二阶行列式

设有两个二元一次方程组成的方程组（设 a_{11}, a_{21} 两个数不全为零）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

按照《九章算术》上提供的求解方法：第二个方程乘 a_{11}，得到

$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2,$$

再减去第一个方程的 a_{21} 倍，则得到

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 - a_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 \\ &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{aligned}$$

二阶行列式

所以

定理

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，$\begin{cases} x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$ 。

二阶行列式

前一页得到的方程为：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

- 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，
  - 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ 则方程组无解；
  - 若 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$ 时，第二个方程是第一个方程的倍式，所以方程组有无穷组解！

三阶行列式

通过从第二个方程中减去第一个方程的适当倍数，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

得到 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$；对三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases},$$

当实施类似的处理时，也可得到

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

三阶行列式

再利用前面得到的二元一次方程组的解，得到

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{31} & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

从而得到

$$\begin{aligned} & \left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\right) x_3 \\ = & \left(y_1a_{21}a_{32} - y_1a_{22}a_{31} - y_2a_{11}a_{32} + y_2a_{12}a_{31} + a_{11}y_3a_{22} - y_3a_{12}a_{21}\right) \end{aligned}$$

所以，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

三阶行列式

称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

为三阶行列式（determinant）。
它和二阶行列式在定义概念时的情形基本上一致，即能决定方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases}$ 是不是对任意的 y_1, y_2, y_3 都有唯一解；
三阶行列式还可由如下步骤来产生（从二元一次方程的消元得到）：
对 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

对 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 消元 x_1，$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

所以 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$

1. 第一、二消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

2. 第一、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

3. 第二、三消

   得 $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$(1)\times a_{33}-(2)\times a_{23}+(3)\times a_{13} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

这样 x_2 前面的系数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

同理，$(1) \times a_{32} - (2) \times a_{22} + (3) \times a_{12} \Rightarrow$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = -a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

这又意味着

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

及

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

受此启发，定义一般的 n 阶行列式的概念如下：
递推定义：设 $n-1$ 阶行列式已被定义，则定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1}$$

其中 M_{kl} 为矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 划去第 k 行与第 l 列后剩下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式，称 M_{kl} 为 a_{kl} 的余子式。（每个都是 $n-1$ 阶行列式）。

为方便计，将余子式连同符号写在一起，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式。

可用归纳法证明，一个 n 阶行列式中有 $n!$ 项的代数（表示有正有负）和，每一项是不在同行，不在同列的 n 个数之积。

排列定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ \text{为}12\cdots n\text{的全排列}}} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是全排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中左大右小的**逆序对数目**。

从这个定义也可看出，一个 n 阶行列式中有 $n!$ 项的代数（表示有正有负）和，每一项是不在同行，不在同列的 n 个数之积。

而且，当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时，上述两个定义对应的值恰好一致。这并不是偶然的，实际上它对任意 n 阶行列式都成立，我们将在以后证明这个结论。

注

行列式是 $n \times n$ 阶矩阵对应的一个数值，是关于矩阵中 n^2 个项（可当作 n^2 元）一个函数。

行列式的性质

上三角矩阵的行列式等于其对角元之积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

证明：对一个全排列 $i_1i_2\cdots i_n$，$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 中有可能非零的项只能是 $i_n = n, i_{n-1} = n-1, \ldots, i_1 = 1$，而此时 $i_1i_2\cdots i_n$ 就是自然顺序，所以 $N(i_1i_2\cdots i_n) = 0$。排列定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$$\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ \text{为}12\cdots n\text{的全排列}}} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$ 中可能非零的项仅有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，所以有欲证结论。 □

行列式的性质

下三角矩阵的行列式等于其对角元之积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

证明： 对一个全排列 $i_1i_2\cdots i_n$，$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 中有可能非零的项只能是 $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$，而此时 $i_1i_2\cdots i_n$ 就是自然顺序，所以 $N(i_1i_2\cdots i_n) = 0$。排列定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$\sum\limits_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ \text{为}12\cdots n\text{的全排列}}} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 中可能非零的项仅有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，所以有欲证结论。 $\square$

行列式行列对换，行列式的值不变

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n^T$$

引理

一个排列的逆序对数，在对换排列中两个数的位置时，奇偶性改变。即

$$N\left(i_1\ i_2\ \cdots\ i_j\ \cdots\ i_k\ \cdots\ i_n\right) = N\left(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k\ \cdots\ i_j\ \cdots\ i_n\right) + \text{奇数}$$

