数域

我们使用过很多数集符号，如 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{N}$ 等。其中有些数集是关于“加、减、乘、除”封闭的，有些只关于“加、减、乘”封闭，也有的只关于“加、乘”运算封闭。

就 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 而言，它们关于“加、减、乘、除”运算都封闭，我们称之为**域**，而 $\mathbb{Z}$ 是关于“加、减、乘”封闭，称为**环**。

定义

复数集 $\mathbb{C}$ 的一个非空非零子集 F 若关于“加、减、乘、除”运算封闭（在作除法时，除数要求不为零），则称之为一个数域。

常见的数域有上面的 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$。我们也可以构造一个不太常见的数域，如 $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid \text{其中} a,b\in\mathbb{Q}\right\}$。这也是一个数域。因为 e 不是一个**代数数**，所以

$$\mathbb{Q}(e)=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{a_0+a_1e+\cdots+a_ne^n}{b_0+b_1e+\cdots+b_me^m}\mid a_i,b_j\in\mathbb{Q},\\ 0\le i\le n,1\le j\le m,b_0,b_1,\ldots,b_n\text{不全为零}\end{array}\right\}$$

也是一个数域。

定义 (n 维行（列）向量)

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

定义 (n 维行（列）向量)

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

定义 (n 维行（列）向量)

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n=\{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i\in K,\ 1\le i\le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha,\beta\in K^n$，有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha,\beta,\gamma\in K^n$，有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

定义 (n 维行（列）向量)

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha$;

定义（n 维行（列）向量）

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;

定义（n 维行（列）向量）

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda+\mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

定义 (n 维行（列）向量)

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha, \beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;

定义（n 维行（列）向量）

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \mid a_i \in K,\ 1 \le i \le n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha,\beta \in K^n$，有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha,\beta,\gamma \in K^n$，有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0+\alpha=\alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha+\beta=0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda,\mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha,\beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$\forall \lambda,\mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，都有 $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)=\mu(\lambda\alpha)$;

定义（n 维行（列）向量）

设 K 是数域，$a_1,\ldots,a_n$ 是 K 中的 n 个数，则称有序数组 $(a_1,\ldots,a_n)$ 为数域 K 上的 n 维行向量，称有序数组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为数域 K 上的 n 维列向量。

在前面一章，我们介绍过列向量的加法，数乘。当我们把列向量与有向线段（矢量）等同起来后，我们也知道，列向量的加法就是矢量的平行四边形求和，列向量的数乘就是矢量的放缩。关于行（列）向量的加法和数乘，我们验证过有下列八条性质成立。

记 $K^n = \{(a_1 \quad \cdots \quad a_n) \mid a_i \in K,\ 1 \leq i \leq n\}$。

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha, \beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，都有 $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$;
8. 幺等律：$\forall \alpha \in K^n$，$1\alpha = \alpha$。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1=s_2$ 且 $t_1=t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“$+$”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

则称 $(V,“+”,“\ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$；

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$；
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$；

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1=s_2$ 且 $t_1=t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V\times V\to V$，和数乘“ ”：$K\times V\to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha,\beta\in K^n$，有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha,\beta,\gamma\in K^n$，有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0\in K^n$，使得 $\forall \alpha\in K^n$，有 $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha\in K^n$，存在 $\beta\in K^n$，使得 $\alpha+\beta=0$;

则称 $(V,“+”,“ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$；
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$；
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$；
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$；

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha, \beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义（线性空间）

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha, \beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，都有 $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$;

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

设 S 和 T 是两个集合，则 S 和 T 的乘积集合定义为

$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\}。$$

其中 (s,t) 是有序对，即有前后关系，或者说，$(s_1,t_1) = (s_2,t_2)$ 当且仅当 $s_1 = s_2$ 且 $t_1 = t_2$。

定义 (线性空间)

设 K 为数域，V 是一个非空集合，且有二元运算，加法“+”：$V \times V \to V$，和数乘“ ”：$K \times V \to V$，满足如下性质：

1. 加法交换律：$\forall \alpha, \beta \in K^n$，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. 加法结合律：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in K^n$，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. “零元”存在性：即存在 $0 \in K^n$，使得 $\forall \alpha \in K^n$，有 $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$;
4. “负元”存在性：即 $\forall \alpha \in K^n$，存在 $\beta \in K^n$，使得 $\alpha + \beta = 0$;
5. 左分配律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，有 $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
6. 右分配律：$\forall \lambda \in K$，$\forall \alpha, \beta \in K^n$，都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;
7. 数乘结合律：$\forall \lambda, \mu \in K$，$\forall \alpha \in K^n$，都有 $(\lambda\mu)\alpha = \lambda(\mu\alpha) = \mu(\lambda\alpha)$;
8. 幺等律：$\forall \alpha \in K^n$，$1\alpha = \alpha$。

则称 $(V, “+”, “ ”)$ 为 K 上的一个线性空间。

线性空间

在线性空间定义中，我们将其运算也包括在内，是要指出线性空间不光是与其定义的集合 V 有关，还与其运算加法与数乘有关。线性空间中的元素被称为向量，所以我们有时也称线性空间为向量空间。

例

线性空间

在线性空间定义中，我们将其运算也包括在内，是要指出线性空间不光是与其定义的集合 V 有关，还与其运算加法与数乘有关。线性空间中的元素被称为向量，所以我们有时也称线性空间为向量空间。

例

1. 设 $[a,b]$ 为一个区间，以 $C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的连续函数全体，则 $C[a,b]$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间：其加法就是函数的加法，数乘就是函数与数的乘法。

   在这个线性空间中，零向量就是恒零函数，一个向量（函数）的负元就是它的负函数。

线性空间

在线性空间定义中，我们将其运算也包括在内，是要指出线性空间不光是与其定义的集合 V 有关，还与其运算加法与数乘有关。线性空间中的元素被称为向量，所以我们有时也称线性空间为向量空间。

例

1. 设 $[a,b]$ 为一个区间，以 $C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的连续函数全体，则 $C[a,b]$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间：其加法就是函数的加法，数乘就是函数与数的乘法。

   在这个线性空间中，零向量就是恒零函数，一个向量（函数）的负元就是它的负函数。

2. 设 $K=\mathbb{R}$，并记 $V=\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{a_n\}$ 为一个实数列$\}$。则 V 按数列的加法（通项相加）和与数的乘法（将数乘到通项上）构成一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。其零元就是零常数数列，一个向量的负元就是其负数列。

