欢迎选听

我的信息

朱胜林

办公室：	光华东楼 1708
办公电话：	55664896
办公时间：	周二下午 1：30 – 3：30
电子邮件：	mazhusl@fudan.edu.cn
个人主页：	homepage.fudan.edu.cn/~zhusl
本课程主页：	jpkc.fudan.edu.cn/s/100/

高等代数

朱胜林

线性映射的概念

在微积分中，我们接触到很多映射的概念，当讨论线性空间之间的映射时，一类保持线性空间结构定义的运算起着很重要的作用，我们称之为线性变换。

例

线性映射的概念

在微积分中，我们接触到很多映射的概念，当讨论线性空间之间的映射时，一类保持线性空间结构定义的运算起着很重要的作用，我们称之为线性变换。

例

1. 设 K 是一个数域，$V = K_n$ 和 $U = K_m$ 分别是 K 上的 n 维、m 维列向量空间，$A_{m\times n}$ 为 K 上的一个矩阵。$\varphi : V \to U$，$x \mapsto Ax$ 是一个即保持向量的加法，也保持向量的数乘，我们通常称之有线性性质。

线性映射的概念

在微积分中，我们接触到很多映射的概念，当讨论线性空间之间的映射时，一类保持线性空间结构定义的运算起着很重要的作用，我们称之为线性变换。

例

1. 设 K 是一个数域，$V=K_n$ 和 $U=K_m$ 分别是 K 上的 n 维、m 维列向量空间，$A_{m\times n}$ 为 K 上的一个矩阵。$\varphi: V\to U$，$x\mapsto Ax$ 是一个即保持向量的加法，也保持向量的数乘，我们通常称之有线性性质。
2. 设 $a<b$ 为实数，以 $V=C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 区间上的连续函数全体，按通常的函数的加法和数乘，V 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。$\varphi=\int_a^b\cdot dx: C[a,b]\to\mathbb{R}$，$f(x)\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$，我们通常也说积分有线性性质。

线性映射的概念

在微积分中，我们接触到很多映射的概念，当讨论线性空间之间的映射时，一类保持线性空间结构定义的运算起着很重要的作用，我们称之为线性变换。

例

1. 设 K 是一个数域，$V=K_n$ 和 $U=K_m$ 分别是 K 上的 n 维、m 维列向量空间，$A_{m\times n}$ 为 K 上的一个矩阵。$\varphi: V\to U$，$x\mapsto Ax$ 是一个即保持向量的加法，也保持向量的数乘，我们通常称之有线性性质。
2. 设 $a<b$ 为实数，以 $V=C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 区间上的连续函数全体，按通常的函数的加法和数乘，V 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。$\varphi=\int_a^b \cdot dx: C[a,b]\to\mathbb{R}$，$f(x)\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$，我们通常也说积分有线性性质。
3. 以 $C^1(a,b)$ 记 (a,b) 区间上的一阶可导函数全体构成的 $\mathbb{R}$ 上线性空间，$\varphi=\dfrac{d}{dx}: C^1(a,b)\to F(a,b)$，$f(x)\mapsto f'(x)$，也具有线性性质，这里 $F(a,b)$ 记 (a,b) 上的函数全体构成的 $\mathbb{R}$ 上线性空间。