4 1 3 5 6 2 ： 逆序对：$(4,1),(4,3),(4,2),(3,2),(6,2)$

$\Downarrow$

4 1 5 3 6 2 ： 逆序对：$(4,1),(4,3),(4,2),(3,2),(6,2),(5,3)$

矩阵某一行（列）乘常数c，其行列式等于原行列式乘c：

$$\left|\begin{array}{c}\\ \\ \xrightarrow{} \\ k \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别若行列式某行（或某列）的元素全为零，则行列式为零。

行列式两行（列）互换，行列式变号

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{j1}} & \color{blue}{a_{j2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{j1}} & \color{blue}{a_{j2}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的某一行（列）的每个元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

行列式的某一行（列）的k倍加到另一行（列），行列式不变

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

特别若行列式某两行（列）的元素成比例，则行列式的值为零。

行列式按第i行（或第i列）成立展开式

$$
\begin{aligned}
a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} &= |A|,\ \forall i, 1\le i\le n\\
a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} &= |A|,\ \forall j, 1\le j\le n
\end{aligned}
$$

在线性方程组的消元法中可发现，当行列式中一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和一定是于零。即

$$
\begin{aligned}
a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} &= 0,\ 1\le i\ne j\le n。\\
a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj} &= 0,\ 1\le i\ne j\le n。
\end{aligned}
$$

把这两个式子写在一起，就得到正交关系式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\,|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

Cramer 法则

方程个数与未知量个数相等的线性方程组，Cramer 发现了如下的求解法则

当线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组(1)有唯一解，

Cramer 法则

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d}; \qquad (*)$$

其中 d_j 是将系数矩阵中的第 j 列换成常数列后得到的行列式，即

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

定理蕴含三个部分：在 $d \neq 0$ 时，

1. 方程组有解；
2. 解是唯一的；
3. 解的表达式$(*)$

行列式的计算

一般数字矩阵 $\left|(a_{ij})_{n\times n}\right|$ 的行列式计算步骤：

1. 检查第一列是否有非零元，若无，行列式为零；
2. 若有，必要时可交换两行（行列式变号），使 $(1,1)$ 位置非零；
3. 把第一行的适当倍数加到其它行，使第一列上其它位置均为零；
4. 再对得到的矩阵的 $(1,1)$ 子式重复前面三步，最后得到一个上三角行列式，对角元乘在一起就得到该行列式。

如

$$\left|\begin{array}{c}\\ -4\\ -7\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{array}{c}\\ \\ -2\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-11\end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&1\end{pmatrix}\right| = 1\times(-3)\times 1 = -3$$

Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)。$$

从上式可以看出，Vandermonde 行列式等于零当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有两个相同。

Vandermonde 行列式的应用：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相同的 n 个数，则对任意的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，存在唯一的一个次数小于 n 的多项式 $f(x)$，使得

$$f(a_i) = b_i，1 \leq i \leq n。$$

证明：待定系数，设 $f(x) = c_n x^{n-1} + \cdots + c_2 x + c_1$，代入 $f(a_i) = b_i$；

$$\begin{cases} c_1 + a_1 c_2 + \cdots + a_n^{n-1} c_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_1 + a_n c_2 + \cdots + a_n^{n-1} c_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式非零，待定的系数有唯一解。 □

实际上，$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$ 称为 Lagrange 插值多项式。

1. 上（下）三角矩阵的行列式等于其对角元之积
2. 行列式行列对换，行列式的值不变
3. 矩阵某一行（列）的线性性质
4. 行列式两行（列）互换，行列式变号
5. 行列式的某一行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式不变
6. 正交关系式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}|A|$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}|A|$$

- 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{vmatrix} = d$,

  则 $\begin{vmatrix} 2a_{2\,1} & -4a_{2\,2} & 2a_{2\,3} \\ 3a_{3\,1} & -6a_{3\,2} & 3a_{3\,3} \\ -1a_{1\,1} & 2a_{1\,2} & -1a_{1\,3} \end{vmatrix} =?$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-3a_{13} & a_{13} \\ -a_{21} & 3a_{23}-a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-3a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =?$

