于人工波速与实际视传播速度不同而造成的误差. 就一维波动模拟而言, 外行波的视传播速度就是介质物理波速, 实际计算时人工波速应当取为介质物理波速. 这里

纯粹从研究角度出发,采用不同人工波速进行模拟,检验本文 MTF 谱元格式的精度.

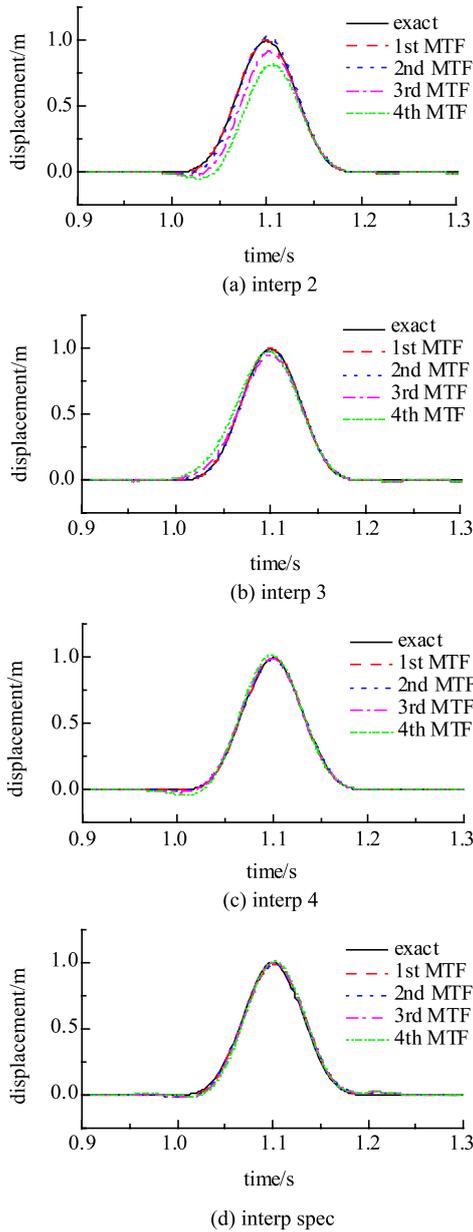


图7 人工边界节点位移时程 ($c_a = c$)

Fig. 7 Displacement history of the artificial boundary node ($c_a = c$)

对于人工波速大于介质物理波速的情形,取 $c_a = 2c$, 四种 MTF 谱元格式计算的边界节点位移时程如图 8 所示.

图 8 结果显示四种 MTF 谱元格式在一阶和二阶 MTF 时的模拟结果非常接近,在三阶和四阶 MTF 时的模拟结果则表现出明显差异.一阶 MTF 时几种格式的模拟结果都存在较大误差,完全不能满足要求,二阶 MTF 能够迅速减小误差,使计算结果接近于精

确解.三阶和四阶 MTF 时,图 8(a) 中 interp 2 格式呈现误差增大的趋势,图 8(b) 和图 8(c) 中 interp 3 和 interp 4 格式体现了提高插值阶次能够减小高阶 MTF 误差的作用,图 8(d) 中 interp spec 格式在阶 MTF 时的误差最小,能够保证高阶 MTF 计算结果的收敛性,相比于前三种格式的优势比较明显.