线性映射的概念

在微积分中，我们接触到很多映射的概念，当讨论线性空间之间的映射时，一类保持线性空间结构定义的运算起着很重要的作用，我们称之为线性变换。

例

1. 设 K 是一个数域，$V=K_n$ 和 $U=K_m$ 分别是 K 上的 n 维、m 维列向量空间，$A_{m\times n}$ 为 K 上的一个矩阵。$\varphi: V\to U$，$x\mapsto Ax$ 是一个即保持向量的加法，也保持向量的数乘，我们通常称之有线性性质。
2. 设 $a<b$ 为实数，以 $V=C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 区间上的连续函数全体，按通常的函数的加法和数乘，V 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。$\varphi=\int_a^b\cdot dx: C[a,b]\to\mathbb{R}$，$f(x)\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$，我们通常也说积分有线性性质。
3. 以 $C^1(a,b)$ 记 (a,b) 区间上的一阶可导函数全体构成的 $\mathbb{R}$ 上线性空间，$\varphi=\dfrac{d}{dx}: C^1(a,b)\to F(a,b)$，$f(x)\mapsto f'(x)$，也具有线性性质，这里 $F(a,b)$ 记 (a,b) 上的函数全体构成的 $\mathbb{R}$ 上线性空间。
4. 平面 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 上的绕原点逆时针旋转 θ 角度，构成的映射也具有线性性质。

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

定义 (线性映射)

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi: V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U = V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U = V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

数域 K 上的线性空间 V 到 V 的线性映射的全体记为 $\mathcal{L}(V,U)$，V 上的线性变换全体记为 $\mathcal{L}(V)$。

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U = V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

数域 K 上的线性空间 V 到 V 的线性映射的全体记为 $\mathcal{L}(V,U)$，V 上的线性变换全体记为 $\mathcal{L}(V)$。

定义

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi : V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $(\forall \alpha,\beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U = V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

数域 K 上的线性空间 V 到 V 的线性映射的全体记为 $\mathcal{L}(V,U)$，V 上的线性变换全体记为 $\mathcal{L}(V)$。

定义

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，

1. 若 φ 是 1-1 的：即 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 意味着 $x = y$，则称 φ 为单射；

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi: V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U=V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

数域 K 上的线性空间 V 到 V 的线性映射的全体记为 $\mathcal{L}(V,U)$，V 上的线性变换全体记为 $\mathcal{L}(V)$。

定义

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，

1. 若 φ 是 1-1 的：即 $\varphi(x)=\varphi(y)$ 意味着 $x=y$，则称 φ 为单射；
2. 若 φ 是到上的：即 $\{\varphi(x) \mid x \in V\}=U$，则称 φ 为满射；

定义（线性映射）

设为数域 K 上的线性空间，$\varphi: V \to U$ 为映射，且满足下列条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $(\forall \alpha, \beta \in V)$;
2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V, k \in K)$,

则称 φ 为（由 V 到 U 的）线性映射。当 $U=V$ 时，称 φ 为 V 上的线性变换。

数域 K 上的线性空间 V 到 V 的线性映射的全体记为 $\mathcal{L}(V,U)$，V 上的线性变换全体记为 $\mathcal{L}(V)$。

定义

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，

1. 若 φ 是 1-1 的：即 $\varphi(x)=\varphi(y)$ 意味着 $x=y$，则称 φ 为单射；
2. 若 φ 是到上的：即 $\{\varphi(x) \mid x \in V\}=U$，则称 φ 为满射；
3. 若 φ 即是单射，又是满射，则称 φ 为双射，也称为同构。

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$；

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V$，$k, l \in K$；

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$;
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$;
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$;

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$；
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$；
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组；

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$;
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$;
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$;
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组;
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基;

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0)=0$，$\varphi(-v)=-\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha+l\beta)=k\varphi(\alpha)+l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha,\beta \in V,\ k,l \in K$；
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v)=0$ 当且仅当 $v=0$；
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组；
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基；
6. 当 φ 为双射时，$\varphi^{-1}: U \to V$ 存在并且也是一个线性同构。

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi : V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$;
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$;
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$;
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组;
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基;
6. 当 φ 为双射时，$\varphi^{-1} : U \to V$ 存在并且也是一个线性同构。

例

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0)=0$，$\varphi(-v)=-\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha+l\beta)=k\varphi(\alpha)+l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha,\beta \in V,\ k,l \in K$；
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v)=0$ 当且仅当 $v=0$；
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组；
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基；
6. 当 φ 为双射时，$\varphi^{-1}: U \to V$ 存在并且也是一个线性同构。

