向量空间

1　向量空间和线性变换

定义1. 设 F 是一个域，V 是一个 Abel 群（用加法记它的群运算）。假定有一个数乘运算

$$F \times V \to V, (a, u) \mapsto au$$

满足以下条件：

1）$1u = u$ 对任意 $u \in V$ 成立；

2）$(ab)u = a(bu)$ 对任意 $a, b \in F, u \in V$ 成立；

3）$(a+b)u = au + bu$ 对任意 $a, b \in F, u \in V$ 成立；

4）$a(u+w) = au + aw$ 对任意 $a \in F, u, w \in V$ 成立。

则称 V 为域 F 上的一个向量空间。

定义2. 1）域 F 上的向量空间 V 中一个向量集合 S 称为是线性无关的，若对 S 中任意 n 个不同的向量 $u_1, \ldots, u_n (n > 0)$, 及 $c_1, \ldots, c_n \in F \backslash \{0\}$, 都有

$$c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \neq 0.$$

2）如果 S 是 V 中一个向量集合，对任何 $w \in V$ 都存在$c_1, \ldots, c_n \in F, u_1, \ldots, u_n \in S$ 使$w = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ 则称 V 由 S 张成。

3）一个张成整个向量空间的线性无关集合称为该向量空间的一组基。基中的元素个数叫做向量空间的维数，记为 $\dim(V)$.

如果一个向量空间可由有限个向量张成，那么基存在且同一空间不同的基具有相同的元素个数。如果一个向量空间不能由有限个向量张成，则它是无限维向量空间。

设 V 是一个有限维向量空间，取定 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$. 那么 V 中的每一个向量 u 都唯一地表示成 $e_1, \ldots, e_n$ 的线性组合：

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n.$$

这给出了 V 和 n 维列向量空间（或行向量空间）的一一对应，这个对应与基的选取有关。

向量空间 V 的一个对加法和数乘封闭的子集 W 叫做 V 的一个子空间。

设 V_1, V_2 是同一个域 F 上的两个向量空间，从 V_1 到 V_2 的一个映射 f 是线性映射若 $f(au+bv)=af(u)+bf(v)$ 对任意 $a,b\in F$ 和任意 $u,v\in V_1$ 成立。线性映射也叫作向量空间间的同态，又可叫做线性变换，在泛函分析中也叫线性算子，在代数中有时也叫自同态(endomorphism)。一个自同态是双射时就是同构。

设 f 是有限维向量空间 V 上的一个线性变换。取定 V 的一组基$e_1, \ldots, e_n$ 后，f 就确定了域 F 上的一个 $n \times n$ 矩阵。任意域 F 上的矩阵的运算法则和数域上的矩阵一样，只不过现在矩阵元素的四则运算按F 中的运算进行。关于矩阵的秩，行列式等一些概念和结论都可以照搬。

V 的可逆线性变换在全体在复合运算下构成一个群，记作 $GL(V)$. 如果$n = \dim(V)$, 则 $GL(V)$ 和 $GL_n(F)$ 是同构的，后者是 F 上所有$n \times n$ 可逆矩阵所构成的一般线性群。

关于线性方程组、特征多项式、特征值和特征向量的理论在任意域上都成立。

除了群、环、域、向量空间外，还有一种常见的代数结构：设 A 是个环，若 A 含有一个域 F 作为它的子环，并且 F 中的幺元也是 A 中的幺元，则 A 叫做一个 F-代数。比方说，域 F 上 $n \times n$ 矩阵全体构成的环 $M_n(F)$ 就是一个 F-代数。

任何一个 F-代数 A 都可以看成域 F 上的一个向量空间，只要将数乘运算就按环中的乘法来定义就可以了。假定一个域 L 包含另一个域 F, 则 L 就是一个F-代数，其背后隐藏了一个 F-向量空间的结构。

例1. 设 F 是一个域。令 P 为 F 中的无穷序列构成的集合，令 Q 为 P 中只有有限多项不等于零的序列全体构成的子集。在 P 中按分量定义加法，则 P 构成一个 Abel 群， Q 是它的子群。再按

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1+a_1b_2, a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, \ldots)$$

定义 P 中的乘法。则 P 构成一个整区，而 Q 是它的子环。由于

$$F \to P, a \mapsto (a, 0, 0, \ldots)$$

是一个单同态。所以 P 和 Q 都是 F 代数。容易看出，$Q \cong F[x]$.