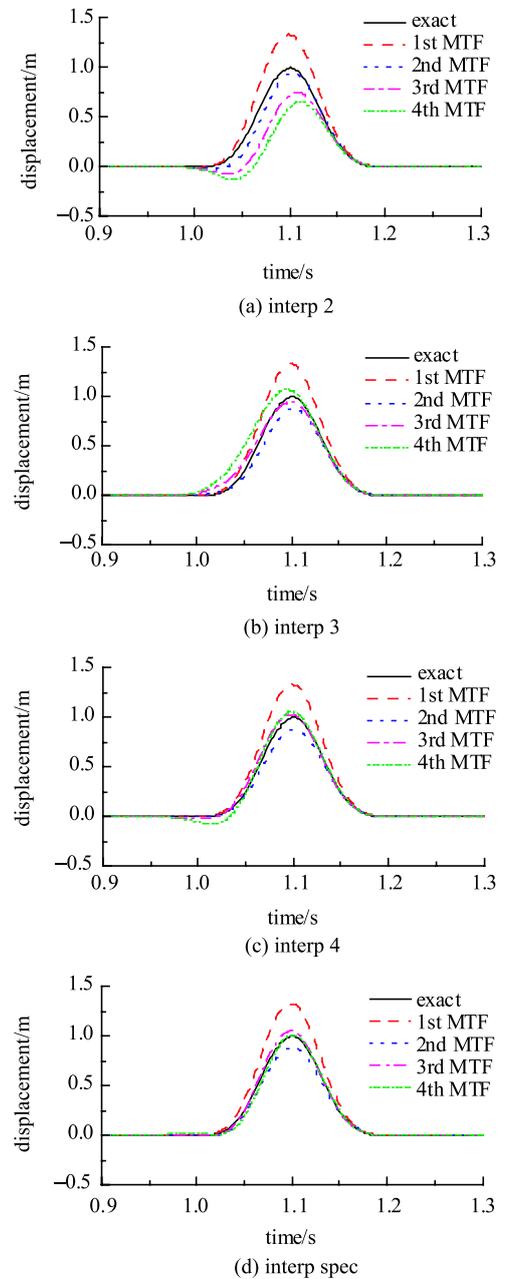


图8 人工边界节点位移时程 ($c_a = 2c$)

Fig. 8 Displacement history of the artificial boundary node ($c_a = 2c$)

对于人工波速小于介质物理波速的情形,取 $c_a = 0.5c$, 四种 MTF 谱元格式计算得到的边界节点位移时程如图 9 所示.

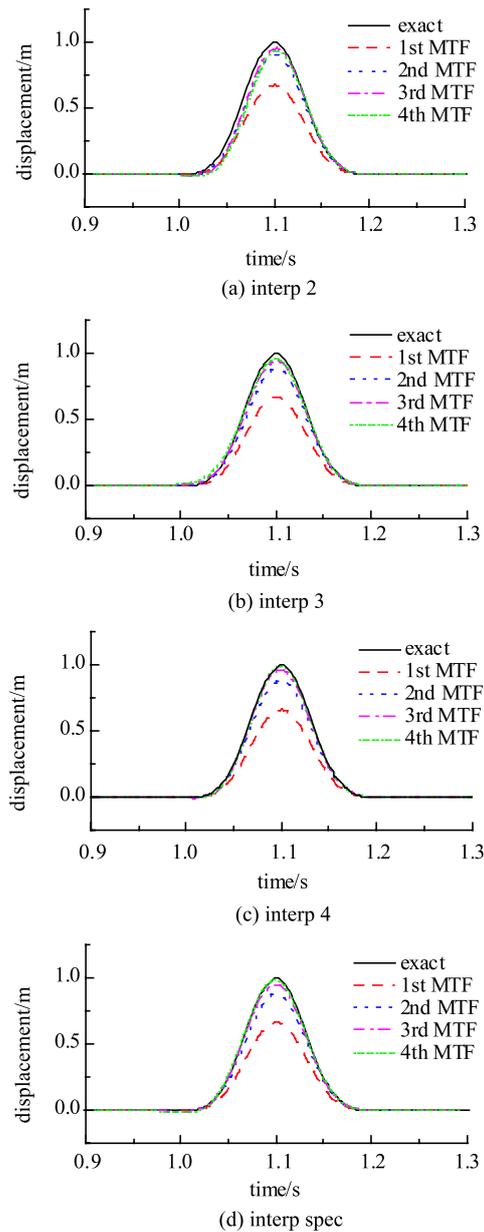
图 9 人工边界节点位移历程 ($c_a = 0.5c$)Fig. 9 Displacement history of the artificial boundary node ($c_a = 0.5c$)

图 9 结果显示四种 MTF 谱元格式在一阶和二阶 MTF 时的模拟结果基本看不出差别, 在三阶和四阶 MTF 时的模拟结果则出现一定差异. 对于四种 MTF 谱元格式, 一阶 MTF 数值解都大幅度低于精确解, 误差很大, 无法满足要求; 二阶 MTF 能够正常地减小误差, 使结果靠近精确解; 但到三阶和四阶 MTF, interp 2 格式的精度不再提高, interp 3 和 interp 4 的结果慢慢地向精确解靠近, interp spec 能够稳步地逼近精确解.