例

1. 从 K 上线性空间到 K 的非零线性映射必是满射；

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$；
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$；
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组；
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基；
6. 当 φ 为双射时，$\varphi^{-1}: U \to V$ 存在并且也是一个线性同构。

例

1. 从 K 上线性空间到 K 的非零线性映射必是满射；
2. 数域 K 上 $n \times n$ 矩阵全体 $Trace: M_n(K) \to K$ 是一个线性映射；

命题（线性映射的性质）

设 $\varphi: V \to U$ 为数域 K 上的线性空间 V 到 U 的线性映射，则

1. φ 保持零元素，也保持负元：$\varphi(0) = 0$，$\varphi(-v) = -\varphi(v)$，$\forall v \in V$；
2. φ 保持线性组合：$\varphi(k\alpha + l\beta) = k\varphi(\alpha) + l\varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in V,\ k, l \in K$；
3. φ 是单射的充分必要条件是 $\varphi(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$；
4. φ 是单射的充分必要条件是 φ 把无关向量组映成无关向量组；
5. φ 是双射的充分必要条件是 φ 把 V 的基映成 U 的基；
6. 当 φ 为双射时，$\varphi^{-1}: U \to V$ 存在并且也是一个线性同构。

例

1. 从 K 上线性空间到 K 的非零线性映射必是满射；
2. 数域 K 上 $n \times n$ 矩阵全体 $Trace: M_n(K) \to K$ 是一个线性映射；
3. 设 V 是一个 n 维线性空间，$e_1, , \ldots, e_n$ 是 V 的一组基，
   则 $\varphi: V \to K_n$，$v \mapsto [v]_{e's}$ 是一个线性空间之间的同构。

线性映射的运算

因为线性映射的目标线性空间，如同微积分中函数的目标数集 $\mathbb{R}$ 一样，仍具有加法和数乘，所以可仿照定义映射的加法和数乘如下：

定义

设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$，定义

$$(\varphi+\psi)(v)=\varphi(v)+\psi(v), \, v \in V; \ (k\varphi)(v)=k\,\varphi(v), \, k \in K, v \in V;$$

称 $\varphi+\psi$ 为 φ 和 ψ 的和，称 $k\varphi$ 为 φ 与 k 的数乘。

线性映射的运算

因为线性映射的目标线性空间，如同微积分中函数的目标数集 $\mathbb{R}$ 一样，仍具有加法和数乘，所以可仿照定义映射的加法和数乘如下：

定义

设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$，定义

$$(\varphi+\psi)(v)=\varphi(v)+\psi(v), v \in V;\ (k\varphi)(v)=k\,\varphi(v), k \in K, v \in V;$$

称 $\varphi+\psi$ 为 φ 和 ψ 的和，称 $k\varphi$ 为 φ 与 k 的数乘。

命题

设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$，$k \in K$，则 $\varphi+\psi, k\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$；$\mathcal{L}(V, U)$ 按定义的加法和数乘构成 K 上的一个线性空间。

线性映射的运算

因为线性映射的目标线性空间，如同微积分中函数的目标数集 $\mathbb{R}$ 一样，仍具有加法和数乘，所以可仿照定义映射的加法和数乘如下：

定义

设 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{L}(V,U)$，定义

$$(\varphi+\psi)(v)=\varphi(v)+\psi(v),\ v\in V;\ (k\varphi)(v)=k\,\varphi(v),\ k\in K, v\in V;$$

称 $\varphi+\psi$ 为 φ 和 ψ 的和，称 $k\varphi$ 为 φ 与 k 的数乘。

命题

设 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{L}(V,U)$，$k\in K$，则 $\varphi+\psi,\ k\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$；$\mathcal{L}(V,U)$ 按定义的加法和数乘构成 K 上的一个线性空间。

当 $V=U$ 时，在 $\mathcal{L}(V)$ 上复合映射也是封闭的，所以 $\mathcal{L}(V)$ 上还有一个乘法（就是复合），这时 $\mathcal{L}(V)$ 形成一个代数。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

