

自由下落猫姿态最优控制的混合优化策略¹⁾易中贵* 戈新生^{†,2)}

*(北京信息科技大学机电工程学院, 北京 100192)

†(北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

摘要 研究猫自由下落时的转体运动对探索宇航员在太空失重状态下的空间运动规律具有重要的参考价值. 针对猫自由下落时四肢先着地现象的姿态最优控制问题, 提出一种由 Gauss 伪谱法求解可行解与直接打靶法求解最优精确解相结合的混合优化策略. 首先, 根据猫在自由下落过程中的角动量守恒原理, 推导出简化后的两对称刚体系统的非完整姿态运动方程; 然后基于 Gauss 伪谱法将此无漂移系统的姿态非完整运动规划问题离散为非线性规划问题, 并在不考虑实际性能指标函数的条件下利用序列二次规划算法求解此非线性规划问题在较少节点时对应的控制变量可行解, 再通过三次样条插值获取较多节点时的控制变量值; 最后基于直接打靶法将插值得到的控制值作为序列二次规划算法的初始猜测值, 从而求解得到最优的控制输入, 再代入系统姿态运动方程, 通过数值积分得到落体猫的转体姿态运动曲线. 通过数值仿真, 求解得到的姿态运动曲线是光滑的, 能以较高的精度到达预定的目标姿态; 最优控制输入也能满足预先设计的零边界控制要求以及最大控制要求; 结果表明了此混合优化策略具有较强的鲁棒性和有效性.

关键词 自由落体猫, Gauss 伪谱法, 直接打靶法, 最优控制

中图分类号: O316 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-189

THE ATTITUDE OPTIMAL CONTROL WITH A HYBRID OPTIMAL STRATEGY FOR A FREE-FALLING CAT¹⁾Yi Zhonggui* Ge Xinsheng^{†,2)}

*(School of Mechanical & Electrical Engineering, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China)

†(School of Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract Researching the twist motion of a free fall cat has an important reference value for exploring the motion rules of astronauts under the condition of weightlessness in space. For the attitude optimal control problem of a free-falling cat which limbs is always land on floor firstly, a hybrid optimal strategy is presented, which combines the Gauss pseudo-spectral method for feasible solutions with the Direct Shooting Method for exact optimal solutions. Firstly, according to the conversation of angular momentum in the process of the cat free falling, the nonholonomic attitude motion equation of the simplified two symmetry rigid bodies can be deduced; then the attitude nonholonomic motion planning problem of non-drift system can be converted to a nonlinear programming problem by using Gauss pseudo-spectral method, and the feasible solutions of control can be solved through SQP algorithm at a lower LG points without considering the actual index function, and more nodes of control can be obtained through cubic spline interpolation; at last, with the theory of Direct Shooting Method, substituting these control values of interpolation into SQP algorithm as initial values to compute

2016-07-11 收稿, 2016-09-22 录用, 2016-09-27 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11472058).

2) 戈新生, 教授, 主要研究方向: 多体系统动力学. E-mail: gebim@vip.sina.com.

引用格式: 易中贵, 戈新生. 自由下落猫姿态最优控制的混合优化策略. 力学学报, 2016, 48(6): 1390-1397

Yi Zhonggui, Ge Xinsheng. The attitude optimal control with a hybrid optimal strategy for a free-falling cat. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(6): 1390-1397

the optimal control inputting, then attitude motion of the cat can be obtained by applying the optimal control into motion equation of system. Through numerical simulating, the attitude motion is smooth, and can reach the predetermined target location at a higher accuracy; the optimal control can satisfy the requirements of zero boundaries control and maximum control. The results demonstrate the robustness and effectiveness of the hybrid optimal strategy.

Key words free-falling cat, Gauss pseudo-spectral method, direct shooting method, optimal control

引言

随着航天科学技术的不断发展,载人航天技术作为当今世界高新技术密集的综合尖端科学技术之一,受到了越来越多的科学家和研究人员的广泛关注。早在 1992 年我国载人航天工程立项之前,就有研究人员开始探索失重状态下宇航员的空间运动规律,从而重新引起了对自由下落猫的四肢先着地现象的深入研究。对这一现象的讨论可以追溯到 19 世纪末期。Guyou 首先解释了猫在空中的转体运动^[1]。McDonald^[2]从生理学的角度详细论述了 Guyou 提出的“四肢开合”的论点。文献 [3] 提出用尾巴向反方向急速旋转从而实现猫躯体翻转的观点。不过无尾猫也能完成转体的实验推翻了这一解释。Kane 等^[4]将猫的前后脊柱简化为两个轴对称刚体,将猫的腰部作为两刚体的连接铰点,建立其运动方程,并通过数值计算发现,仿真结果与实验摄影记录十分吻合。刘延柱^[5]选取了类似 Kane 的模型,研究了猫体的非轴对称性,且重新选择角度坐标推导出的非线性微分方程存在解析积分,论述了落体猫转体运动的一般规律。Fernandes 等^[6]基于 Ritz 近似理论,针对两种双刚体三维模型的运动规划设计了控制算法,发现其中一种仿真结果与实际的猫落体轨迹是一致的。戈新生等^[7-9]基于最优控制理论,分别利用拟牛顿算法、Ritz 近似理论和样条逼近的粒子群算法研究了落体猫的非完整运动规划问题。Iwai 等^[10]将落体猫简化为由铰连接的两个轴对称圆柱体,并将模型转化为一个定义在形状空间余切丛上的端口受控哈密顿系统,在系统角动量为零时,通过对约束方程积分从而获得猫下落的姿态运动过程。Zhen 等^[11]基于 Udwardia-Kalaba 理论,把猫落体模型简化为一个约束离散动态系统,推导出 Udwardia-Kalaba 方程的显式解析形式,通过数值计算验证了猫转体的现象。