四种 MTF 谱元格式在一维波动模拟中的精度可总结为: (1) 在一阶和二阶 MTF 时, 四种格式的精

度相当, 对于人工波速与实际“法向”传播速度 (一维情形为介质物理波速) 差别不大的波动问题, 通常二阶 MTF 已能够满足精度要求, 四种格式都可以使用. (2) 在三阶和四阶 MTF 时, 能够很好地实现增加 MTF 阶次以提高精度效果的是 interp spec 格式, 即与谱单元位移模式一致的格式. 因此, 对于人工波速与实际“法向”传播速度差别较大的情形, 如一维波动问题中人为选取大于或小于介质物理波速的人工波速, 或二维、三维波动问题中受透射角度或介质交界面影响导致视传播速度难以准确定义时, 推荐采用与单元位移模式一致的 MTF 谱元格式.

关于外行波“法向”视传播速度与介质物理波速的关系, 一维波动情形下二者相同, 而在二维或三维波动情形下二者明显不同, 如: 存在透射角度会导致视传播速度大于介质物理波速, 且透射角度越大二者差异越大; P-SV 波动问题中 P 波与 SV 波波速的差异巨大, 加上透射角度等因素的影响, 导致视传播速度变得比较复杂, 难以用一个值来描述. 因此, 尽管一维波动算例的模拟结果对二维或三维波动问题有一定参考价值, 但它们并不是完全等同的.

4 稳定性

局部人工边界条件用于时域逐步积分计算时存在稳定性问题^[35], 式(12)~式(15)的 MTF 谱元格式也不例外. 讨论人工边界的稳定性, 必须与具体的内域算法相结合^[36-37], 波动问题的类型、维数、MTF 数值格式、透射阶次等多种因素都可能对稳定性造成影响. 为使问题不至过于复杂, 这里仅就简单的一维波动情形, 初步讨论上述 MTF 谱元格式的稳定性.

文献[38]在频域内推导了一维波动有限元 (或有限差分) 离散模型中传统 MTF 谱元格式的反射系数精确解, 并据此阐述了失稳机理为: 当反射系数大于 1 时才可能发生失稳; 失稳来自边界对波动有限元 (或有限差分) 模拟无意义的高频段的反射放大; 高频误差经由离散网格, 在人工边界和物理界面之间不断反射, 每至人工边界就被放大一次, 当波动循环次数足够多的, 累积效应导致出现振荡失稳. 后来, 文献[39]提出一种直接在时域内分析 MTF 稳定性的方法: 基于传递矩阵谱半径的稳定性判别法, 该方法得到的结果与频域方法几乎完全一致. 对于本文 MTF 谱元格式而言, 使用以上两种分析方法都比较困难, 前者是因为难以得到不等距节点和高阶单元位移模式的频域解, 后者因为当传递矩阵的最

大特征值的模是 1 或非常接近于 1 时^[40], 会引起较大的误差, 导致判断结果不够准确. 但是, 从离散网格相当于低通滤波器的观点来看, 谱元网格和有限元网格对波动的作用相似, 区别仅在于截止频率不同. 由此不难推断, 本文 MTF 谱元格式的失稳机制应当与有限元或有限差分类似, 为一种高频振荡失稳, 数值试验结果验证了该推断.