则称 A 构成数域 K 上的一个**代数**。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$;

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$；
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$；

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$；
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$；
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$；

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$;
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$;

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

命题

下面给出一些常用的代数：

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$；
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$；
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$；

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

命题

下面给出一些常用的代数：

1. $\mathcal{L}(V)$ 是一个代数；

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$；
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$；
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$；

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

命题

下面给出一些常用的代数：

1. $\mathcal{L}(V)$ 是一个代数；
2. $M_n(K)$ 是一个代数；

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a,b,c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$;
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$;

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

命题

下面给出一些常用的代数：

1. $\mathcal{L}(V)$ 是一个代数；
2. $M_n(K)$ 是一个代数；
3. $C[a,b]$ 是一个代数；

定义

设 A 是数域 K 上的线性空间，且有乘法 $\cdot : A \times A \to A$，满足对任意的 $a, b, c \in A$，$k \in K$，

1. 乘法结合律：$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$；
2. 存在乘法单位元 $e \in A$：$e \cdot a = a = a \cdot e$；
3. 左右分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$；$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$；
4. 混合乘法结合律：$(ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb)$；

则称 A 构成数域 K 上的一个代数。

命题

下面给出一些常用的代数：

1. $\mathcal{L}(V)$ 是一个代数；
2. $M_n(K)$ 是一个代数；
3. $C[a, b]$ 是一个代数；
4. $K[x]$ 是一个代数。

线性变换与矩阵

线性变换是一个相当抽象的概念，处理起来不是很直接。由于它是线性空间间保持运算的映射，所以可以用线性空间的基来“具体”化。这样讨论起它的性质来会有很多方便。

线性变换与矩阵

线性变换是一个相当抽象的概念，处理起来不是很直接。由于它是线性空间间保持运算的映射，所以可以用线性空间的基来“具体”化。这样讨论起它的性质来会有很多方便。

定义（线性映射的矩阵）

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$，取 V 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 U 的一组基 $f_1,f_2,\cdots,f_m$，记

$$\begin{array}{c}\varphi(e_1)=a_{11}f_1+a_{21}f_2+\cdots+a_{m1}f_m,\\ \varphi(e_2)=a_{12}f_1+a_{22}f_2+\cdots+a_{m2}f_m,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi(e_n)=a_{1n}f_1+a_{2n}f_2+\cdots+a_{mn}f_m.\end{array},$$

称矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为线性映射 φ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 下的矩阵。当 $U=V$ 且 $e_i=f_i$ 时，称 A 为线性变换 φ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的矩阵。

线性变换与矩阵

线性变换是一个相当抽象的概念，处理起来不是很直接。由于它是线性空间间保持运算的映射，所以可以用线性空间的基来“具体”化。这样讨论起它的性质来会有很多方便。

定义（线性映射的矩阵）

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$，取 V 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 U 的一组基 $f_1,f_2,\cdots,f_m$，记

$$\begin{array}{c} \varphi(e_1)=a_{11}f_1+a_{21}f_2+\cdots+a_{m1}f_m, \\ \varphi(e_2)=a_{12}f_1+a_{22}f_2+\cdots+a_{m2}f_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(e_n)=a_{1n}f_1+a_{2n}f_2+\cdots+a_{mn}f_m. \end{array},$$

称矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为线性映射 φ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 下的矩阵。当 $U=V$ 且 $e_i=f_i$ 时，称 A 为线性变换 φ 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的矩阵。

形式上可记

$$(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))=(f_1,f_2,\cdots,f_m)A。$$

也即

$$(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))=(f_1,f_2,\cdots,f_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}。$$