线性空间

在线性空间定义中，我们将其运算也包括在内，是要指出线性空间不光是与其定义的集合 V 有关，还与其运算加法与数乘有关。线性空间中的元素被称为向量，所以我们有时也称线性空间为向量空间。

例

1. 设 $[a,b]$ 为一个区间，以 $C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的连续函数全体，则 $C[a,b]$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间：其加法就是函数的加法，数乘就是函数与数的乘法。

   在这个线性空间中，零向量就是恒零函数，一个向量（函数）的负元就是它的负函数。
2. 设 $K=\mathbb{R}$，并记 $V=\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{a_n\}$ 为一个实数列$\}$。则 V 按数列的加法（通项相加）和与数的乘法（将数乘到通项上）构成一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。其零元就是零常数数列，一个向量的负元就是其负数列。
3. 一个数域 K 上的所有 $m\times n$ 矩阵全体 V，按矩阵的加法和数乘，也构成一个线性空间。

线性空间

在线性空间定义中，我们将其运算也包括在内，是要指出线性空间不光是与其定义的集合 V 有关，还与其运算加法与数乘有关。线性空间中的元素被称为向量，所以我们有时也称线性空间为向量空间。

例

1. 设 $[a,b]$ 为一个区间，以 $C[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上的连续函数全体，则 $C[a,b]$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间：其加法就是函数的加法，数乘就是函数与数的乘法。

   在这个线性空间中，零向量就是恒零函数，一个向量（函数）的负元就是它的负函数。
2. 设 $K=\mathbb{R}$，并记 $V=\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{a_n\}$ 为一个实数列$\}$。则 V 按数列的加法（通项相加）和与数的乘法（将数乘到通项上）构成一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。其零元就是零常数数列，一个向量的负元就是其负数列。
3. 一个数域 K 上的所有 $m\times n$ 矩阵全体 V，按矩阵的加法和数乘，也构成一个线性空间。
4. 一个数域 K 上的所有一元多项式全体 $K[x]$，或次数不超过 n 的一元多项式 $K_n[x]$ 全体，也是一个线性空间。

线性空间

对于抽象的线性空间，有些共性，可直接由定义推得。

命题

在一个线性空间 V 中，零向量是唯一的，一个向量的负向量也是唯一的。

证明： 设有两个零向量 O_1 和 O_2，则由线性空间中“零元”存在性：有

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2;$$

再设有一个向量 α，并设 β_1 和 β_2 分别是其负元，则由“负元”存在性和“零元”存在性、结合律：

$$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2。$$

$\square$

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)。$$

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)。$$

命题

线性空间 V 中的加法和数乘满足以下性质：
设 α、β、$\gamma\in V$，$k\in K$：

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)。$$

命题

线性空间 V 中的加法和数乘满足以下性质：
设 α、β、$\gamma\in V$，$k\in K$：

1. 加法消去律：若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$，则 $\alpha=\beta$；

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)。$$

命题

线性空间 V 中的加法和数乘满足以下性质：
设 α、β、$\gamma\in V$，$k\in K$：

1. 加法消去律：若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$，则 $\alpha=\beta$；
2. 加减转换律：$\alpha+\beta=\gamma\Rightarrow\alpha=\gamma-\beta$；

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)。$$

命题

线性空间 V 中的加法和数乘满足以下性质：
设 α、β、$\gamma\in V$，$k\in K$：

1. 加法消去律：若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$，则 $\alpha=\beta$;
2. 加减转换律：$\alpha+\beta=\gamma\Rightarrow\alpha=\gamma-\beta$;
3. $0\alpha=0$，$k0=0$，$(-1)\alpha=-\alpha$;

线性空间

定义

在一个线性空间 V 中，定义二元运算减法“-”如下：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)。$$

命题

线性空间 V 中的加法和数乘满足以下性质：
设 α、β、$\gamma \in V$，$k \in K$：

1. 加法消去律：若 $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$，则 $\alpha = \beta$;
2. 加减转换律：$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma - \beta$;
3. $0\alpha = 0$，$k0 = 0$，$(-1)\alpha = -\alpha$;
4. 若 $k\alpha = 0$，则 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$。

向量的线性关系

给定一个线性方程组 $Ax=b$，若将 $A=(A_1,\ldots,A_n)$ 按其列向量分块，并记 $x=(x_1,\ldots,x_n)'$，则 $Ax=b$ 的充分必要条件是 $b=Ax=\sum_{k=1}^{n} x_iA_i$。基于此，我们定义：

定义（线性组合）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一个向量组，$k_1,k_2,\cdots,k_n\in K$，则称 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个线性组合。若向量 b 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，则称 b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。

如果方程组 $Ax=b$ 有两组不同的解 $x=(x_1,\ldots,x_n)'$ 和 $y=(y_1,\ldots,y_n)'$，是易知 $A(y-x)=0$，所以

$$(y_1-x_1)A_1+\cdots+(y_n-x_n)A_n=0,$$

而 $y_1-x_1,\ldots,y_n-x_n$ 是一组不全为零的数。

向量的线性关系

反过来，设方程组 $Ax=b$ 有解 $x=(x_1,\ldots,x_n)'$，且存在不全为零的数 $z_1,\ldots,z_n$，使得 $z_1A_1+\cdots+z_nA_n=0$，
则 $(x_1+z_1)A_1+\cdots+(x_n+z_n)A_n=b$，得到方程组的另一组与原来解不同的解。所以，是不是存在不全为零的数 $z_1,\ldots,z_n$，使得 $z_1A_1+\cdots+z_nA_n=0$，对有解方程组来说，是确定方程组是否有唯一解的一个条件。
可以说，当方程组有两个以上的解时，系数矩阵的列是相关的。在后面，我们还会得到一个描述相关程度的数量，这个数量可决定方程组解的多少。

定义（线性相关与线性无关）

给定 V 内一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，若存在数域 K 内的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0,$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关；否则，称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

向量的线性关系

例

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha = 0$，当且仅当 $\alpha = 0$。

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha = 0$，当且仅当 $\alpha = 0$。
2. 两个向量组成的向量组 $\{\alpha, \beta\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k 和 l，使得 $k\alpha + l\beta = 0$，不妨设 $l \neq 0$，则有 $\beta = -\dfrac{k}{l}\alpha$。所以两个向量的向量组线性相关当且仅当其中一个向量是另一个的常数倍。

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha=0$，当且仅当 $\alpha=0$。
2. 两个向量组成的向量组 $\{\alpha,\beta\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k 和 l，使得 $k\alpha+l\beta=0$，不妨设 $l\neq 0$，则有 $\beta=-\frac{k}{l}\alpha$。所以两个向量的向量组线性相关当且仅当其中一个向量是另一个的常数倍。