为消除 MTF 的高频振荡失稳, 人们提出了多种方法, 主要包括: 对边界计算区内的节点位移进行三点平滑^[38]; 在整个计算区内施加与应变速度成正比的黏性阻尼^[39]; 在边界区设置黏性阻尼^[41-42]; 调整内域离散格式的网格参数^[43]; 采用低阶 MTF 与高阶 MTF 组合的形式^[44]; 在不降低精度的前提下修改内域有限元格式的刚度矩阵^[45]. 但值得注意的是, 上述措施都被用于二维或三维模型. 那么, 一维波动问题是否需要采用稳定实现 MTF 的措施?

一维波动数值模拟中极少出现失稳现象, 因此一般认为不需要采取稳定措施, 但这样的直观判断并不能令人完全满意. 实际上, 有研究已经十分接近从理论上回答这个问题, 只是之前侧重于从频域反射系数的角度解释 MTF 的失稳机理, 而忽视了失稳现象与时域计算参数之间的联系. 文献 [46] 在文献 [38] 工作的基础上, 解析地证明了如下命题: 对于一维波动有限元离散模型, 若透射边界的人工波速取值大于 1.5 倍的空间步距与时间步距的比值, 则在某一高频段内其稳态波动解在人工边界上反射系数的模大于 1. 这一命题的含义为: 就一维波动有限元离散模型而言, 若 c_a 为人工波速, $\Delta x, \Delta t$ 分别为空间步距和时间步距, 则只有在满足条件

$$c_a > 1.5 \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (18)$$

时, MTF 才可能出现高频失稳. 反过来说, 当人工波速小于或等于 1.5 倍空间步距与时间步距的比值时, MTF 不会发生失稳. 对应于 MTF 的频域稳定条件 (即反射系数的模大于 1), 将式 (18) 称为 MTF 的时域稳定条件.

为论述方便, 定义两个参数: 波速比, 指人工波速与实际法向透射速度 (一维为物理波速) 的比值, 用符号 α 表示, $\alpha = c_a/c$; 无量纲时间步距, 指时间步长与物理波速的乘积再除以空间网格尺寸, 用符号 $\Delta\tau$ 表示, $\Delta\tau = c\Delta t/\Delta x$. 这样, 上述 MTF 时域稳定条件可表示为一种更为简洁的形式

$$\alpha \leq \frac{1.5}{\Delta\tau} \quad (19)$$

上式的含义如图 10 所示 ($\Delta\tau$ 的取值范围由内域计算的稳定条件确定, 为 $\Delta\tau \leq 1$), 其直观呈现出 MTF 时域稳定条件的价值在于: 在一维波动有限元离散模型中, 可以通过控制人工波速来保证透射边界的稳定性. 因此, 可以从理论上解释一维波动数值模拟很少出现失稳现象的原因, 即人工波速取值不够大. 例如, 当 $\Delta\tau = 1$ 时, 取 $\alpha > 1.5$ 才可能失稳; 当 $\Delta\tau = 0.5$ 时, 取 $\alpha > 3$ 才可能失稳; 当 $\Delta\tau = 0.2$ 时, 至少取 $\alpha > 7.5$ 才可能失稳.

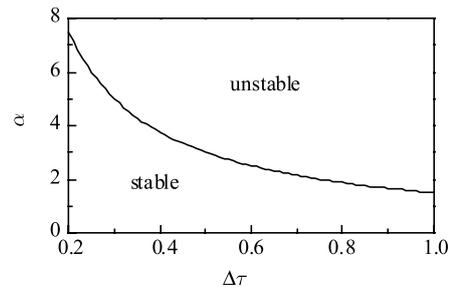


图 10 MTF 有限元格式的时域稳定条件
Fig. 10 Time-domain stability condition of the finite element scheme of MTF

上述 MTF 时域稳定条件是针对一维波动有限元模型的, 其关键在于数字 1.5 的确定, 我们称之为 MTF 的稳定临界值. 文献 [46] 通过求解频域反射系数的模大于 1 的不等式来确定有限元的 MTF 稳定临界值. 对于一维波动谱元模拟而言, 大量数值试验表明也存在类似的 MTF 稳定临界值. 但是, 若要从频域角度推导其 MTF 反射系数, 并进一步求解不等式, 是极其困难甚至难以实现的, 本工作暂不讨论. 我们采用另外一种方法来确定 MTF 谱元格式的稳定临界值, 即根据高频失稳现象比较显著, 能够在波动数值模拟结果中轻易地被观察的特点, 采用数值算例进行大量试算, 确定 MTF 谱元格式的稳定临界值. 试算方法的准确性已通过有限元模型得到验证.