自由下落猫的转体运动方程是由角动量方程不可积而引起的一个非完整运动方程。Brockett 等^[12]最早系统地阐述了无漂移非完整系统的最优控制

问题。近年来,随着计算机技术的快速发展,伪谱法已经成为数值求解最优控制问题中的一种重要方法^[13-26]。其基本原理是通过采用全局插值多项式在一系列正交点上建立系统近似的状态变量和控制输入变量,从而把求解最优控制问题转化为求解非线性规划问题。Benson 等^[13-14]基于 Gauss 伪谱法求解最优控制问题时提出并证明了 Gauss 伪谱协态变量映射定理。2000 年 Fahroo 等^[15-16]采用 Chebyshev 伪谱法求解了一般的 Bozal 型最优控制问题并于 10 年后给出了协态变量估计的详细证明。Tang 等^[17]基于 Chebyshev-Gauss 伪谱法研究了一般的非完整控制问题并严格推导了其 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件。雍恩米等^[18-19]采用 Gauss 伪谱法求解了高超声速飞行器滑翔式再入的快速轨迹优化问题。霍明英^[20]应用 Gauss 伪谱法研究了电动帆航天器在以火星、谷神星以及太阳系边界探测任务中的轨迹优化问题。李适等^[21-22]基于 Gauss 伪谱法探讨了自由漂浮空间机器人从初始姿态到达目标姿态的最优轨迹。彭祺擘等^[23-24]采用 Gauss 伪谱法讨论了登月飞行器定点软着陆以及月面软着陆过程发生故障后的应急上升轨道优化问题。庄宇飞等^[25-26]结合粒子群算法和 Legendre 伪谱法研究了欠驱动航天器的姿态运动规划问题。

本文基于自由落体猫的转体运动方程,采用 Gauss 伪谱法和直接打靶法相结合的混合优化策略,研究下落猫的姿态最优控制问题。首先,采用 Gauss 伪谱法将猫落体的非完整运动规划问题离散为非线性规划问题,由于 Gauss 伪谱法在较少 Legendre-Gauss (LG) 点时能获得较高的精度,并对初值敏感度较低,因此选择较少节点计算控制变量的可行解;然后通过三次样条插值,按照 LG 点的分布方式求取较多节点对应的控制变量值;最后将插值得到的控制变量作为直接打靶法的初值代入 sequential quadratic programming (SQP) 算法,从而求解得到最优的控制输入,再代入动力学方程,积分便可得到状态变量的值,从而规划猫从下落时的初始位形转

体到落地时的目标位形(四肢着地)的最优姿态运动曲线,文末给出其数值仿真算例.

1 落体猫的最优控制问题

1.1 落体猫的姿态运动模型

在系统不受外力矩作用时,可以使用角动量守恒原理来推导自由落体猫在空中作转体运动时的运动学方程.猫的前后躯体分别简化为两个外形和质量分布均相同的对称刚体 B_1 和 B_2 ,并以猫的腰部 O 点作为两个刚体的铰接点(见图1).假设两刚体运动时相互之间不发生扭转,但可以在一定角度范围内任意旋转(即作圆锥运动)^[4].以 O 为原点分别建立刚体 B_i ($i = 1, 2$) 的主轴坐标系 $O - X_i Y_i Z_i$ ($i = 1, 2$), OX_i 轴过刚体 B_i 的质心 O_i 沿脊柱指向头部或者尾部的负方向, OZ_i 轴的正方向则指向猫的腹部.