命题

设 $n\geq 2$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in V$，则下列说法等价：

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha = 0$，当且仅当 $\alpha = 0$。
2. 两个向量组成的向量组 $\{\alpha, \beta\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k 和 l，使得 $k\alpha + l\beta = 0$，不妨设 $l \neq 0$，则有 $\beta = -\dfrac{k}{l}\alpha$。所以两个向量的向量组线性相关当且仅当其中一个向量是另一个的常数倍。

命题

设 $n \geq 2$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in V$，则下列说法等价：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关；

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha = 0$，当且仅当 $\alpha = 0$。
2. 两个向量组成的向量组 $\{\alpha, \beta\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k 和 l，使得 $k\alpha + l\beta = 0$，不妨设 $l \neq 0$，则有 $\beta = -\dfrac{k}{l}\alpha$。所以两个向量的向量组线性相关当且仅当其中一个向量是另一个的常数倍。

命题

设 $n \geq 2$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in V$，则下列说法等价：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关；
2. 某个 α_i $(1 \leq i \leq n)$ 可被其余向量线性表出；

向量的线性关系

例

1. 一个向量组成的向量组 $\{\alpha\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k，使得 $k\alpha=0$，当且仅当 $\alpha=0$。
2. 两个向量组成的向量组 $\{\alpha,\beta\}$，线性相关当且仅当存在非零数 k 和 l，使得 $k\alpha+l\beta=0$，不妨设 $l\neq 0$，则有 $\beta=-\dfrac{k}{l}\alpha$。所以两个向量的向量组线性相关当且仅当其中一个向量是另一个的常数倍。

命题

设 $n\geq 2$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\in V$，则下列说法等价：

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性相关；
2. 某个 α_i $(1\leq i\leq n)$ 可被其余向量线性表出；
3. $\alpha_1=0$ 或存在 $2\leq i\leq n$，使得 α_i 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{i-1}$ 线性表出。

向量的线性关系

定理

向量的线性关系

定理

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关，则任一包含此向量组的向量组也线性相关。

向量的线性关系

定理

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关，则任一包含此向量组的向量组也线性相关。
2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，则该向量组的任一子组也线性无关。

向量的线性关系

定理

1. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性相关，则任一包含此向量组的向量组也线性相关。
2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性无关，则该向量组的任一子组也线性无关。
3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$，$\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表出，且表达式中系数唯一；

向量的线性关系

定理

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关，则任一包含此向量组的向量组也线性相关。
2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，则该向量组的任一子组也线性无关。
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，$\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性表出，且表达式中系数唯一；
4. 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性表出且表达式中系数唯一，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关。

向量的线性关系

定理

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性相关，则任一包含此向量组的向量组也线性相关。
2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，则该向量组的任一子组也线性无关。
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，$\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性表出，且表达式中系数唯一；
4. 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性表出且表达式中系数唯一，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关。

命题

设 $m > n$。则任一 $m \times n$ 矩阵的列构成的向量组线性相关。

向量组的秩

定义（等价向量组）

现有线性空间 V 中的两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$（I），$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$（II），如果（I）中任一向量都能被（II）线性表出，则称（I）能被（II）线性表出；若（I）和（II）能够相互表出，则称两向量组线性等价。

一个向量组中，可以找出一个可表出整个向量组的最小子组，这种子组构成一个极大线性无关组。

向量组的秩

定义（等价向量组）

现有线性空间 V 中的两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$（Ⅰ），$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$（Ⅱ），如果（Ⅰ）中任一向量都能被（Ⅱ）线性表出，则称（Ⅰ）能被（Ⅱ）**线性表出**；若（Ⅰ）和（Ⅱ）能够相互表出，则称两向量组**线性等价**。

一个向量组中，可以找出一个可表出整个向量组的最小子组，这种子组构成一个极大线性无关组。

定义（极大无关组和秩）

设 S 是 V 中的一个向量组，如果它有一个子组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足如下条件：

则称此子组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为 S 的一个**极大线性无关组**，并称 r 为 S 的**秩**，记为 $r = rank\,(S) = r\,(S)$。

向量组的秩

定义（等价向量组）

现有线性空间 V 中的两个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$（Ⅰ），$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$（Ⅱ），如果（Ⅰ）中任一向量都能被（Ⅱ）线性表出，则称（Ⅰ）能被（Ⅱ）**线性表出**；若（Ⅰ）和（Ⅱ）能够相互表出，则称两向量组**线性等价**。

一个向量组中，可以找出一个可表出整个向量组的最小子组，这种子组构成一个极大线性无关组。

定义（极大无关组和秩）

设 S 是 V 中的一个向量组，如果它有一个子组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足如下条件：

1. $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关；

则称此子组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 S 的一个**极大线性无关组**，并称 r 为 S 的**秩**，记为 $r=rank(S)=r(S)$。

向量组的秩

定义（等价向量组）

现有线性空间 V 中的两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$（Ⅰ），$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$（Ⅱ），如果（Ⅰ）中任一向量都能被（Ⅱ）线性表出，则称（Ⅰ）能被（Ⅱ）线性表出；若（Ⅰ）和（Ⅱ）能够相互表出，则称两向量组线性等价。

一个向量组中，可以找出一个可表出整个向量组的最小子组，这种子组构成一个极大线性无关组。

定义（极大无关组和秩）

设 S 是 V 中的一个向量组，如果它有一个子组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足如下条件：

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关；
2. S 中任一向量都能被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出，

则称此子组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为 S 的一个极大线性无关组，并称 r 为 S 的秩，记为 $r = rank(S) = r(S)$。

向量组的秩

定理

一个向量组的任两个极大线性无关组中所包含的向量个数相同。

向量组的秩

定理

一个向量组的任两个极大线性无关组中所包含的向量个数相同。

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$；和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是一个向量组 S 的两个极大线性无关组。我们将证明 $r = s$。
反证：设 $r > s$：则根据定义有 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\beta_i$，其中 $a_{ij} \in K$。所以矩阵 $(a_{ij})_{s\times r}$ 是一个“扁”矩阵，其列线性相关，也就是说，存在不全为零的数 $k_1, \ldots, k_r$，使得 $\sum_{j=1}^{r} k_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix} = 0$，所以

$$\sum_{j=1}^{r} k_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{r} k_j \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} k_j a_{ij}\beta_i = 0;$$