对于一维波动谱元模型, 波速比 α 的定义与上文相同, 而无量纲时间步距则定义为 $\Delta\tau = c\Delta t/s_1$, s_1 为谱单元端部两个节点之间的距离. 若用 γ_c 表示 MTF 谱元格式的稳定临界值, 则有相应的 MTF 时域稳定条件为

$$\alpha \leq \frac{\gamma_c}{\Delta\tau} \quad (20)$$

采用上一节的一维波动算例进行试算, 计算时间设定为 300 s, 以观察到明显的高频振荡现象作为失稳标准. 对于上一节的四种 MTF 谱元格式, 考虑一阶

MTF, 在计算过程中尝试 α 和 $\Delta\tau$ 的不同组合, 发现总是当 $\alpha\Delta\tau$ 超过一定值时, 对应的 MTF 才出现失稳. 得到四种 MTF 谱元格式下, 一阶 MTF 的稳定临界值如表 2 所示.

表2 不同 MTF 谱元格式的稳定临界值 (一维波动)

Table 2 Stability thresholds of several MTF spectral element schemes (1-D wave motion)

1st-order MTF	γ_c
interp 2	2.72
interp 3	2.51
interp 4	2.30
interp spec	2.01

表 2 显示从 interp 2 格式到 interp spec 格式, 即 MTF 谱元格式的插值多项式阶次从 $M = 2 \sim 5$ 逐步升高, 其一阶 MTF 稳定临界值逐步降低. 但总体而言, MTF 谱元格式的稳定临界值均高于其有限元格式. 将表 2 数值代入式 (20), 结果如图 11 所示. (根据文献 [34] 给出的内域时间积分稳定条件确定 $\Delta\tau$ 取值范围为 $\Delta\tau \leq 0.86$).

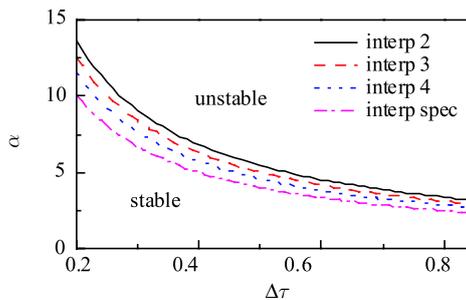


图 11 MTF 谱元格式的时域稳定条件

Fig. 11 Time-domain stability condition of the spectral element scheme of MTF

图 11 结果表明, 不同 MTF 谱元格式的稳定性, 随着插值多项式阶次的升高而逐步降低, 变化趋势与精度结果正好相反. 对此可作如下解释: 当插值多项式阶次升高 (即越来越接近谱单元阶次) 时, 相应的 MTF 谱元格式与内域的单元位移模式匹配得更好, 表现为精度提高; 但是高精度插值格式对人工波速的变化更为敏感, 在人工波速增大时更有可能发生失稳.

5 结论

本文提出应用谱元法和透射边界条件实现高效近场波动数值模拟的思路, 探讨了 MTF 与谱元离散

模型结合的关键问题, 得到的主要结论如下:

(1) MTF 与谱元离散格式的结合, 采用空间内插方案比较合适, 不宜采用时间内插方案.

(2) 传统的 MTF 有限元格式适用于等距节点情形, 不能直接套用到谱元法中. 其中, 传统格式实现一阶 MTF 的三点抛物线内插法可以借鉴, 但需改变插值系数. 高阶 MTF 的齐次内插方法不能使用, 本文提出的简单内插方法可以作为一种替代方案.