P 叫做 Formal power series ring.

引理1.1. 设 p 是一个素数， G 是一个 Abel 群，它的每个非零元都是 p 阶的，则 G 是有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间。

证明：我们知道 $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$. 对任意 $\bar{i} \in \mathbb{F}_p$ 和 $u \in G$, 定义数乘运算 $\bar{i}u = iu$. 我们来验证在这个数乘运算下 G 成为向量空间。

1）$\bar{1}u = 1u = u$ 是显然的；

2）对任意 $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{F}_p$, 乘积$\bar{i}\bar{j} = \bar{k}$, 其中 $k = ij + rp$, r 是一个整数。因此$(\bar{i}\bar{j})u = ku = (ij + rp)u$. 由于 u 的阶是 1 或 p,因此 $rpu = 0$. 这样便有 $(\bar{i}\bar{j})u = iju = \bar{i}(\bar{j}u)$.

3）用同样方法可证 $(\bar{i} + \bar{j})u = \bar{i}u + \bar{j}u$.

4）$\bar{i}(u + v) = i(u + v) = iu + iv = \bar{i}u + \bar{i}v$. □

例2. 设 p 是一个素数，$A = \mathbb{Z}/(p^2) \oplus \mathbb{Z}/(p^2) \oplus \mathbb{Z}/(p^3)$. 计算 A 中阶为 p^2 的非循环子群的个数。

解：A 中的元素可以表示成 (a, b, c) 的形式，其中 $a, b \in \mathbb{Z}/(p^2), c \in \mathbb{Z}/(p^3)$, 它的阶等于 $\max\{o(a), o(b), o(c)\}$. 这里 $o(a)$ 代表元素 a 的阶。一个 p^2 阶非循环子群是两个 p 阶循环子群的直和，除了 0 它只能含 p 阶元。而 A 中的 p 阶元和一阶元合在一起恰好有 p^3 个，按照引理1.1它们构成 $\mathbb{F}_p$ 上的一个三维向量空间 V.

V 的任何一个二维子空间是一个 p^2 的非循环子群。反过来，一个p^2 的非循环子群也是 V 的子空间，这是因为数乘运算实际上就是连加运算。这样我们把问题转化成下列问题：含 p 个元素的有限域上三维空间有多少个二维子空间。这变成了线性代数的问题。

方法一：

一个二维空间由两个线性无关的向量$[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ 张成。第一个向量是非零向量，共有$p^3 - 1$ 中可能。第二个向量不能是第一个向量的倍向量，故剩下 $p^3 - p$ 种可能。这样由两个线性无关的有序向量组的总数是 $(p^3-1)(p^3-p)$. 设 $[a_1, a_2, a_3], [b_1, b_2, b_3]$ 线性无关，$[c_1, c_2, c_3], [d_1, d_2, d_3]$ 线性无关。它们张成相同的二维子空间当且仅当存在一个非异矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

使

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

用与上面同样方法算得 P 共有 $(p^2-1)(p^2-p)$ 种可能。这样二维子空间的总数是

$$\frac{(p^3-1)(p^3-p)}{(p^2-1)(p^2-p)} = p^2 + p + 1.$$

方法二：

三维空间的每个二维子空间是一个非零齐次线性方程的解空间。设

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

和

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

是两个齐次线性方程，它们有相同的解空间当且仅当存在非零 $\lambda \in \mathbb{F}_p$ 使

$$(a_1, a_2, a_3) = \lambda(b_1, b_2, b_3).$$

这样二维子空间的总数是

$$\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1.\square$$

作业：第66 页1，2，3

2 商空间

设 V 是一个域 F 上的一个向量空间，W 是 V 的一个子空间。将 V 看成加法群，W 是 V 的正规子群，因此商群 V/W 是有意义的。我们希望在 V/W 上再定义数乘运算使之成为 F 上的一个向量空间。

