

文章编号:1673-0062(2018)01-0063-04

修正的非线性水波方程的精确行波解

朱 晖,郑立景*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘要:利用动力系统分支方法研究修正的 Camassa-Holm equation(非线性水波方程即 CH 方程),分析了一些特殊的相轨道,这些相轨道既过鞍点也过奇直线,并且计算出其所对应的精确行波解.

关键词:修正 CH 方程;动力系统分支方法;奇直线

中图分类号:0175;0177 **文献标志码:**A

The Exact Travelling Wave Solutions of Revised Camassa-Holm Equation

ZHU Hui, ZHENG Li-jing*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: By using the bifurcation method of dynamical systems, this paper investigates revised CH equation. It analyses some special phase orbits passing through not only saddle but also odd straight line, and then obtains the exact travelling wave solutions.

key words: revised CH equation; bifurcation method of dynamical system; odd straight line

0 引 言

1993年, Camassa 和 Holm^[1]提出了非线性水波方程:

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

即著名的 CH 方程.该方程也具有十分重要的物理意义,它还可以由超弹力杆模型^[2]演化而来.

本文研究修正的水波方程:

$$u_t - u_{xxx} + 3u^2 u_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1)$$

Camassa 和 Holm 证明了式(1)有尖波解^[1];

Wazwaz^[3-4]用一些特殊函数获得了(1)的许多显示孤立波解;刘正荣教授^[5-6]证明了方程(1)同时存在钟形孤立波和尖波,并且通过一些特殊相位图得到了一些周期爆破解^[7],以及它们的极限形式.本文用动力系统的分支方法^[8-10],对一些特殊的相位轨道^[11]进行研究,即那些既过鞍点又过奇直线的相曲线进行分析研究,发现这些相曲线随着参数的变换有一定的变化规律,并求出了其对应的精确行波解.

收稿日期:2017-10-10

基金项目:衡阳市科技局基金资助项目(2016KJ56)

作者简介:朱 晖(1981-),女,讲师,硕士,主要从事偏微分方程的研究.E-mail:usc-zhu@163.com. * 通讯作者:郑立景, E-mail:zhenglijing817@163.com

1 行波系统的分支相位图

设

$$u(x, t) = \varphi(\xi) \quad \xi = x - ct \quad (2)$$

其中常数 c 是行波的速度.

将式(2)代入方程(1),并积分一次得到:

$$\varphi''(\varphi - c) = \varphi^3 - c\varphi + g - \frac{1}{2}(\varphi')^2 \quad (3)$$

令 $y = \varphi'$, 并将其代入式(3),则建立以下的平面系统:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\xi} = y \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{\varphi^3 - c\varphi + g - \frac{1}{2}y^2}{\varphi - c} \end{cases} \quad (4)$$

作变量替换 $d\xi = (\varphi - c)d\tau$, 平面系统(4)转化为如下系统

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = (\varphi - c)y \\ \frac{dy}{d\tau} = \varphi^3 - c\varphi + g - \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \quad (5)$$

平面系统(4)与(5)有相同首次积分

$$H(\varphi, y) = (\varphi - c)y^2 - \left(\frac{\varphi^4}{2} - c\varphi^2 + 2g\varphi\right) = h,$$

根据定性理论进行分析,既过鞍点又过奇直线的相曲线出现在以下两种情形:

(a) $g = c^2 - c^3$;

(b) 当 $g = -\varphi_0^3 + c\varphi_0, \varphi_0 = \frac{-c + \sqrt{-2c^2 + 6c}}{3}$

并且分别得到相应分支相位图 1 和图 2.

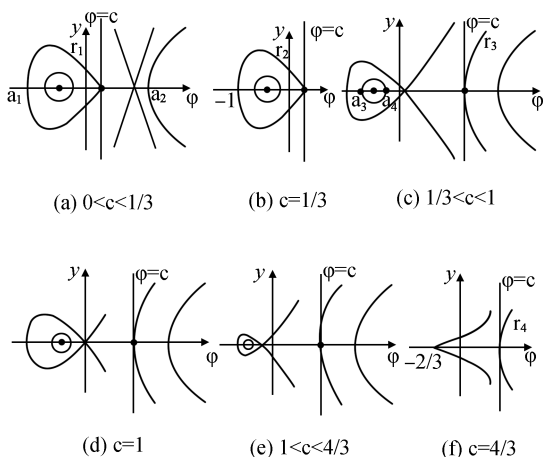


图 1 当 $g=c^2-c^3$ 时,系统(4)与(5)的分支相位图
Fig.1 Bifurcation portraits of system (4) and (5) when $g=c^2-c^3$