向量坐标与线性变换下象的坐标之间的关系。

定理

设线性映射 φ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 和 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 下的矩阵为A，则对任意的 $v \in V$，有

$$[\varphi(v)]_{f's} = A\,[v]_{e's}\,。$$

向量坐标与线性变换下象的坐标之间的关系。

定理

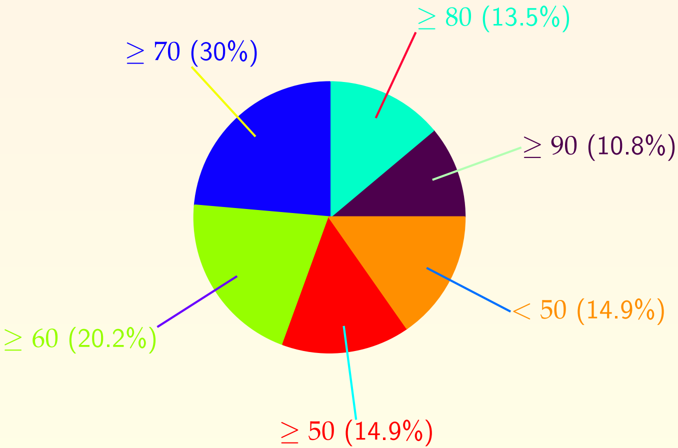
设线性映射 φ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 和 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 下的矩阵为 A，则对任意的 $v \in V$，有

$$[\varphi(v)]_{f's} = A[v]_{e's}\text{。}$$

定理

设有三个线性空间 W, V, U，并设 $e_1, e_2, \cdots, e_l$，$f_1, f_2, \cdots, f_m$ 和 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ 分别是它们的基，$W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} U$ 是线性映射，$W \xrightarrow{\varphi} V$ 在 $e_1, e_2, \cdots, e_l$，$f_1, f_2, \cdots, f_m$ 下的矩阵为 A，$V \xrightarrow{\psi} U$ 在基 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 和 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ 下的矩阵为 B，则复合映射 $W \xrightarrow{\psi\varphi} U$ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_l$，$g_1, g_2, \ldots, g_n$ 下的矩阵为 BA。特别地，当 $W = V = U$，且 $e_i = f_i = g_i$ $(1 \le i \le n)$ 时，$\psi\varphi$ 在 $e_1, e_2, \cdots, e_l$ 下的矩阵是 BA。

期中成绩



下面再考虑线性变换时的不同基下的矩阵的变化。

定理

设线性变换 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A，在基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵为B，且从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为 P，则有

$$P^{-1}AP = B。$$

下面再考虑线性变换时的不同基下的矩阵的变化。

定理

设线性变换 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A，在基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵为B，且从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为 P，则有

$$P^{-1}AP = B。$$

证明： 根据定义，P 的第 i 列 $P_j = \left[f_j\right]_{e's}$，由上页定理（$[\varphi(v)]_{e's} = A[v]_{e's}$），过渡矩阵与坐标：$P[x]_{f's} = [x]_{e's}$，应用到 $\varphi(v)$

$$P[\varphi(v)]_{f's} = [\varphi(v)]_{e's} = A[v]_{e's} = AP[x]_{f's}$$

另一方面 B 的性质：$[\varphi(v)]_{f's} = B[v]_{f's}$，于是有 $P[\varphi(v)]_{f's} = PB[x]_{f's}$，合并两式，有 $AP[x]_{f's} = PB[x]_{f's}$，由 x 的任意性，知 $AP = PB$。

形式上，可如下证：$(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)) = (f_1, \ldots, f_n) B$，$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) A$，$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n) P$，$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$，

$$\begin{aligned}(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)) &= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) P = (e_1, \ldots, e_n) AP \\ (\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)) &= (f_1, \ldots, f_n) B = (e_1, \ldots, e_n) PB\end{aligned}$$

所以 $PB = AP$。

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

相似关系是一个等价关系。即：

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

相似关系是一个等价关系。即：

1. 自反性：$A \sim A$;

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

相似关系是一个等价关系。即：

1. 自反性：$A \sim A$;
2. 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

相似关系是一个等价关系。即：

1. 自反性：$A \sim A$;
2. 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;
3. 传递性：若 $A \sim B$，且 $B \sim C$，则 $A \sim C$。