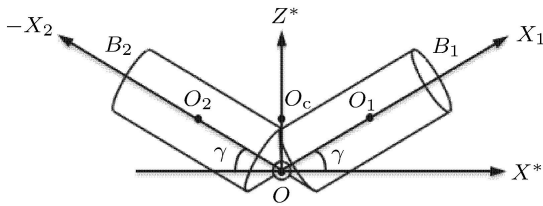
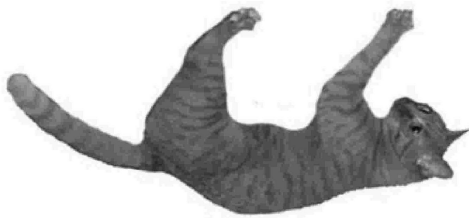


图1 猫落体的力学模型

Fig. 1 Mechanical model of a free-falling cat

选取欧拉角描述落体猫的姿态运动,设其旋转方式为1-2-1(见图2).即 $O - X_1 Y_1 Z_1$ 坐标系先绕 OX_1 轴转动 ψ 角到达 $O - X_1^* Y_1^* Z_1^*$ 坐标系,再绕 OY_1^* 转过 θ 角到坐标系 $O - X_1^\# Y_1^\# Z_1^\#$,最后绕 $OX_1^\#$ 转过 φ 角到 $O - X_2 Y_2 Z_2$. ψ, θ 和 φ 即为 $O - X_2 Y_2 Z_2$ 坐标系相对于 $O - X_1 Y_1 Z_1$ 坐标系的姿态角^[27-28].将 $O - X_1^* Y_1^* Z_1^*$ 坐标系绕 OY_1^* 轴转过 γ ($\gamma = \theta/2$) 角为 $O - X^* Y^* Z^*$,如图2所示, γ ($\gamma = \theta/2$) 角为猫的前后脊柱相对轴 OX^* 的弯曲角.再使坐标系 $O - X^* Y^* Z^*$ 绕 OX^* 轴转过 α 角到 $O - X_0 Y_0 Z_0$,即平面 Π 相对平面 Π_1 的转角,平面 Π 为猫的脊柱弯曲面,平面 Π_1 相当于猫的纵剖面,其中

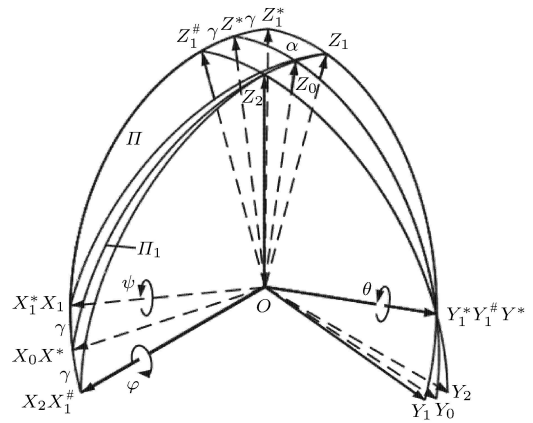


图2 姿态坐标变换

Fig. 2 Coordinates transform of attitude

α 角的定义为^[5]

$$\sin \alpha = \sin \psi / R, \quad R = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi} \quad (1)$$

经过推导^[5],得到落体猫相对系统总质心 O_c 的总动量矩 H ,再将其投影到坐标系 $O - X^* Y^* Z^*$ 的 OX^* 轴方向有

$$\begin{aligned} H_{X^*} = & [A \cos^2 \gamma + (B \sin^2 \psi + C \cos^2 \psi) \cdot \\ & \sin^2 \gamma](\dot{\phi} - \dot{\alpha}) + A \dot{\psi} \cos \gamma + \\ & (B - C) \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \psi \sin \psi \end{aligned} \quad (2)$$

式中 A, B 和 C 分别为刚体 B_i ($i = 1, 2$) 的中心主惯量矩, $\dot{\alpha}$ 可由式(1)导出.

由于猫在自由落体过程中相对系统总质心 O_c 没有力矩的作用,则系统的角动量 H 守恒.考虑猫作自由下落,有 $H \equiv 0$,从而可导出式(3)所示的姿态运动方程,式中 $\rho = (B - A)/A$, $\varepsilon = (B - C)/A$ 为猫的质量几何参数.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \{ \dot{\psi} \cos \gamma \sin \gamma [\rho + (1 - \varepsilon) \cos^2 \psi] + \\ & \dot{\gamma} \cos \psi \sin \psi (1 - \varepsilon + \rho \sin^2 \gamma) \} \sin \gamma / \\ & \{ (1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi) [1 + (\rho - \varepsilon \cos^2 \psi) \sin^2 \gamma] \} \end{aligned} \quad (3)$$

此方程即为自由下落猫的非完整姿态运动方程.