与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关矛盾，所以 $r \le s$，同理 $r \ge s$，于是 $r = s$。 □

有了上面的定理之后，我们有

定理

等价的向量组的秩相同。

有了上面的定理之后，我们有

定理

等价的向量组的秩相同。

在给定一个向量组后，找其极大线性无关组的方法通常有“减法”和“加法”。根据加法原则，我们有

定理（极大无关组扩充定理）

一个向量组 S 的任一线性无关子组必可扩充为 S 的一个极大线性无关组。

有了上面的定理之后，我们有

定理

等价的向量组的秩相同。

在给定一个向量组后，找其极大线性无关组的方法通常有“减法”和“加法”。根据加法原则，我们有

定理（极大无关组扩充定理）

一个向量组 S 的任一线性无关子组必可扩充为 S 的一个极大线性无关组。

定义（线性空间的基）

数域 K 上线性空间 V 的一个极大线性无关组称为 V 的基（ basis ）。当基中向量个数为有限数 n 时，称 V 为 n 维线性空间，并称 V 的维数 $\dim V = n$；否则称 V 为一个无限维线性空间。

有了上面的定理之后，我们有

定理

等价的向量组的秩相同。

在给定一个向量组后，找其极大线性无关组的方法通常有“减法”和“加法”。根据加法原则，我们有

定理（极大无关组扩充定理）

一个向量组 S 的任一线性无关子组必可扩充为 S 的一个极大线性无关组。

定义（线性空间的基）

数域 K 上线性空间 V 的一个极大线性无关组称为 V 的基（basis）。当基中向量个数为有限数 n 时，称 V 为 n 维线性空间，并称 V 的维数 $\dim V = n$；否则称 V 为一个无限维线性空间。

定理（基扩充定理）

一个线性空间 V 上的任一线性无关的向量组都可扩充为 V 上的一组基。

例

n 维线性空间中任意一组多于 n 个向量的向量线性相关。

例

n 维线性空间中任意一组多于 n 个向量的向量线性相关。

证明：反证：设无关，则可扩充为基，则维数大于 n，矛盾。 $\square$

例

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

例

n 维线性空间中任意一组多于 n 个向量的向量线性相关。

证明： 反证：设无关，则可扩充为基，则维数大于 n，矛盾。 □

例

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

证明： 反证：设不构成基，则可扩充为基，于是维数大于 n，矛盾。 □

例

$P_n(x)$ 的维数为 $n+1$。

例

n 维线性空间中任意一组多于 n 个向量的向量线性相关。

证明： 反证：设无关，则可扩充为基，则维数大于 n，矛盾。 $\square$

例

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一组基。

证明： 反证：设不构成基，则可扩充为基，于是维数大于 n，矛盾。 $\square$

例

$P_n(x)$ 的维数为 $n+1$。

证明： 反证：设不构成基，则可扩充为基，于是维数大于 n，矛盾。 $\square$

例

n 维线性空间 V 中若的 n 个 $S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$，若 V 中的任一向量均可由 S 线性表出，则 S 是 V 的一组基。

例

n 维线性空间 V 中若的 n 个 $S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$，若 V 中的任一向量均可由 S 线性表出，则 S 是 V 的一组基。

证明： 取 S 的任一极大无关组，设为 $T=\left\{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}\right\}$，则由于 V 中的任一向量均可由 S 线性表出，而 S 中的任一向量均可由 T 线性表出，据传递性，V 中的任一向量均可由 T 线性表出，由 T 线性无关，所以是 V 的一组基，所以 $\dim V=r$，但 $\dim V=n$，所以 $r=n$，也就是说，$S=T$。 □

例

设 $A_{m\times n}$，$P_{p\times m}$ 是两个矩阵。若 A 的列线性相关，则 PA 的列也线性相关。

矩阵的秩

在解线性方程组时，我们知道：在有解的情况下，解的“多少”由方程组每个未知数前的系数列的“相关程度”决定，即由系数列的秩来决定。所以，计算一个矩阵的列向量的秩对我们了解一个线性方程组的解的结构有重要作用。

定义

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 A 的 m 个行向量组的秩称为 A 的行秩；则 A 的 m 个列向量组的秩称为 A 的列秩。

有了 Cramer 法则和正交定理，我们就可能计算一个矩阵的列秩。

矩阵的秩

在解线性方程组时，我们知道：在有解的情况下，解的“多少”由方程组每个未知数前的系数列的“相关程度”决定，即由系数列的秩来决定。所以，计算一个矩阵的列向量的秩对我们了解一个线性方程组的解的结构有重要作用。

定义

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 A 的 m 个行向量组的秩称为 A 的行秩；则 A 的 m 个列向量组的秩称为 A 的列秩。

有了 Cramer 法则和正交定理，我们就可能计算一个矩阵的列秩。

定理

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，若 A 存在一个 r 阶非零子式，且 A 的所有 $r+1$ 阶子式均为零，则 A 的列向量构成的向量组的秩为 r。

矩阵的秩

在解线性方程组时，我们知道：在有解的情况下，解的“多少”由方程组每个未知数前的系数列的“相关程度”决定，即由系数列的秩来决定。所以，计算一个矩阵的列向量的秩对我们了解一个线性方程组的解的结构有重要作用。

定义

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A 的 m 个行向量组的秩称为 A 的行秩；则 A 的 m 个列向量组的秩称为 A 的列秩。

有了 Cramer 法则和正交定理，我们就可能计算一个矩阵的列秩。

定理

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，若 A 存在一个 r 阶非零子式，且 A 的所有 $r+1$ 阶子式均为零，则 A 的列向量构成的向量组的秩为 r。

定理

矩阵 A 的行秩与其列秩相等。我们称之为矩阵的秩。

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

1. $r(A) = n$;

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 的列向量组线性无关;

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 的列向量组线性无关；
3. A 的行向量组线性无关；

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 的列向量组线性无关;
3. A 的行向量组线性无关;
4. A 是可逆阵;

定理

一个矩阵的秩等于其转置矩阵的秩。

定理

矩阵的秩在初等变换下是不变的。

定理

对于 n 阶方阵 A，下列说法等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 的列向量组线性无关；
3. A 的行向量组线性无关；
4. A 是可逆阵；
5. $|A| \neq 0$。

关于矩阵秩的等式（不等式）：

1. 阶梯形矩阵的秩

$$
rank\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r} & * & a_{r\,n} \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$= r =$ 非零行数;

关于矩阵秩的等式（不等式）：

1. 阶梯形矩阵的秩

$$
\mathit{rank}\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r} & * & a_{r\,n} \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$= r = \text{非零行数};$$