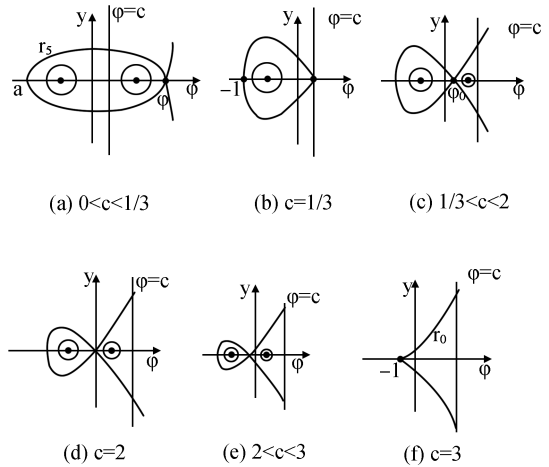


图 2 当 $g=-\varphi_0^3+c\varphi_0$ 时,系统(4)和(5)的分支相位图
Fig.2 Bifurcation portraits of system (4) and (5) when $g=-\varphi_0^3+c\varphi_0$

2 主要结果

定理 1 当 $g = c^2 - c^3$, 根据不同的参数区域得到方程(1)如下形式的解:

1) 当 $0 < c < \frac{1}{3}$, 方程(1)有周期波解:

$$\varphi_1(\xi) = a_1 + (c - a_1)sn^2\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\alpha}, k\right)$$

其中 $a_1 = -c - \sqrt{2c - 2c^2}, a_2 = -c + \sqrt{2c - 2c^2}$,

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{a_2 - a_1}}, k^2 = \frac{c - a_1}{a_2 - a_1}.$$

2) 当 $c = \frac{1}{3}$, 方程(1)有孤立波解:

$$\varphi_2(\xi) = -1 + \frac{4}{3} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{6}}{3}|\xi|} - 1}{e^{\frac{\sqrt{6}}{3}|\xi|} + 1} \right)^2$$

3) 当 $\frac{1}{3} < c < \frac{4}{3}$, 方程(1)有周期爆破解

$$\varphi_3(\xi) = a_3 + \frac{c - a_3}{sn\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\alpha}, k\right)}$$

其中 $a_3 = -c - \sqrt{2c - 2c^2}, a_4 = -c + \sqrt{2c - 2c^2}$

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{c - a_3}}, k^2 = \frac{a_4 - a_3}{c - a_3}$$

4) 当 $c = \frac{4}{3}$, 方程(1)有爆破解:

$$\varphi_4(\xi) = \frac{2\sqrt{2} + \frac{4}{3} + (\frac{4}{3} - 2\sqrt{2})cn(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\alpha}, k)}{1 + cn(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\alpha}, k)},$$

其中 $\alpha = 8^{-\frac{1}{4}}, k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

定理 2 当 $g = -\varphi_0^3 + c\varphi_0, \varphi_0 = \frac{-c + \sqrt{-2c^2 + 6c}}{3}$, 方程(1)有如下形式的解:

5) 当 $0 < c < 3$, 方程(1)有孤立波解:

$$\varphi_5(\xi) = a_5 + (\varphi_0 - a_5) \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{\varphi_0 - a_5}{2}}|\xi|} - 1}{e^{\sqrt{\frac{\varphi_0 - a_5}{2}}|\xi|} + 1} \right)^2,$$

其中 $a_5 = \frac{7c^2 - 24c - 4c\sqrt{-2c^2 + 6c}}{3c + 6\sqrt{-2c^2 + 6c}}$.

6) 当 $c = 3$, 方程(1)有孤立波解:

$$\varphi_6(\xi) = -1 + \frac{1}{\left[\frac{|\xi|}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right]^2}.$$

3 主要结果的证明

1) 曲线 Γ_1 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi - a_1)(c - \varphi)(a_2 - \varphi), \quad a_1 < \varphi < c < a_2, \quad (6)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(6)并沿着曲线 Γ_1 积分得到

$$\int_{a_1}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{(\varphi - a_1)(c - \varphi)(a_2 - \varphi)}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_1(\xi)$.

2) 曲线 Γ_2 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi + 1)(\varphi - c)^2, \quad -1 < \varphi < c, \quad (7)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(7)并沿着曲线 Γ_2 积分得到

$$\int_{-1}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{(\varphi + 1)(\varphi - c)^2}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_2(\xi)$.

3) 曲线 Γ_3 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi - a_3)(\varphi - a_4)(\varphi - c), \quad a_3 < a_4 < c < \varphi, \quad (8)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(8)并沿着曲线 Γ_3 积分得到

$$\int_{\varphi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\varphi - a_3)(\varphi - a_4)(\varphi - c)}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_3(\xi)$.

4) 曲线 Γ_4 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi - c)(\varphi^2 + m\varphi + n), \quad c < \varphi, \quad (9)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(9)并沿着曲线 Γ_4 积分得到

$$\int_c^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{(\varphi - c)(\varphi^2 + \frac{8}{3}\varphi + \frac{8}{3})}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_4(\xi)$.

5) 曲线 Γ_5 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi - a_5)(\varphi_0 - \varphi)^2, \quad a_5 < \varphi < \varphi_0, \quad (10)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(10)并沿着曲线 Γ_5 积分

得到

$$\int_{a_5}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{(\varphi - a_5)(\varphi_0 - \varphi)^2}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_5(\xi)$.