(3) 根据插值多项式阶次的不同, 可得到不同的 MTF 谱元格式, 插值阶次越接近谱单元阶次, 其精度越高. 理论分析和数值试验都表明, 基于谱单元位移模式插值的 MTF 谱元格式具有最高的精度, 原因是它不仅插值阶次与单元阶次一致, 而且插值基函数也与单元形函数一致.

(4) 不同 MTF 谱元格式的稳定临界值随着插值多项式阶次的提高而降低, 表明插值多项式阶次较高的 MTF 谱元格式对人工波速的敏感性更强, 在较大人工波速时相对较容易失稳. 不过, 所有格式均在人工波速大大超过介质物理波速时才可能发生失稳.

参 考 文 献

- 廖振鹏. 工程波动理论导论. 第二版. 北京: 科学出版社, 2002 (Liao Zhenpeng. Introduction to Wave Motion Theories in Engineering (second edition). Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 廖振鹏. 近场波动的数值模拟. 力学进展, 1997, 27(2): 193-216 (Liao Zhenpeng. Numerical simulation of near-field wave motion. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(2): 193-216(in Chinese))
- Chen YS, Yang GW, Ma X, et al. A time-space domain stereo finite difference method for 3D scalar wave propagation. *Computers & Geosciences*, 2016, 96: 218-235
- Liu SL, Li XF, Wang WS, et al. A mixed-grid finite element method with PML absorbing boundary conditions for seismic wave modelling. *Journal of Geophysics & Engineering*, 2014, 11(5): 1-13
- 曹丹平, 周建科, 印兴耀. 三角网格有限元法波动模拟的数值频散及稳定性研究. 地球物理学报, 2015, 58(5): 1717-1730(Cao Danping, Zhou Jianke, Yin Xingyao. The study for numerical dispersion and stability of wave motion with triangle-based finite element algorithm. *Chinese Journal of Geophysics*, 2015, 58(5): 1717-1730(in Chinese))
- Canuto C, Hussaini MY, Quarteroni A, et al. Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains. Berlin: Springer, 2006
- Patera AT. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54(3): 468-488
- Seriani G, Su C. Wave propagation modeling in highly heterogeneous media by a ploy-grid Chebyshev spectral element method. *Journal of Computational Physics*, 2012, 20(2): 345-351
- 林灯, 崔涛, 冷伟等. 一种求解地震波方程的高效并行谱元格式.