设 $a \in F, \bar{x} \in V/W$, 其中 $x \in V$. 定义

$$a\bar{x} = \overline{ax}.$$

假定 x' 是 $\bar{x}$ 的另一个代表元，则 $x' - x \in W$. 因此$ax' - ax = a(x' - x) \in W$. 这表明 $\overline{ax'} = \overline{ax}$. 所以以上定义的 $a\bar{x}$ 不依赖于代表元的选取。

很容易验证，V/W 在这个运算下形成 F 上的一个向量空间，称为 V 关于 W 的**商空间**(quotient space).

设 $w_1,\dots,w_r$ 是子空间 W 的一组基。将它扩充成 V 的基$w_1,\dots,w_r,u_{r+1},\dots,u_n$.

命题2.1. $\bar{u}_{r+1},\dots,\bar{u}_n$ 是 V/W 的一组基。因此$\dim(V/W)=\dim(V)-\dim(W)$.

证明：假定 $a_{r+1},\dots,a_n\in F$ 使

$$a_{r+1}\bar{u}_{r+1}+\cdots+a_n\bar{u}_n=\bar{0}.$$

则

$$a_{r+1}u_{r+1}+\cdots+a_nu_n\in W.$$

故

$$a_{r+1}u_{r+1}+\cdots+a_nu_n=b_1w_1+\cdots+b_rw_r.$$

由此得

$$-b_1w_1-\cdots-b_rw_r+a_{r+1}u_{r+1}+\cdots+a_nu_n=0.$$

根据 $w_1,\dots,w_r,u_{r+1},\dots,u_n$ 的线性无关性推得

$$a_{r+1}=\cdots=a_n=0.$$

这证明了 $\bar{u}_{r+1},\dots,\bar{u}_n$ 在中线性无关。

设 $\bar{x}\in V/W$. 则存在 $a_1,\dots,a_n\in F$ 使

$$x=a_1w_1+\cdots+a_rw_r+a_{r+1}u_{r+1}+\cdots+a_nu_n.$$

于是

$$\bar{x}=a_{r+1}\bar{u}_{r+1}+\cdots+a_n\bar{u}_n.$$

这表明 V/W 中任意一个元素可以表示成$\bar{u}_{r+1},\dots,\bar{u}_n$ 的一个线性组合。 □

设 f 是 V 的一个线性变换，一般情况下 f 不能诱导出商空间V/W 的线性变换。

命题2.2. 如果 W 是 f 的不变子空间，即 $f(u) \in W$ 对任意 $u \in W$ 成立。令

$$\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

则 $\bar{f}$ 是 V/W 的线性变换。

证明：最重要的是验证定义的合理性，即 $\overline{f(x)}$ 和代表元x 的选取无关。

设 x' 是 $\bar{x}$ 的另一个代表元。则 $x' - x \in W$. 由于 W 是f 的不变子空间，$f(x' - x) \in W$. 因此$\overline{f(x')} = \overline{f(x)}$. 所以运算$\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ 是合理的。

剩下验证工作只是例行公事。□

设 $u_1, \ldots, u_n$ 是 V 的基，其中前 r 个向量$u_1, \ldots, u_r$ 是 f 的不变子空间 W 的基。在这组基下 f 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

其中 A, C 分别是 r 阶和 $n-r$ 阶方阵。我们已经知道 A 是 $f|_W$ 在基 $u_1, \ldots, u_r$ 下的方阵。容易看出 C 是 f 在 V/W 上诱导的线性变换的方阵。

作业：第68 页1