2. 设 A、B 同型，则 $r\,(A+B) \leq r\,(A) + r\,(B)$;

关于矩阵秩的等式（不等式）：

1. 阶梯形矩阵的秩

$$
rank\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r} & * & a_{r\,n} \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$= r = \text{非零行数};$$

2. 设 A、B 同型，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$；
3. 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，
   则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$；

关于矩阵秩的等式（不等式）：

1. 阶梯形矩阵的秩

$$rank\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r} & * & a_{r\,n} \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r = \text{非零行数};$$

2. 设 A、B 同型，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$；
3. 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，
   则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$；
4. $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$。

关于矩阵秩的等式（不等式）：

1. 阶梯形矩阵的秩

$$
rank\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1\,j_1} & * & * & a_{1\,j_2} & * & * & a_{1\,j_r} & * & a_{1\,n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,j_2} & * & * & a_{2\,j_r} & * & a_{2\,n} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & a_{r\,j_r} & * & a_{r\,n} \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$= r = \text{非零行数};$$

2. 设 A、B 同型，则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$；
3. 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，
   则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$；
4. $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$。
5. $r\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$；$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$；

坐标向量、基变换和过渡矩阵

设 V 为数域 K 上的 n 维线性空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是它的一组基。任给 $\alpha \in V$，则 α 可唯一表示为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性组合，即存在唯一的一组 $a_i \in K, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，使得

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

定义

称 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 为 α 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标向量。

容易验证，在 V 的一组固定基下，通过其坐标向量，V 中向量与 K_n 中的元素一一对应。

坐标向量、基变换和过渡矩阵

如果 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是另一组基，这时

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n, \\ f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n. \end{aligned}\right.$$

将其形式上记为

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

定义

称矩阵 $P = (p_{ij})_{n\times n}$ 是从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵。

坐标向量、基变换和过渡矩阵

若一个向量 $v \in V$，在 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的坐标向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

有 $v = \sum_{k=1}^n x_i f_i$，所以有

$$v = \sum_{k=1}^n x_k f_k = \left(\sum_{k=1}^n p_{1k} x_k\right) e_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n p_{nk} x_k\right) e_n$$

所以

命题

设矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵，向量 v 在 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的坐标向量为 x，则 v 在 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标向量为 Px。

$Px = 0 \iff v = 0 \iff x = 0$，所以 P 可逆！

坐标向量、基变换和过渡矩阵

设从基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为Q。根据定义，Q 的第 j 列 Q_j 是 e_j 在基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的坐标向量。根据前面的命题，

命题

设矩阵 $P=\left(p_{ij}\right)_{n\times n}$ 是从基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵，向量 v 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的坐标向量为 x，则 v 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的坐标向量为 Px。

所以，e_j 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 PQ_j，于是从 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} PQ_1 & \cdots & PQ_n \end{pmatrix} = PQ;$$

但另一方面，从 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为 I_n，我们得到 $PQ=I_n$。

坐标向量、基变换和过渡矩阵

设从基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为Q。根据定义，Q 的第 j 列 Q_j 是 e_j 在基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的坐标向量。根据前面的命题，

命题

设矩阵 $P=\left(p_{ij}\right)_{n\times n}$ 是从基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵，向量 v 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的坐标向量为 x，则 v 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的坐标向量为 Px。

所以，e_j 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 PQ_j，于是从 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} PQ_1 & \cdots & PQ_n \end{pmatrix} = PQ;$$

但另一方面，从 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为 I_n，我们得到 $PQ=I_n$。

命题

设矩阵 P 是从基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵，则从基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的过渡矩阵为P^{-1}。

常见的过渡矩阵：

- 设有列向量空间 K_n 中的两组基 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $B_1,\ldots,B_n$，设从基 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $B_1,\ldots,B_n$ 的过渡矩阵为 P，
  则 B_j 在 $A_1,\ldots,A_n$ 坐标向量就是过渡矩阵 P 的第 j 列 P_j，所以 $(A_1,\ldots,A_n)P_j = B_j$，于是如果
  记 $(A_1,\ldots,A_n) = A$、$(B_1,\ldots,B_n) = B$，则有

$$(A_1,\ldots,A_n)P = B\text{，即}AP = B\text{，或说，}P = A^{-1}B\text{。}$$

常见的过渡矩阵：

- 设有列向量空间 K_n 中的两组基 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $B_1,\ldots,B_n$，设从基 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $B_1,\ldots,B_n$ 的过渡矩阵为 P，
则 B_j 在 $A_1,\ldots,A_n$ 坐标向量就是过渡矩阵 P 的第 j 列 P_j，所以 $(A_1,\ldots,A_n)P_j=B_j$，于是如果
记 $(A_1,\ldots,A_n)=A$、$(B_1,\ldots,B_n)=B$，则有

$$(A_1,\ldots,A_n)P=B\text{，即}AP=B\text{，或说，}P=A^{-1}B\text{。}$$

- 对行向量空间 K^n 中的两组基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\ldots,\beta_n$，其过渡矩阵为 $(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')^{-1}(\beta_1',\ldots,\beta_n')$，或说，如果
记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$，则过渡矩阵
为 $(A')^{-1}B'=(BA^{-1})'$。

子空间

定义（线性子空间）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集。如果 U 关于 V 内的加法与数乘运算也组成数域 K 上的一个线性空间，则称 U 为 V 的一个子空间。

子空间

定义（线性子空间）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集。如果 U 关于 V 内的加法与数乘运算也组成数域 K 上的一个线性空间，则称 U 为 V 的一个子空间。

命题

设 V 是 K 上的线性空间，$\emptyset \neq U \subseteq V$，则 U 是 V 的线性子空间当且仅当下述两个条件成立：

子空间

定义（线性子空间）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集。如果 U 关于 V 内的加法与数乘运算也组成数域 K 上的一个线性空间，则称 U 为 V 的一个子空间。

命题

设 V 是 K 上的线性空间，$\emptyset \neq U \subseteq V$，则 U 是 V 的线性子空间当且仅当下述两个条件成立：

1. U 关于 V 的减法封闭；

子空间

定义（线性子空间）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集。如果 U 关于 V 内的加法与数乘运算也组成数域 K 上的一个线性空间，则称 U 为 V 的一个子空间。

命题

设 V 是 K 上的线性空间，$\emptyset \neq U \subseteq V$，则 U 是 V 的线性子空间当且仅当下述两个条件成立：

1. U 关于 V 的减法封闭；
2. U 关于 V 的数乘封闭。

子空间

定义（线性子空间）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集。如果 U 关于 V 内的加法与数乘运算也组成数域 K 上的一个线性空间，则称 U 为 V 的一个子空间。