  另：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} =?$

- $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix} =?$

定义

一个 $n\times n$-矩阵 A 中取 k $(k\le n)$ 行，k 列的交点上的 k^2 个元素，按原来相对位置排列成一个 $k\times k$-矩阵，称为 A 的一个子矩阵，其行列式称为 A 的一个子式；在 A 中划去这 k 行、k 列后余下的元素按照原来的相对位置构成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 M 的余子式。
若选取的是 $i_1,\dots,i_k$ 行，$j_1,\dots,j_k$ 列，由记此子式 $M=A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k\end{pmatrix}$，其代数余子式 $\widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k\end{pmatrix}$ 定义为 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M'$。

定理（Laplace 定理）

设 A 是一个 $n\times n$-矩阵，则对任意的 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$，有

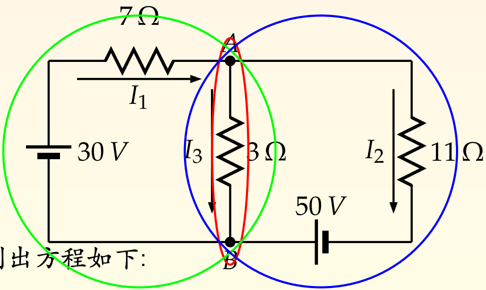
$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k\end{pmatrix}\widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k\end{pmatrix} \\
|A| &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k \\ i_1 & \dots & i_k\end{pmatrix}\widehat{A}\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k \\ i_1 & \dots & i_k\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

Kirchhoff 电压定律： 在电路中的任一回路中，电压降之代数和为零。

设有电路，如右图



根据 Kirchhoff 定律，列出方程如下:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
I_1 & - & I_2 & - & I_3 & & & = & 0 & & A \text{ 或 } B \text{ 点电流} \\
7I_1 & & & + & 3I_3 & - & 30 & = & 0 & & \text{左边回路} \\
& & 11I_2 & - & 3I_3 & - & 50 & = & 0 & & \text{右边回路}
\end{array}
$$

线性方程组应用一：电路计算

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7I_1 + 3I_3 - 30 = 0 \\ 11I_2 - 3I_3 - 50 = 0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 11 & -3 \end{vmatrix} = -131$，常数列为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$，

由 Cramer 法则：

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 30 & 0 & 3 \\ 50 & 11 & -3 \end{vmatrix}}{-131} = \frac{570}{131}(A);\ I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 30 & 3 \\ 0 & 50 & -3 \end{vmatrix}}{-131} = \frac{590}{131}(A);$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 30 \\ 0 & 11 & 50 \end{vmatrix}}{-131} = -\frac{20}{131}(A)$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

设有一个自产自足的经济体，由三部门构成：M - 机器制造；A - 粮食生产；及 S - 服务部门。如下表，其中每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

为了保证这个经济体的可持续发展，该如何给各个部门定价?

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$\begin{array}{ccccccc} .60p_1 & + & .50p_2 & + & .30p_3 & = & p_1 \\ .30p_1 & + & .40p_2 & + & .20p_3 & = & p_2 \\ .10p_1 & + & .10p_2 & + & .50p_3 & = & p_3 \end{array}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

可得，$p_1 = 3.111\,1 p_3, p_2 = 1.888\,9 p_3$。即如果将服务部门一年的产值定为 1,000,000 的话，机器制造部门的年产值就应定为 3,111,100，而粮食生产的年产值就应定为 1,888,900。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

对于一个经济体来说，若一个部门的产品（服务）除了供该经济体自用外，还有剩余，则该经济体还可将这一部门的产品（服务）向外部输出。在该外向模型中，价格是固定的。设表如下：其中每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

现设外部将该经济体订购 50 单位的制造机械，30 单位的粮食，及 20 单位的服务。问该经济体该如何组织生产？

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

Leontief 规则：

$$\{\text{生产的总量 } \mathbf{x}\} = \{\text{生产中消耗量}\} + \{\text{最终需求 } \mathbf{d}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 50.0 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 30.0 \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 20.0 \end{cases}$$

解之得 $x_1 = 226$，$x_2 = 119$，$x_3 = 78$。

Leontief 规则： $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

上面两个模型是哈佛教授 Wassily Leontief 在 1949 年前建立的。当时他将美国的经济划分成了 500 个部门，统计出 $500 \times 500 = 250,000$ 个系数，由于当时最快的计算机 Mark II 不能胜任这样复杂的计算任务，Leontief 又将之简化成有 42 个未知数的 42 个方程构成的方程组。用了几个月的编程，和 56 个小时的计算，Leontief 得到了最终想要的结果。

这是历史上第一个应用计算机分析大规模数学模型的成功范例。

因为这项成就，Leontief 在 1973 年被授予 Nobel 经济学奖。