- 计算机研究与发展, 2016, 53(5): 1147-1155(Lin Deng, Cui Tao, Leng Wei, et al. An efficient parallel spectral element scheme for solving seismic wave equation. *Journal of Computer Research and Development*, 2016, 53(5): 1147-1155(in Chinese))
- 10 Priolo E, Seriani G. A numerical investigation of Chebyshev spectral element method for acoustic wave propagation//Proceedings of the 13th IMACS Conference on Comparative Applied Mathematics, Dublin, Ireland, 1991, 2: 551-556
 - 11 Seriani G, Priolo E. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1994, 16(3): 337-348
 - 12 Seriani G. A parallel spectral element method for acoustic wave modeling. *Journal of Computational Acoustics*, 1997, 5(1): 53-69
 - 13 Komatitsch D, Vilotte JP. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1998, 88(2): 368-392
 - 14 Komatitsch D, Liu QY, Tromp J, et al. Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2004, 94(1):187-206
 - 15 Komatitsch D, Tsuboi S, Tromp J. The spectral-element method in seismology. *Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms*. American Geophysical Union, 2005: 205-227
 - 16 王秀明, Seriani G, 林伟军. 利用谱元法计算弹性波场的若干理论问题. *中国科学: G 辑*, 2007, 37(1): 1-19(Wang Xiuming, Seriani G, Lin Weijun. Several theoretic aspects for the calculation of elastic wave field using spectral element method. *Science China (G Series)*, 2007, 37(1): 1-19(in Chinese))
 - 17 严珍珍, 张怀, 杨长春等. 汶川大地震地震波传播的谱元法数值模拟研究. *中国科学: D 辑*, 2009, 39(4): 393-402(Yan Zhenzhen, Zhang Huai, Yang Changchun, et al. Numerical investigation of seismic wave propagation of Wenchuan Earthquake using spectral element method. *Science China (D Series)*, 2009, 39(4): 393-402(in Chinese))
 - 18 李洪建, 韩立国, 巩向博. 复杂构造网格化及高精度地震波场谱元法数值模拟. *石油物探*, 2014, 53(4): 375-383(Li Hongjian, Han Ligu, Gong Xiangbo. High precision spectral element method based on grid discretization of complicated structure for seismic wavefield numerical simulation. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 2014, 53(4): 375-383(in Chinese))
 - 19 李琳, 刘韬, 胡天跃. 三角谱元法及其在地震正演模拟中的应用. *地球物理学报*, 2014, 57(4): 1224-1234(Li Lin, Liu Tao, Hu Tianyue. Spectral element method with triangular mesh and its application in seismic modeling. *Chinese Journal of Geophysics*, 2014, 57(4): 1224-1234(in Chinese))
 - 20 李孝波. 基于谱元法的玉田震害异常研究. [博士论文]. 哈尔滨: 中国地震局工程力学研究所, 2014(Li Xiaobo. The investigation of seismic damage anomaly in Yutian based on spectral element method. [PhD Thesis]. Harbin: Institute of Engineering Mechanics, Chinese Earthquake Administration, 2014(in Chinese))
 - 21 李孝波, 薄景山, 齐文浩等. 地震动模拟中的谱元法. *地球物理学进展*, 2014, 29(5): 2029-2039(Li Xiaobo, Bo Jingshan, Qi Wenhao, et al. Spectral element method in seismic ground motion simulation. *Progress in Geophysics*, 2014, 29(5): 2029-2039(in Chinese))
 - 22 Liu YS, Teng JW, Lan HQ, et al. A comparative study of finite element and spectral element methods in seismic wavefield modeling. *Geophysics*, 2014, 79(2): T91-T104
 - 23 He CH, Wang JT, Zhang CH. Nonlinear spectral-element method for 3D seismic-wave propagation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2016, 106(3): 1074-1087
 - 24 Lysmer J, Kuhlemeyer R L. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1969, 95(4): 859-878
 - 25 Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1977, 67(6): 1529-1540
 - 26 Berenger JP. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114(2): 185-200
 - 27 Komatitsch D, Tromp J. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 2003, 154(1): 146-153
 - 28 廉西猛, 单联瑜, 隋志强. 地震正演数值模拟完全匹配层吸收边界条件研究综述. *地球物理学进展*, 2015, 30(4): 1725-1733(Lian Ximeng, Shan Lianyu, Sui Zhiqiang. An overview of research on perfectly matched layers absorbing boundary condition of seismic forward numerical simulation. *Progress in Geophysics*, 2015, 30(4): 1725-1733(in Chinese))
 - 29 Xie ZN, Matzen R, Cristini P, et al. A perfectly matched layer for fluid-solid problems: Application to ocean-acoustics simulations with solid ocean bottoms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 140(1): 165-175
 - 30 He Y, Min MS, Nicholls D P. A spectral element method with transparent boundary condition for periodic layered media scattering. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 68(2): 772-802
 - 31 廖振鹏, 黄孔亮, 杨柏坡等. 暂态波透射边界. *中国科学: A 辑*, 1984, 6: 556-564(Liao Zhenpeng, Huang Kongliang, Yang Baipo, et al. A transmitting boundary for transient wave. *Scientia Sinica (Series A)*, 1984, 6: 556-564(in Chinese))
 - 32 Liao ZP, Wong HL. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1984, 3(4): 174-183
 - 33 戴志军, 李小军, 侯春林. 谱元法与透射边界的配合使用及其稳定性研究. *工程力学*, 2015, 32(11): 40-50(Dai Zhijun, Li Xiaojun, Hou Chunlin. A combination usage of transmitting formula and spectral element method and the study of its stability. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(11): 40-50(in Chinese))
 - 34 Cohen GC. *Higher-order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Berlin: Springer, 2002
 - 35 关慧敏, 廖振鹏. 局部透射边界和叠加边界的精度分析与比较. *力学学报*, 1994, 26(3): 303-311(Guan Huimin, Liao Zhenpeng. A comparison between the discrete local transmitting boundary and the superposition boundary in wave propagation. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 26(3): 303-311(in Chinese))
 - 36 景立平, 吴照营, 邹经相. 近场波动数值模拟稳定性问题分析. *地震工程与工程振动*, 2002, 22(2): 17-21(Jing Liping, Wu Zhao-ying, Zou Jingxiang. Stability analysis of numerical simulation of