命题

设 V 是 K 上的线性空间，$\emptyset \neq U \subseteq V$，则 U 是 V 的线性子空间当且仅当下述两个条件成立：

1. U 关于 V 的减法封闭；
2. U 关于 V 的数乘封闭。

记 $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$。

命题

设 V_1 和 V_2 是 K 上线性空间 V 的两个线性子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 都是 V 的线性子空间。

子空间

定理（基扩充定理）

设 U 是有限维空间 V 的一个子空间，则 U 的任一组基都可以扩充为 V 的一组基。

子空间

定理（基扩充定理）

设 U 是有限维空间 V 的一个子空间，则 U 的任一组基都可以扩充为 V 的一组基。

例

设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵。

子空间

定理（基扩充定理）

设 U 是有限维空间 V 的一个子空间，则 U 的任一组基都可以扩充为 V 的一组基。

例

设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵。

1. $\operatorname{col} A = \{Ax \mid x \in K_n\}$ 称为 A 的列空间（也称为秩空间）。$\operatorname{col} A$ 是 A 的列向量的线性组合全体形成的线性空间。其基为列向量全体的一个极大无关组。基的求法：将 A 经过初等行变换化为阶梯形，A 的（不是阶梯形的）主元所在列就是一组基；

子空间

定理（基扩充定理）

设 U 是有限维空间 V 的一个子空间，则 U 的任一组基都可以扩充为 V 的一组基。

例

设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵。

1. $\operatorname{col} A = \{Ax \mid x \in K_n\}$ 称为 A 的列空间（也称为秩空间）。$\operatorname{col} A$ 是 A 的列向量的线性组合全体形成的线性空间。其基为列向量全体的一个极大无关组。基的求法：将 A 经过初等行变换化为阶梯形，A 的（不是阶梯形的）主元所在列就是一组基；
2. $\operatorname{row} A = \{yA \mid y \in K^m\}$ 称为 A 的行空间。$\operatorname{row} A$ 是 A 的行向量的线性组合全体形成的线性空间。基的求法：将 A 经过初等行变换化为阶梯形，则阶梯形的非零行就是 $\operatorname{row} A$ 一组基；

子空间

定理（基扩充定理）

设 U 是有限维空间 V 的一个子空间，则 U 的任一组基都可以扩充为 V 的一组基。

例

设 A 是数域 K 上一个 $m \times n$ 矩阵。

1. $\operatorname{col} A = \{Ax \mid x \in K_n\}$ 称为 A 的列空间（也称为秩空间）。$\operatorname{col} A$ 是 A 的列向量的线性组合全体形成的线性空间。其基为列向量全体的一个极大无关组。基的求法：将 A 经过初等行变换化为阶梯形，A 的（不是阶梯形的）主元所在列就是一组基；
2. $\operatorname{row} A = \{yA \mid y \in K^m\}$ 称为 A 的行空间。$\operatorname{row} A$ 是 A 的行向量的线性组合全体形成的线性空间。基的求法：将 A 经过初等行变换化为阶梯形，则阶梯形的非零行就是 $\operatorname{row} A$ 一组基；
3. $nul\ A = \{x \mid x \in K_n,\ Ax = 0\}$ 称为 A 的零空间。基的求法将在线性方程组求解理论中给出。

关于子空间的维数，有下列的维数公式

定理（维数公式）

设 V 为 n 维线性空间，V_1，V_2 为其子空间，则有

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)。$$

关于子空间的维数，有下列的维数公式

定理（维数公式）

设 V 为 n 维线性空间，V_1，V_2 为其子空间，则有

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)。$$

证明： 取 $V_1\cap V_2$ 的一组基 $v_1,\cdots,v_r$，扩充为 V_1 的一组基 $v_1,\cdots,v_r$，$v_{r+1},\ldots,v_s$；同时也将之扩充为 V_2 的一组基 $v_1,\cdots,v_r,v'_{r+1},\ldots,v'_t$，则有 $\dim V_1\cap V_2=r$，$\dim V_1=s$，$\dim V_2=t$，显然，V_1+V_2 中任一元素可由 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_s,v'_{r+1},\ldots,v'_t$ 表出；并且，若

$$\sum_{k=1}^{s}\lambda_i v_i+\sum_{k=r+1}^{t}\mu_i v'_i=0,$$

则 $\sum_{k=1}^{s}\lambda_i v_i=-\sum_{k=r+1}^{t}\mu_i v'_i$ 即在 V_1 中（左边），又在 V_2 中，所以 $\sum_{k=1}^{s}\lambda_i v_i\in V_1\cap V_2$ 是 $v_1,\cdots,v_r$ 的组合，由系数唯一性，得到 $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_s=0$，于是 $\sum_{k=1}^{r}\lambda_i v_i+\sum_{k=r+1}^{t}\mu_i v'_i=0$，在 V_2 中表达式系数唯一，得到 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$，$\mu_{r+1}=\cdots=\mu_t=0$，所以 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_s,v'_{r+1},\ldots,v'_t$ 线性无关，为 V_1+V_2 的基，故有

$$\dim(V_1+V_2)=s+t-r=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n。$$

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n 。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \leq i \leq n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^{n} V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n 。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和；

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和；
2. $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \{0\}, \forall i = 2, \cdots, n;$

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和；
2. $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \{0\}, \forall i = 2, \cdots, n$；
3. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 中的任一个向量 v 的表示法唯一；

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和；
2. $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \{0\}, \forall i = 2, \cdots, n$；
3. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 中的任一个向量 v 的表示法唯一；
4. 零向量表示法唯一；

当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ 时，称 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ 为直和。

定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的有限为子空间。如果对所有的 $1 \le i \le n$，有 $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$，则称 $\sum_{i=1}^n V_i$ 为直和，记为

$$\oplus_{i=1}^n V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n。$$

定理（直和等价条件）

设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为数域 K 上的线性空间 V 上的子空间，则下列等价：

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和；
2. $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1}) = \{0\}, \forall i = 2, \cdots, n$；
3. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 中的任一个向量 v 的表示法唯一；
4. 零向量表示法唯一；
5. $\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n$。

子空间

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$，
则 $\{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n | k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 V 的一个子空间，称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$张（生）成的子空间，记为 $\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$。若 $S \subseteq V$，则 S 中向量的线性组合全体 $\mathcal{L}(S)$ 也是一个线性空间，称作 S生成（张成）的线性子空间。容易验证，$\mathcal{L}(S)$ 的维数等于向量组 S 的秩。