1.2 目标函数

由式(3)可知,只要能够知道受生物意识控制的弯腰规律 $\psi(t)$ 以及 $\gamma(t)$,代入式中积分一次便可得到猫落体时在空中转体规律 $\varphi(t)$.鉴于此,选取猫下落过程中脊柱轴 OX_1 沿着以 OX^* 为中心轴作圆锥运动的角速度 $\dot{\psi}(t)$ 以及脊柱弯曲的角速度 $\dot{\gamma}(t)$ 作为

优化控制输入，并记作 $\mathbf{u} = (\dot{\psi}, \dot{\gamma})^T$ 。此时系统是可控的^[6]，存在最优解 $\mathbf{u}^* \in L^2([0, T])$ ，其中 $L^2([0, T])$ 为可测向量函数 $\mathbf{u}(t), t \in [0, T]$ 构成的 Hilbert 空间。根据最小能量原理，选取猫下落过程中腰关节所消耗的能量作为优化目标函数，即

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle dt \quad (4)$$

1.3 状态约束

将落体猫的姿态角 $\mathbf{x} = (\psi, \gamma, \varphi)^T$ 取作状态变量，则其状态方程可描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (5)$$

其中状态矩阵由式 (3) 可导出

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ M & N \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} M &= \cos \gamma \sin^2 \gamma [\rho + (1 - \varepsilon) \cos^2 \psi] / \\ &\quad \{(1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi)[1 + (\rho - \varepsilon \cos^2 \psi) \sin^2 \gamma]\} \\ N &= \cos \psi \sin \psi \sin \gamma (1 - \varepsilon + \rho \sin^2 \gamma) / \\ &\quad \{(1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi)[1 + (\rho - \varepsilon \cos^2 \psi) \sin^2 \gamma]\} \end{aligned}$$

1.4 边界及控制约束

给定落体猫的初始和终端位形 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f \in \mathbf{R}^3$ (即状态边界约束)，通过目标函数寻求控制输入 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^2, t \in [0, T]^T$ ，从而可确定系统式 (5) 从 \mathbf{x}_0 转体到 \mathbf{x}_f 的姿态运动轨迹。

通常猫在下落初始瞬间以及四肢着地瞬间，控制的初末值应均为零，即 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_f = \mathbf{0}$ (控制边界约束)。另外，在下落过程中的控制量不可能无限大，其范数应是有界的，因此还需考虑 $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq u_{\max}$ 。

2 混合优化策略

2.1 Gauss 伪谱法

Gauss 伪谱法是通过一系列变换，将连续最优控制问题离散为具有代数约束的参数优化问题，即非线性规划问题^[29]，主要通过以下步骤实现。

(1) 时域变换

将姿态运动规划问题的时间区间 $[t_0, t_f]$ 转换为 $[-1, 1]$ ，定义时间变量 t 为

$$t = \frac{t_0 + t_f}{2} - \frac{t_0 - t_f}{2} \tau \quad (7)$$

式中 τ 为定义在区间 $[-1, 1]$ 上的无量纲时间。

(2) 状态变量与控制变量的离散

取 K 个 LG 点以及 $\tau_0 = -1$ 作为 Gauss 伪谱法的节点，并构成 $K+1$ 个 Lagrange 插值多项式的基函数 $L_i(\tau) (i = 1, 2, \dots, K+1)$ 来近似状态变量，即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &\approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i) = \\ &\sum_{i=0}^K \left[\left(\prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \right) \mathbf{X}(\tau_i) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

而控制变量的近似离散则仅以 LG 点作为 K 个 Lagrange 多项式的插值节点， $\tilde{L}_i(\tau) (i = 1, 2, \dots, K)$ 为插值基函数，即

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}(\tau_i) \quad (9)$$

(3) 终端状态约束的离散

终端状态可通过对动力学方程在区间 $[-1, 1]$ 上积分，再将其离散并用 Gauss 积分来近似可得

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (10)$$

其中 $\mu_k = \int_{-1}^1 L_k(\tau) d\tau$ 为 Gauss 权重； τ_k 为 LG 点。

(4) 动力学微分方程的转换

状态变量的导数可通过对式 (8) 中的连续时间 τ 求导得到，再代入时间离散点有

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) \quad (11)$$

可用一个微分近似矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{K \times (K+1)}$ 来确定式中拉格朗日多项式的微分

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0, l \neq i}^K \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^K \tau_k - \tau_j}{\prod_{j=0, j \neq i}^K \tau_i - \tau_j} \quad (12)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, K, i = 0, 1, \dots, K$ 。将式 (12) 代入式 (11) 便可以得到状态约束方程的离散表达形式

$$\sum_{i=0}^K D_{ki} \mathbf{X}_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) = \mathbf{0} \quad (13)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, K$.

(5) 目标函数

用 Gauss 积分来计算最优控制问题中目标函数的积分项, 可得离散形式的近似目标函数为

$$J = \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (14)$$

落体猫连续最优控制问题通过 Gauss 伪谱法离散后与状态和控制边界约束所构成的一般非线性规划问题可表述为

$$\left. \begin{array}{l} \min J = F(\mathbf{y}) \\ \text{s.t. } h_i(\mathbf{y}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 3K + 13 \\ g_i(\mathbf{y}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2K \end{array} \right\} \quad (15)$$

式中, J 为式 (14) 离散的性能指标函数, h 为包含式 (10)、式 (13)、姿态边界以及控制边界所描述的等式约束, g 为控制变量最大限约束, \mathbf{y} 则为各个插值点上包含状态和控制的设计变量.