- near-field wave motion. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2002, 22(2): 17-21(in Chinese))
- 37 景立平. 多次透射公式实用形式稳定性分析. 地震工程与工程振动, 2004, 24(4): 20-24(Jing Liping. Stability analysis of practical formula for multi-transmitting boundary. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 24(4): 20-24(in Chinese))
- 38 Liao ZP, Liu JB. Numerical instabilities of a local transmitting boundary. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, 21(1): 65-77
- 39 关慧敏, 廖振鹏. 局部人工边界稳定性的一种分析方法. 力学学报, 1996, 28(3): 376-380(Guan Huimin, Liao Zhenpeng. A method for the stability analysis of local artificial boundaries. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(3): 376-380(in Chinese))
- 40 关慧敏, 廖振鹏. 时域局部人工边界的稳定性分析方法概述. 世界地震工程, 1997, 13(2): 1-7(Guan Huimin, Liao Zhenpeng. A summary on the methods for the stability analysis of artificial local boundaries in time domain. *World Information on Earthquake Engineering*, 1997, 13(2): 1-7 (in Chinese))
- 41 廖振鹏, 周正华, 张艳红. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现. 地球物理学报, 2002, 45(4): 533-545(Liao Zhenpeng, Zhou Zhenghua, Zhang Yanhong. Stable implementation of transmitting boundary in numerical simulation of wave motion. *Chinese Journal of Geophysics*, 2002, 45(4): 533-545(in Chinese))
- 42 杨宇, 李小军, 贺秋梅等. 散射问题中消除多次透射边界高频振荡失稳措施比较分析. 地震工程学报, 2014, 36(3): 476-481(Yang Yu, Li Xiaojun, He Qiumei, et al. Comparison of measures for eliminating high-frequency instability of a multi-transmitting boundary in scattering problems. *China Earthquake Engineering Journal*, 2014, 36(3): 476-481(in Chinese))
- 43 谢志南, 廖振鹏. 透射边界高频失稳机理及其消除方法——SH波动. 力学学报, 2012, 44(4): 745-752(Xie Zhinan, Liao Zhenpeng. Mechanism of high frequency instability caused by transmitting boundary and method of its elimination——SH wave. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(4): 745-752(in Chinese))
- 44 Zhang L, Yu TB. A method of improving the stability of Liao's higher-order absorbing boundary condition. *Progress in Electromagnetics Research M*, 2012, 27: 167-178
- 45 章旭斌, 廖振鹏, 谢志南. 透射边界高频耦合失稳机理及稳定实现——SH波动. 地球物理学报, 2015, 58(10): 3639-3648(Zhang Xubin, Liao Zhenpeng, Xie Zhinan. Mechanism of high frequency coupling instability and stable implementation for transmitting boundary——SH wave motion. *Chinese Journal of Geophysics*, 2015, 58(10): 3639-3648(in Chinese))
- 46 谢志南, 廖振鹏. 人工边界高频振荡失稳机理的一点注记. 地震学报, 2008, 30(3): 302-306(Xie Zhinan, Liao Zhenpeng. A note for the mechanism of high frequency instability induced by absorbing boundary conditions. *Acta Seismologica Sinica*, 2008, 30(3): 302-306(in Chinese))