子空间

定义

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$，
则 $\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n|k_i\in K,i=1,2,\cdots,n\}$ 是 V 的一个子空间，称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$张（生）成的子空间，记为 $\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$。若 $S\subseteq V$，则 S 中向量的线性组合全体 $\mathcal{L}(S)$ 也是一个线性空间，称作 S生成（张成）的线性子空间。容易验证，$\mathcal{L}(S)$ 的维数等于向量组 S 的秩。

例

设 V_1、V_2、V_3 均是线性空间 V 的线性子空间，如果 $V_2\supseteq V_3$、$V_1+V_2=V_1+V_3$ 且 $V_1\cap V_2=V_1\cap V_3$，则有 $V_2=V_3$。

子空间

定义

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \in V$，
则 $\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n | k_i \in K, i=1,2,\cdots,n\}$ 是 V 的一个子空间，称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$张（生）成的子空间，记为 $\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$。若 $S\subseteq V$，则 S 中向量的线性组合全体 $\mathcal{L}(S)$ 也是一个线性空间，称作 S生成（张成）的线性子空间。容易验证，$\mathcal{L}(S)$ 的维数等于向量组 S 的秩。

例

设 V_1、V_2、V_3 均是线性空间 V 的线性子空间，如果 $V_2\supseteq V_3$、$V_1+V_2=V_1+V_3$ 且 $V_1\cap V_2=V_1\cap V_3$，则有 $V_2=V_3$。

证明： 设 $v_2\in V_2$，则 $v_2=0+v_2\in V_1+V_2=V_1+V_3$，故而有 $v_2=v_1+v_3$，其中 $v_i\in V_i$；于是有 $v_2-v_3=v_1\in V_1\cap V_2=V_1\cap V_3$，所以 $v_2=v_1+v_3\in V_3$。 $\square$

线性方程组

非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

若记 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}$，则方程组同解于

1. 矩阵形式 $Ax=b$;

线性方程组

非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

若记 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则方程组同解于

1. 矩阵形式 $Ax=b$;
2. 向量形式 $x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n=b$。

$(A : b)$ 称为方程组的增广矩阵，$Ax = 0$ 称为方程对应的齐次方程。

$(A:b)$ 称为方程组的增广矩阵，$Ax=0$ 称为方程对应的齐次方程。

定理（线性方程组的解的叠加原理）

设 α 和 β 分别是方程组 $Ax=b$ 和 $Ax=c$ 的解，则对任意的 $\lambda,\ \mu\in K$，有 $\lambda\alpha+\mu\beta$ 是 $\lambda b+\mu c$ 的解。

$(A:b)$ 称为方程组的增广矩阵，$Ax=0$ 称为方程对应的齐次方程。

定理（线性方程组的解的叠加原理）

设 α 和 β 分别是方程组 $Ax=b$ 和 $Ax=c$ 的解，则对任意的 λ, $\mu\in K$，有 $\lambda\alpha+\mu\beta$ 是 $\lambda b+\mu c$ 的解。

定理

设方程组 $Ax=b$ 有解 y_0，则其全部解为

$$\{y+x \mid Ax=0\}=y_0+\{x \mid Ax=0\};$$

称 y_0 为一个特解：即为特解加上相应的齐次方程组的全部解。

$(A:b)$ 称为方程组的增广矩阵，$Ax=0$ 称为方程对应的齐次方程。

定理（线性方程组的解的叠加原理）

设 α 和 β 分别是方程组 $Ax=b$ 和 $Ax=c$ 的解，则对任意的 $\lambda,\ \mu\in K$，有 $\lambda\alpha+\mu\beta$ 是 $\lambda b+\mu c$ 的解。

定理

设方程组 $Ax=b$ 有解 y_0，则其全部解为

$$\{y+x\mid Ax=0\}=y_0+\{x\mid Ax=0\};$$

称 y_0 为一个特解：即为特解加上相应的齐次方程组的全部解。

所以，解一个线性方程组需要找到齐次方程组的全部解和看是不是有特解。

方程组是否有解 $\iff b=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n$ 是线性组合 $\iff rank\,(A:b)=rank\,(A)$

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

定理

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。齐次方程组的 $Ax=0$ 的解全体构成 K_n 的一个线性子空间，称为解空间，该解空间的一组基称为 $Ax=0$ 的一个基础解系，每个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

定理

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。齐次方程组的 $Ax=0$ 的解全体构成 K_n 的一个线性子空间，称为解空间，该解空间的一组基称为 $Ax=0$ 的一个基础解系，每个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

我们把前面的结论总结在一起，就得到

定理（线性方程组的解的结构定理）

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。则

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

定理

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。齐次方程组的 $Ax=0$ 的解全体构成 K_n 的一个线性子空间，称为解空间，该解空间的一组基称为 $Ax=0$ 的一个基础解系，每个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

我们把前面的结论总结在一起，就得到

定理（线性方程组的解的结构定理）

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。则

1. 方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $rank(A:b)=rank\,(A)$;

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

定理

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。齐次方程组的 $Ax=0$ 的解全体构成 K_n 的一个线性子空间，称为解空间，该解空间的一组基称为 $Ax=0$ 的一个基础解系，每个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

我们把前面的结论总结在一起，就得到

定理（线性方程组的解的结构定理）

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。则

1. 方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $rank(A:b)=rank\,(A)$；
2. 当 $rank(A:b)=rank\,(A)=n$ 时，方程组有唯一解；

为了求解线性方程组，还需给出齐次方程组求解的方法。

定理

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。齐次方程组的 $Ax=0$ 的解全体构成 K_n 的一个线性子空间，称为解空间，该解空间的一组基称为 $Ax=0$ 的一个基础解系，每个基础解系中有 $n-r$ 个向量。

我们把前面的结论总结在一起，就得到

定理（线性方程组的解的结构定理）

设 $A_{m\times n}$ 为秩为 r 的矩阵。则

1. 方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $rank(A:b)=rank\,(A)$；
2. 当 $rank(A:b)=rank\,(A)=n$ 时，方程组有唯一解；
3. 当 $rank(A:b)=rank\,(A)<n$ 时，方程组有无穷组解，其所有解（称为通解，一般解）可写为

$$y_0+c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 y_0 为 $Ax=b$ 的一个固定解，$\xi_1,\ldots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系。