2.2 直接打靶法

直接打靶法是直接法中仅有离散控制变量的一种参数优化方法^[30], 它主要是将时间连续的最优控制问题离散化, 从而把原问题转换为求解一个非线性规划问题. 具体的离散后的时间如式 (16) 所示, 以离散时间节点上相对应的控制变量 (17) 为设计变量, 相邻时间节点之间的控制变量的值可通过三次样条插值获取. 从而当知道一组设计变量的值后, 插值就可以得到控制的具体表达式, 再代入状态方程积分便可得到状态变量, 进而可求解性能指标函数以及约束方程. 上述离散过程的数学描述为

$$t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_K = t_f \quad (16)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_K) \quad (17)$$

离散时间不要求一定是具体的实际时间, 可以无量纲时间以及能量参数等, 它需要由描述具体模型运动的相对独立变量来决定. 对于求解最小机动时间的优化控制问题, 只需将末端时间与控制变量一起作为设计变量即可, 此时离散时间过程便是一个优化过程中的动态历程.

2.3 优化策略及流程

从理论上讲, 可直接利用 SQP 算法求解直接打靶法所描述的非线性规划问题. 但实际应用中却存

在如下困难: 当选取较多 LG 点时, 设计变量的数目相当庞大. 对于数目庞大的设计变量, 设定 SQP 算法的求解初值就会变成是一件非常繁琐的工作, 且不恰当的初值可能使问题收敛不到可行解; 另外, SQP 算法不具备全局寻优能力, 最终所求得的优化解对设计变量的初始猜测值具有一定的依赖性, 一般只能收敛到靠近初值附近的局部最优解. 针对这些问题, 采取如下的串行优化策略.

(1) Gauss 伪谱法计算可行解

可行解计算是指不直接搜寻满足所有约束条件 (包括等式和不等式约束) 的最优解, 是将非线性规划问题中的等式约束变换后作为目标函数, 不考虑实际的性能指标函数, 从而把求解一个有等式约束的非线性规划问题转换成无等式约束的非线性规划问题来求解, 即把式 (15) 转化为

$$\left. \begin{array}{l} \min J = \text{sqrt} \left(\sum_{i=1}^{3K+13} h_i(\mathbf{y})^2 \right) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{y}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2K \end{array} \right\} \quad (18)$$

式中 \mathbf{y} 为插值点上包含状态和控制的设计变量.

由于 Gauss 伪谱法在较少节点时能获得较高的精度, 并对初值敏感度较低, 而且此时需要赋初始猜测值的设计变量较少, 因此先选择较少节点 K_1 , 采用 SQP 算法计算由 Gauss 伪谱法离散后得到的非线性规划问题 (式 (18)), 得到控制变量的可行解.

(2) 直接打靶法计算最优精确解

以上述第一步中计算得到的 K_1 个控制离散点作为插值节点进行三次样条插值拟合, 从而得到控制变量的具体表达式, 再将时间段 $[0, T]$ 按照 LG 点的分布方式离散为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K_2} < t_{K_2+1} = T$, 代入控制表达式可求得 $K_2 + 2$ 个离散时间点上对应的控制离散值 $\mathbf{U}(\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{K_2}, \mathbf{u}_{K_2+1} = \mathbf{u}_f)$, 然后将此插值得到的 \mathbf{U} 作为 SQP 算法的初始值求解满足末端姿态约束以及控制约束条件下的非线性规划问题, 从而得到更高精度的最优控制输入. 由上述, 落体猫的最优控制问题离散后的非线性规划问题为

$$\left. \begin{array}{l} \min J = F(\mathbf{U}) \\ \text{s.t. } \phi(\mathbf{X}_f(\mathbf{U})) = 0 \\ h(\mathbf{U}) = 0 \\ g(\mathbf{U}) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (19)$$

式中, J 为式 (14) 描述的性能指标函数, ϕ 为末端姿态约束, h 为控制边界约束, g 为控制变量最大限约束, $\mathbf{U}(u_0 = u_0, u_1, \dots, u_{k_2}, u_{k_2+1} = u_f)$ 则为离散控制设计变量.

最后将得到的最优控制代入式 (5), 通过积分便可得到最优的状态变量 $x(t)$, 即姿态运动曲线. 具体的串行优化策略流程图如图 3 所示.

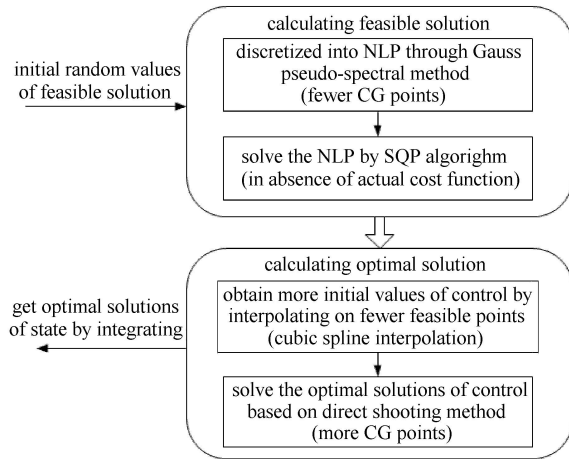


图 3 基于 Gauss 伪谱法和直接打靶法的自由落体猫姿态串行优化流程

Fig. 3 The flow chart of free-falling cat attitude optimization via Gauss pseudo-spectral method and direct shooting method

针对 Gauss 伪谱法和直接打靶法两种方法, 最优控制问题离散后的非线性规划问题 (式 (18) 和式 (19)), 均采用 Matlab 软件的 SQP 算法求解; 而在运算式 (19) 过程中的末端姿态与最后的最优姿态的求解采用的是 Runge-Kutta 求积公式.