定义（矩阵的相似）

设 A 和 B 都是 n 阶矩阵。若存在一个可逆 n 阶矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 相似于 B（记为 $A \sim B$）。

相似关系是一个等价关系。即：

1. 自反性：$A \sim A$;
2. 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;
3. 传递性：若 $A \sim B$，且 $B \sim C$，则 $A \sim C$。

一个线性空间上的线性变换在不同基下的矩阵是相似的。下学期中，我们将使用一定的篇幅来说明对数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间的线性变换 φ，可找到适当的基，使得其在这组基下的矩阵是一个特殊的上三角矩阵。

定义

设 $\varphi: V \to U$ 是线性空间之间的线性映射。则 φ 的核（ kernel ）定义为 $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$；$\varphi$ 的像（ image ）定义为 $\operatorname{Im}\varphi = \{u \in U \mid v \in U,$ 使得 $\varphi(v) = u\}$，也记作 $\varphi(U)$。

定义

设 $\varphi : V \to U$ 是线性空间之间的线性映射。则 φ 的核（kernel）定义为 $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$；$\varphi$ 的像（image）定义为 $\operatorname{Im}\varphi = \{u \in U \mid v \in U,$ 使得 $\varphi(v) = u\}$，也记作 $\varphi(U)$。

命题

$\ker\varphi$ 和 $\operatorname{Im}\varphi$ 分别是 V 和 U 的线性子空间。

定义

设 $\varphi : V \to U$ 是线性空间之间的线性映射。则 φ 的核（kernel）定义为 $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$；$\varphi$ 的像（image）定义为 $\operatorname{Im}\varphi = \{u \in U \mid v \in U，使得 \ \varphi(v) = u\}$，也记作 $\varphi(U)$。

命题

$\ker\varphi$ 和 $\operatorname{Im}\varphi$ 分别是 V 和 U 的线性子空间。

推论

$\varphi : V \to U$ 是满的，当且仅当 $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim U$；$\varphi$ 是单的当且仅当 $\ker\varphi = \{0\}$。

定义

设 $\varphi : V \to U$ 是线性空间之间的线性映射。则 φ 的核（kernel）定义为 $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$；$\varphi$ 的像（image）定义为 $\operatorname{Im}\varphi = \{u \in U \mid v \in U$，使得 $\varphi(v) = u\}$，也记作 $\varphi(U)$。

命题

$\ker\varphi$ 和 $\operatorname{Im}\varphi$ 分别是 V 和 U 的线性子空间。

推论

$\varphi : V \to U$ 是满的，当且仅当 $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim U$；$\varphi$ 是单的当且仅当 $\ker\varphi = \{0\}$。

定义

对线性映射 $\varphi : V \to U$，$\dim\operatorname{Im}\varphi = rank\,(\varphi)$ 称为 φ 的秩，$\dim\ker\varphi$ 称为 φ 的零度。

定理

对线性映射 $\varphi : V \to U$，有

$$\dim U = rank\,(\varphi) + \dim\ker\varphi。$$

定理

对线性映射 $\varphi : V \to U$，有

$$\dim U = rank\,(\varphi) + \dim\ker\varphi。$$

例

设 $\varphi : V \to V$ 是一个线性变换，满足 $\varphi^2 = \varphi$。则 $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \ker\varphi$，且 $\ker\varphi = \mathrm{Im}\,(I - \varphi)$，这里 I 是恒等映射。

定理

对线性映射 $\varphi : V \to U$，有

$$\dim U = rank\,(\varphi) + \dim \ker \varphi。$$

例

设 $\varphi : V \to V$ 是一个线性变换，满足 $\varphi^2 = \varphi$。则 $V = \operatorname{Im} \varphi \oplus \ker \varphi$，且 $\ker \varphi = \operatorname{Im}(I - \varphi)$，这里 I 是恒等映射。