非齐次和齐次的方程组可以放在一起统一求解—消去法：对方程组 $Ax=b$，将增广矩阵 $(A:b)$ 经过初等行变换化为最简阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & c_{1\,j_1+1} & \cdots & 0 & c_{1\,j_2+1} & \cdots & 0 & c_{1\,j_r+1} & \cdots & c_{1\,n} & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{2\,j_2+1} & \cdots & 0 & c_{2\,j_r+1} & \cdots & c_{2\,n} & d_2 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r\,j_r+1} & \cdots & c_{r\,n} & d_r \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & \cdots & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

1. 如果 $d_{r+1}\neq 0$，则 $r(A:b)\neq r(A)$，此时方程组无解；

也可把增广矩阵化成阶梯形，采用倒解法（回代法）—从最后一个方程解起，把主元所在列对应的变量表示成其它变量的关系式、并将取得的结果依次代入到前一个方程，最后整理所得到的 x 成特解与基础解系的组合形式。

非齐次和齐次的方程组可以放在一起统一求解—消去法：对方程组 $Ax=b$，将增广矩阵 $(A:b)$ 经过初等行变换化为最简阶梯形

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & c_{1\,j_1+1} & \cdots & 0 & c_{1\,j_2+1} & \cdots & 0 & c_{1\,j_r+1} & \cdots & c_{1\,n} & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{2\,j_2+1} & \cdots & 0 & c_{2\,j_r+1} & \cdots & c_{2\,n} & d_2 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r\,j_r+1} & \cdots & c_{r\,n} & d_r \\
0 & & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & \cdots & & & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

1. 如果 $d_{r+1}\neq 0$，则 $r(A:b)\neq r(A)$，此时方程组无解；
2. 如果 $d_{r+1}=0$，则 $r(A:b)=r(A)$，此时方程组有解，把 x_{j_1}、x_{j_2}、$\ldots x_{j_r}$ 写成其他 x_j 的表达式，代入 x 整理即可得到通解；此时若 $r=n$，则无自由系数，解唯一，否则有自由系数，解有无穷多个。

也可把增广矩阵化成阶梯形，采用倒解法（回代法）—从最后一个方程解起，把主元所在列对应的变量表示成其它变量的关系式、并将取得的结果依次代入到前一个方程，最后整理所得到的 x 成特解与基础解系的组合形式。

非齐次和齐次的方程组可以放在一起统一求解。下面是一些例子：

例

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=2 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+6x_4+3x_5=6 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5=4 \end{cases}$$ ，其增广矩阵

为 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$，所以 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)'$

$=(3-2x_2+x_3,x_2,x_3,-1,2)'=(3,0,0,-1,2)'+x_2(-2,1,0,0,0)'$
$+x_3(1,0,1,0,0)'$。

例

已知 $\alpha_1=(2,1,4,-2)'$，$\alpha_2=(5,-1,3,3)'$ 和 $\alpha_3=(1,0,1,0)'$ 是方程组
$$\begin{cases} 2x_1-9x_2-cx_3+bx_4=1 \\ x_1-11x_2+ax_3+bx_4=1 \\ 5x_1-29x_2-2x_3-15x_4=3 \\ 4x_1-31x_2-x_3-15x_4=3 \end{cases}$$
的三个解，

例

已知 $\alpha_1 = (2,1,4,-2)'$，$\alpha_2 = (5,-1,3,3)'$ 和 $\alpha_3 = (1,0,1,0)'$ 是方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - cx_3 + bx_4 = 1 \\ x_1 - 11x_2 + ax_3 + bx_4 = 1 \\ 5x_1 - 29x_2 - 2x_3 - 15x_4 = 3 \\ 4x_1 - 31x_2 - x_3 - 15x_4 = 3 \end{cases}$$

的三个解，

1. 证明：方程组系数矩阵的秩为 2;

例

已知 $\alpha_1=(2,1,4,-2)'$，$\alpha_2=(5,-1,3,3)'$ 和 $\alpha_3=(1,0,1,0)'$ 是方程组
$$\begin{cases}2x_1-9x_2-cx_3+bx_4=1\\ x_1-11x_2+ax_3+bx_4=1\\ 5x_1-29x_2-2x_3-15x_4=3\\ 4x_1-31x_2-x_3-15x_4=3\end{cases}$$
的三个解，

1. 证明：方程组系数矩阵的秩为 2;
2. 求出参数 a，b，c 的值，并求解方程组。

例

已知 $\alpha_1=(2,1,4,-2)'$，$\alpha_2=(5,-1,3,3)'$ 和 $\alpha_3=(1,0,1,0)'$ 是方程组
$$\begin{cases} 2x_1-9x_2-cx_3+bx_4=1 \\ x_1-11x_2+ax_3+bx_4=1 \\ 5x_1-29x_2-2x_3-15x_4=3 \\ 4x_1-31x_2-x_3-15x_4=3 \end{cases}$$
的三个解，

1. 证明：方程组系数矩阵的秩为 2;
2. 求出参数 a，b，c 的值，并求解方程组。

解:

1. 容易看出，方程组第 3、4 个方程的未知数系数不成比例，所以系数矩阵的秩应大于或等于 2; 同时由
于 $\alpha_3-\alpha_1=(-1,-1,-3,2)'$，$\alpha_2-\alpha_1=(3,-2,-1,5)'$ 是相应齐次方程组的解，且也不成比例，所以齐次方程组的基础解系中至少有两个线性无关的解，于是系数矩阵的秩小于或等于 $4-2=2$，故只能是 2;

例

已知 $\alpha_1=(2,1,4,-2)'$，$\alpha_2=(5,-1,3,3)'$ 和 $\alpha_3=(1,0,1,0)'$ 是方程组
$$\begin{cases}2x_1-9x_2-cx_3+bx_4=1\\x_1-11x_2+ax_3+bx_4=1\\5x_1-29x_2-2x_3-15x_4=3\\4x_1-31x_2-x_3-15x_4=3\end{cases}$$
的三个解，

1. 证明：方程组系数矩阵的秩为 2;
2. 求出参数 a，b，c 的值，并求解方程组。

解:

1. 容易看出，方程组第 3、4 个方程的未知数系数不成比例，所以系数矩阵的秩应大于或等于 2；同时由于 $\alpha_3-\alpha_1=(-1,-1,-3,2)'$，$\alpha_2-\alpha_1=(3,-2,-1,5)'$ 是相应齐次方程组的解，且也不成比例，所以齐次方程组的基础解系中至少有两个线性无关的解，于是系数矩阵的秩小于或等于 $4-2=2$，故只能是 2;
2. 由系数矩阵的秩为 2,