3 数值仿真

假设猫在自由下落过程中, 其脊柱仅弯曲, 前后体之间不会发生相互扭转的情况; 其次猫的脊柱前弯, 在旋转过程中弯曲角 γ 的初始和终端值保持不变. 当猫的前躯体完成一圈转体运动时, 整个系统正好向相反方向转过 π , 猫完成一周翻转运动相当于 ψ 从 0 变化到 2π , 此时 φ 也刚好从 0 变化到 π . 根据实验测定^[4], $\rho \approx 3, |\varepsilon| \ll 1$. 本文的仿真算例中取 $\rho = 3, \varepsilon = 0.01$. 边界条件设置为 $\mathbf{X}_0 = [0 \ -\pi/6 \ 0]^T$, $\mathbf{X}_f = [2\pi \ \pi/6 \ \pi]^T$, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_f = [0 \ 0]^T$, $\mathbf{U}_{\max} = 7$.

优化算法中的性能指标函数为猫下落时腰关节的耗散能. 采用串行优化策略, 可行解选取的 LG 点个数为 6, 最优解选取 40 个. 设置时间 $T = 1\text{ s}$. 可行

解初始猜测值是采用 Matlab 的随机函数在 0~1 之间随机生成的 1×40 矩阵. 经过数值计算, 仿真结果见图 4~图 8 所示, 其中图 4~图 6 为猫在自由下落过程中转体运动的优化轨迹, 曲线的初末两个端点分别代表猫下落的初始和落地位形, 从姿态轨线还可以看到, 猫在空中的翻转姿态运动是平稳的且光滑连续的; 而图 7 和图 8 则为落体猫腰关节的优化控