定理

对线性映射 $\varphi: V \to U$，有

$$\dim U = rank\,(\varphi) + \dim\ker\varphi。$$

例

设 $\varphi: V \to V$ 是一个线性变换，满足 $\varphi^2 = \varphi$。则 $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \ker\varphi$，且 $\ker\varphi = \mathrm{Im}\,(I - \varphi)$，这里 I 是恒等映射。

证明： 首先，设 $x \in \mathrm{Im}\,\varphi \cap \ker\varphi$，则有 $y \in V$，使得 $x = \varphi(y)$，但由于 $x \in \ker\varphi$，所以 $0 = \varphi(x) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi^2(y) = \varphi(y) = x$，于是有 $\mathrm{Im}\,\varphi \cap \ker\varphi = \{0\}$；其次，
对 $\forall x \in V$，$x = \varphi(x) + (x - \varphi(x))$，这里 $\varphi(x) \in \mathrm{Im}\,\varphi$ 且由于 $\varphi(x - \varphi(x)) = \varphi(x) - \varphi^2(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$，所以有 $x - \varphi(x) \in \ker\varphi$，于是有 $V = \mathrm{Im}\,\varphi + \ker\varphi$，结合前面已证，有

$$V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \ker\varphi。$$

第三，前面已证，$(I - \varphi)(x) \in \ker\varphi$，于是有 $\mathrm{Im}\,(I - \varphi) \subseteq \ker\varphi$，另一方面，若 $y \in \ker\varphi$，则 $y = (I - \varphi)(y) \in \mathrm{Im}\,(I - \varphi)$。 □

不变子空间

定义 (不变子空间)

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的一个子空间。如果 $\varphi(U)=\{\varphi(x) \mid x\in U\}\subseteq U$，则称 U 为 V 的一个 φ-不变子空间。把 φ 的定义范围限定为 U，记之为 $\varphi|_U$，称之为 φ 在 U 下的限制映射。

不变子空间

定义（不变子空间）

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的一个子空间。如果 $\varphi(U)=\{\varphi(x)\mid x\in U\}\subseteq U$，则称 U 为 V 的一个 φ-不变子空间。把 φ 的定义范围限定为 U，记之为 $\varphi|_U$，称之为 φ 在 U 下的限制映射。

例

下列给出的空间是常用的不变子空间：

证明： 只需证明第一部分即可。设题设成立，$\forall x\in \operatorname{Im}\psi$，则 $\exists y\in V$，使得 $x=\psi(y)$，于是有

$$\varphi(x)=\varphi(\psi(y))=\varphi\psi(y)=\psi\varphi(y)=\psi(\varphi(y))\in \operatorname{Im}\psi;$$

对 $\forall z\in\ker\psi$，

$$\psi(\varphi(z))=\varphi(\psi(z))=\varphi(0)=0,$$

不变子空间

定义（不变子空间）

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的一个子空间。如果 $\varphi(U) = \{\varphi(x) \mid x \in U\} \subseteq U$，则称 U 为 V 的一个 φ-不变子空间。把 φ 的定义范围限定为 U，记之为 $\varphi|_U$，称之为 φ 在 U 下的限制映射。

例

下列给出的空间是常用的不变子空间：

1. 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$，且 $\varphi\psi = \psi\varphi$，即 φ 与 ψ 可交换，则 $\operatorname{Im}\psi$ 与 $\ker\psi$ 均是 φ 的不变子空间；

证明： 只需证明第一部分即可。设题设成立，$\forall x \in \operatorname{Im}\psi$，则 $\exists y \in V$，使得 $x = \psi(y)$，于是有

$$\varphi(x) = \varphi(\psi(y)) = \varphi\psi(y) = \psi\varphi(y) = \psi(\varphi(y)) \in \operatorname{Im}\psi;$$