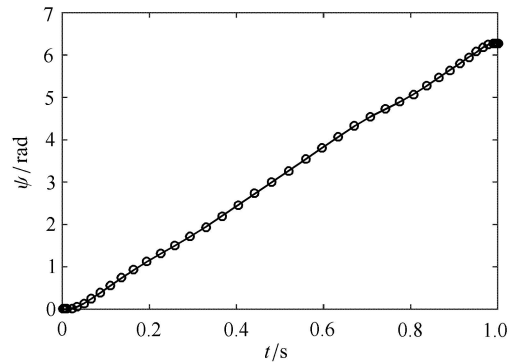


图 4 猫下落 ψ 角姿态运动轨迹

Fig. 4 Optimal trajectory for the angle ψ

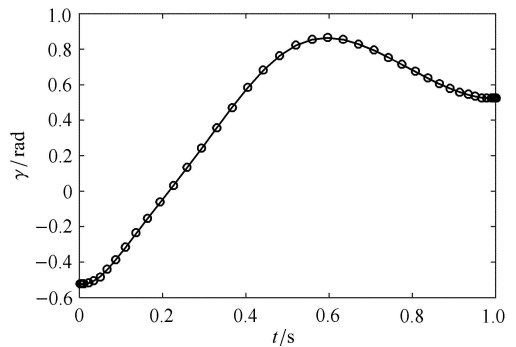


图 5 猫下落 γ 角姿态运动轨迹

Fig. 5 Optimal trajectory for the angle γ

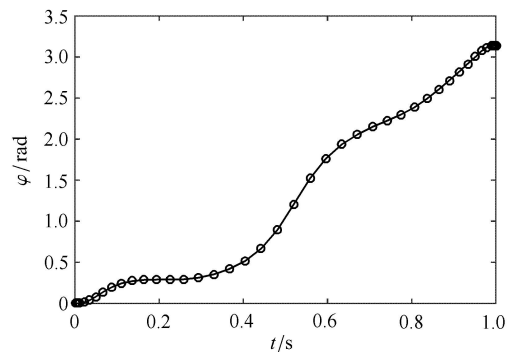


图 6 猫下落 φ 角姿态运动轨迹

Fig. 6 Optimal trajectory for the angle φ

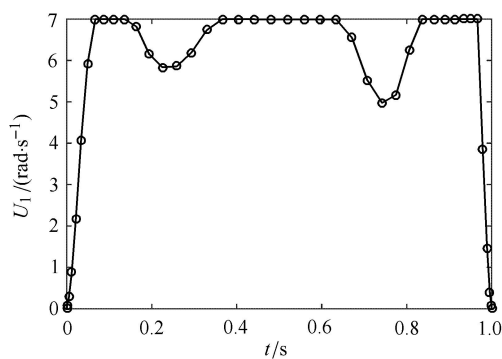
图7 猫下落时腰关节最优控制输入规律 U_1

Fig. 7 The optimum control input for a free-falling cat

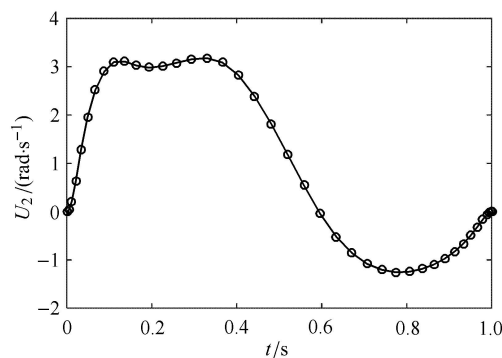
图8 猫下落时腰关节最优控制输入规律 U_2

Fig. 8 The optimum control input for a free-falling cat

制输入,从图中的曲线可以看出,其边界值均为零,且都在控制的最大限范围之内,能满足预先设计的要求.图5代表落体猫的脊柱弯曲角 γ 从 -30° 的变化到 $+30^\circ$.数值仿真得到的自由落体猫的姿态运动曲线与实验摄影记录是吻合的^[4].

为验证文中所提出的串行优化方法的可行性以及鲁棒性,采用相同的参数设置运行程序6次,求解运算是在CPU频率为3.3GHz,内存为4.0G的windows7计算机上进行.在可行解计算中:平均迭代次数为188.333次;目标函数的平均值为 1.006×10^{-4} ;所有离散解取绝对值后的最大值为6.999.表明此时的解在式(15)中,不仅能够满足不等式约束,还能很好地满足等式约束方程,属于可行解.而最优解计算中的变化状况如表1所示,表中末端误差为末端姿态的最大误差;运行时间为包括可行解计算在内的CPU总运行时间,单位为秒.

从表1中记录的数据可看出,对于每次运算均采用不同的随机初始猜测值,与最优解相关参数的变化幅度均不大,由此可见,本文提出的串行优化策略具有较好的鲁棒性和可行性.

表1 最优解相关参数对于不同初值的变化状况

Table 1 The change of relevant parameters of optimal solution in different initial values

Operating times	1	2	3	4	5	6
iterating times	108	104	111	105	102	107
cost function	45.889	45.836	45.476	45.420	45.779	45.863
terminal error	4.441×10^{-16}	1.776×10^{-15}	8.882×10^{-16}	2.220×10^{-15}	4.885×10^{-15}	1.776×10^{-15}
running time	1663.676	1679.324	1608.582	1611.519	1647.878	1668.262

4 结论

本文结合 Gauss 伪谱法和直接打靶法求解了自由落体猫空间转动的姿态优化问题.采用 SQP 算法求解直接打靶法离散后的非线性规划问题,并针对 SQP 算法对初始猜测值敏感的特点,文中提出基于 Gauss 伪谱法求解可行解与直接打靶法求解最优精确解的串行优化策略,通过数值仿真结果表明:该方法克服了单纯伪谱法求解最优控制问题对初值的敏感性问题,串行优化策略不仅对初值具有很好的鲁棒性,并且提高了求解精度.本文所做的工作虽然是针对自由落体猫的姿态优化控制问题,但提出的 Gauss 伪谱法和直接打靶法相结合的串行优化策略

也为其他优化控制研究提供了一种求解方法.

参 考 文 献

- 1 贾书惠.从猫下落谈起.北京:高等教育出版社,1990(Jia Shuhui. Talking from the Falling Cat. Beijing: Higher Education Press, 1990(in Chinese))
- 2 McDonald DA. How does a falling cat turn over? *American Journal Physiology*, 1955, 129: 34-35
- 3 Лойцянский АИ. Теоретическмеханик. Москва: Санкм-Пемербурз, 1953
- 4 Kane TR, Scher MP. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon. *International Journal Solids and Structures*, 1969, 5(5): 663-670
- 5 刘延柱.自由下落猫的转体运动.力学学报,1982,14(4): 388-393(Liu Yan Zhu. On the turning motion of a free-falling cat. *Acta*

- Mechanica Sinica*, 1982, 14(4): 388-393(in Chinese))
- 6 Fernandes C, Gurvits L, Li Z. Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(3): 450-463
 - 7 戈新生, 刘延柱, 魏宝刚. 基于拟牛顿算法的自由下落猫的非完整运动规划. *系统仿真学报*, 2006, 18(5): 1123-1126(Ge Xinsheng, Liu Yanzhu, Wei Baogang. Nonholonomic motion planning for free-falling cat using Quasi-Newton method. *Journal of System Simulation*, 2006, 18(5): 1123-1126(in Chinese))
 - 8 Ge XS, Chen LQ. Optimal control of nonholonomic motion planning for a free-falling cat. *Applied Mathematics & Mechanics*, 2007, 28(5): 601-607
 - 9 Ge XS, Guo ZX. Nonholonomic motion planning for a free-falling cat using spline approximation. *Science China Physics Mechanics & Astronomy*, 2012, 55(11): 2100-2105
 - 10 Iwai T, Matsunaka H. The falling cat as a port-controlled Hamiltonian system. *Journal of Geometry & Physics*, 2012, 62(2): 279-291
 - 11 Zhen SC, Huang K, Zhao H, et al. Why can a free-falling cat always manage to land safely on its feet. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 79(4): 2237-2250
 - 12 Brockett RW, Dai L. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability. *Nonholonomic Motion Planning*, Springer US, 1993: 1-21
 - 13 Benson DA. A Gauss Pseudo-spectral Transcription for Optimal Control. [PhD Thesis]. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2005
 - 14 Benson DA, Huntington GT, Thorvaldsen TP, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2006, 29(6): 1435-1439
 - 15 Fahroo F, Ross IM. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudo-spectral method. *Proceedings of the American Control Conference*, 2000, 6: 3860-3864
 - 16 Gong Q, Ross IM, Fahroo F. Costate computation by a chebyshev pseudo-spectral method. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2010, 33(2): 623-628
 - 17 Tang XJ, Wei JL, Chen K. A Chebyshev-Gauss pseudo-spectral method for solving optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(10): 1778-1787
 - 18 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化. *宇航学报*, 2008, 29(6): 1766-1772 (Yong Enmi, Tang Guojin, Chen Lei. Rapid trajectory optimization for hypersonic reentry vehicle via gauss pseudospectral method. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(6): 1766-1772(in Chinese))
 - 19 雍恩米. 高超声速滑翔式再入飞行器轨迹优化与制导方法研究. [博士论文]. 长沙: 国防科学技术大学, 2008 (Yong Enmi. Study on trajectory optimization and guidance approach for hypersonic glide-reentry vehicle. [PhD Thesis]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008(in Chinese))
 - 20 霍明英. 电动帆航天器动力学、控制及轨迹优化研究. [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015 (Huo Mingying. Reserch on dynamics control and trajectory optimization for electric sails. [PhD Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015 (in Chinese))
 - 21 李适. 空间机器人路径优化与鲁棒跟踪控制. [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013(Li Shi. Path optimization and robust tracking control for space manipulator. [PhD Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013(in Chinese))
 - 22 Li S, Duan GR. A pseudo-spectral method for trajectory optimization of free-floating space manipulator. *Chinese Control Conference*, 2012: 2395-2399
 - 23 彭祺攀, 李海阳, 沈红新. 基于高斯——伪谱法的月球定点着陆轨道快速优化设计. *宇航学报*, 2010, 31(4): 1012-1016 (Peng Qibo, Li Haiyang, Shen Hongxin. Rapid lunar exact-landing trajectory optimization via gauss pseudo-spectral method. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(4): 1012-1016 (in Chinese))
 - 24 彭祺攀, 张海联. 载人月面着陆过程的应急上升轨道优化设计. *载人航天*, 2015(2): 187-192 (Peng Qibo, Zhang Hailian. Optimization of lunar emergency design ascent trajectory during manned lunar landing. *Manned Spaceflight*, 2015(2): 187-192 (in Chinese))
 - 25 庄宇飞, 马广富, 黄海滨. 欠驱动刚性航天器时间最优轨迹规划设计. *控制与决策*, 2010, 25(10): 1469-1473 (Zhuang Yufei, Ma Guangfu, Huang Haibin. Time-optimal motion planning of an underactuated rigid spacecraft. *Control and Decision*, 2010, 25(10): 1469-1473 (in Chinese))
 - 26 Zhuang Y, Huang H. Time-optimal trajectory planning for underactuated spacecraft using a hybrid particle swarm optimization algorithm. *Acta Astronautica*, 2014, 94(2): 690-698
 - 27 刘延柱, 潘振宽, 戈新生. 多体系统动力学 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2014 (Liu Yanzhu, Pan Zhenkuan, Ge Xinsheng. *Dynamics of Multibody Systems* (second edition). Beijing: The Higher Education Press, 2014 (in Chinese))
 - 28 Shabana AA. *Dynamics of multibody systems-second edition. ISBN*, 1998, 56(1): 235-236
 - 29 唐国金, 罗亚中, 雍恩米. 航天器轨迹优化理论、方法及应用. 北京: 科学出版社, 2012 (Tang Guojin, Luo Yazhong, Yong Enmi. *Spacecraft Trajectory Optimization Theory, Method and Application*. Beijing: Science Press, 2012 (in Chinese))
 - 30 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述. *宇航学报*, 2008, 29(2): 397-406(Yong Enmi, Chen Lei, Tang Guojin. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(2): 397-406(in Chinese))