对 $\forall z \in \ker\psi$，

$$\psi(\varphi(z)) = \varphi(\psi(z)) = \varphi(0) = 0,$$

不变子空间

定义（不变子空间）

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 V 的一个子空间。如果 $\varphi(U)=\{\varphi(x)\mid x\in U\}\subseteq U$，则称 U 为 V 的一个 φ-不变子空间。把 φ 的定义范围限定为 U，记之为 $\varphi|_U$，称之为 φ 在 U 下的限制映射。

例

下列给出的空间是常用的不变子空间：

1. 设 $\varphi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，且 $\varphi\psi=\psi\varphi$，即 φ 与 ψ 可交换，则 $\operatorname{Im}\psi$ 与 $\ker\psi$ 均是 φ 的不变子空间；
2. 设 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$，则 φ 的像空间与核空间均为 φ 的不变子空间。

证明： 只需证明第一部分即可。设题设成立，$\forall x\in\operatorname{Im}\psi$，则 $\exists y\in V$，使得 $x=\psi(y)$，于是有

$$\varphi(x)=\varphi(\psi(y))=\varphi\psi(y)=\psi\varphi(y)=\psi(\varphi(y))\in\operatorname{Im}\psi;$$

对 $\forall z\in\ker\psi$，

$$\psi(\varphi(z))=\varphi(\psi(z))=\varphi(0)=0,$$

定理

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 φ 的一个不变子空间，若 $v_1,\ldots,v_m$ 是 U 的一组基，$v_1,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_n$ 是 V 的一组基，则在这组基下，φ 所对应的矩阵为块三角阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 A_{11} 是 $\varphi|_U$ 在基 $v_1,\ldots,v_m$ 下的矩阵。若 $\mathcal{L}(v_{m+1},\ldots,v_n)=V_2$ 也是不变子空间，则 $A_{12}=0$。

证明： 根据线性变换矩阵的定义，φ 在题中所给定基下对应的矩阵为 $([\varphi(v_1)]_{v's},\ldots,[\varphi(v_m)]_{v's},[\varphi(v_{m+1})]_{v's},\ldots,[\varphi(v_n)]_{v's})$，而因为 U 是不变子空间，所以当 $i\le m$ 时，$\varphi(v_i)\in U$ 是 $v_1,\ldots,v_m$ 的线性组合，于是对应的矩阵是块上三角阵。当 V_2 也是不变子空间时，$A_{12}=0$ 也是同样的原因。 $\square$

定理

设 φ 为线性空间 V 上的线性变换，U 是 φ 的一个不变子空间，若 $v_1,\ldots,v_m$ 是 U 的一组基，$v_1,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_n$ 是 V 的一组基，则在这组基下，φ 所对应的矩阵为块三角阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 A_{11} 是 $\varphi|_U$ 在基 $v_1,\ldots,v_m$ 下的矩阵。若 $\mathcal{L}(v_{m+1},\ldots,v_n)=V_2$ 也是不变子空间，则 $A_{12}=0$。

证明： 根据线性变换矩阵的定义，φ 在题中所给定基下对应的矩阵为 $([\varphi(v_1)]_{v's},\ldots,[\varphi(v_m)]_{v's},[\varphi(v_{m+1})]_{v's},\ldots,[\varphi(v_n)]_{v's})$，而因为 U 是不变子空间，所以当 $i\leq m$ 时，$\varphi(v_i)\in U$ 是 $v_1,\ldots,v_m$ 的线性组合，于是对应的矩阵是块上三角阵。当 V_2 也是不变子空间时，$A_{12}=0$ 也是同样的原因。 $\square$

推论

若线性空间 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$，且 φ 是 V 上的一个线性变换。分别取 V_i 的基 $e_1^{(i)},\ldots,e_{n_i}^{(i)}$，则 φ 在基

$$e_1^{(1)},\ldots,e_{n_1}^{(1)};e_1^{(2)},\ldots,e_{n_2}^{(2)},\ldots,e_1^{(k)},\ldots,e_{n_k}^{(k)}$$