6) 曲线 Γ_6 具有表达式

$$2y^2 = (\varphi + 1)^3, \quad -1 < \varphi < 3, \quad (11)$$

把 $y = \frac{d\varphi}{d\xi}$ 代入式(11)并沿着曲线 Γ_6 积分

得到

$$\int_{\varphi}^3 \frac{1}{\sqrt{(\varphi + 1)^3}} d\varphi = \frac{|\xi|}{2},$$

求解积分得到 $\varphi_6(\xi)$.

4 结 论

本文讨论了方程(1)的分支相位图中既过齐直线又过鞍点的特殊相曲线及它所对应的解, 得出了以下结果:

1) 无论波速 c 怎样, 这样的特殊相曲线总是存在的;

2) 当 $g = c^2 - c^3$ 时, 随着波速 c 的变化, 此特殊相曲线对应的解从周期波演变为孤立波, 最后爆破;

3) 当 $g = -\varphi^3 + c\varphi$ 时, 随着波速 c 的变化, 此特殊相曲线对应的解一直是孤立波.

参考文献:

[1] CAMASSA R, HOLM DD. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical review letters, 1993, 71(11):1661-1664. (下转第 91 页)

从应力云图可以得出结论,动鄂体所受到的最大应力为 50.973 MPa,位置在肘板底座附近,最大应力值远远小于材料 ZG270-500 的屈服极限 270 MPa,动鄂体上部的圆柱体和下端受到的应力较小,基本接近于 0,动鄂体应力分布不均,在肘板底座和肋板与动鄂上部圆柱体连接处发生了应力集中现象,这与破碎机实际工作状况相吻合;从变形云图可以看出动鄂体最大变形量为 0.068 mm,位置发生在动鄂体齿面中部的边缘地方,动鄂体头部圆柱体基本无变形.由有限元分析结果可以得 PEX150×750 复摆鄂式破碎机知动鄂体有足够的强度保证破碎机正常工作.

4 结 论

1) 利用 ADAMS 对动鄂运动轨迹,进料口、排料口行程特征值的仿真分析可知,该型破碎机排料通畅、结构合理,为进一步进行多目标优化设计提供了参考依据.

2) 利用 ANSYS Workbench 软件对动鄂体进行有限元分析,由动鄂应力云图可知在肋板与动鄂上部圆柱体连接处以及肘板底座产生应力集中,应该增加肘板底座和肋板的厚度,增加肋板与圆柱体的倒圆半径.

3) 由动鄂变形云图可知动鄂最大变形量与动鄂整体尺寸相比可以忽略不计,对破碎机正常工作无影响.运动学仿真与有限元分析结果为

PEX150×750 细碎鄂式破碎机的优化与结构改进奠定了基础.

参考文献:

- [1] 占鹏飞,蔡改贫,姜志宏.基于 ADAMS 的倒悬挂细碎鄂式破碎机的运动仿真分析[J].矿山机械,2012,40(11):45-48.
- [2] 徐敏,杨瑞鹏,浦宏毅.基于 ADAMS 的复摆鄂式破碎机运动特性的仿真[J].矿山机械,2013,41(4):78-81.
- [3] LICHTER J, LIM K, POTAPOV A, et al. New developments in cone crusher performave optimization[J]. Minerals engineering, 2009, 22(7): 613-617.
- [4] 罗红萍,母福生.双腔鄂式破碎机运动学特征研究[J].矿山机械,2007,35(1):39-42.
- [5] 王玉.基于虚拟样机技术的鄂式破碎机工作装置的运动分析[J].矿山机械,2010,38(11):77-80.
- [6] 于江龙,杨旭东,王梓丞,等.基于 ADAMS 的鄂式破碎机仿真分析[J].煤炭技术,2017,36(1):284-287.
- [7] 李刚,余宗胜,吴青青,等.复摆鄂式破碎机的动力学分析及优化[J].矿山机械,2016,44(7):41-44.
- [8] 吕廷,石秀东,张秋菊,等.基于 ANSYS 的破碎机机架模态分析[J].机械设计与制造,2008(11):99-101.
- [9] GANG D, ZHANG. Crushing force and kinematics analysis of cone crusher based on interparticle breakage[J]. Journal of mechanical engineering, 2010, 46(17): 159-164.
(责任编辑:龙威)
- [2] DAI H H. Mode equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod[J]. Acta mechanica, 1998, 127(1/2/3/4): 193-207.
- [3] HUANG Y. New no-traveling wave solutions for the Liouville equation by Backlund transformation method[J]. Nonlinear dynamics, 2013, 72(1/2): 87-90.
- [4] RUI W G. The integral bifurcation method combined with factoring technique for investigating exact solutions and their dynamical properties of a generalized Gardner equation[J]. Nonlinear dynamics, 2014, 76(2): 1529-1542.
- [5] XIE S L, ZHANG Y Z, HE J H. Two types of bounded traveling-wave solutions of a two-component Camassa-Holm equation[J]. Applied mathematics and computation, 2013, 219(20): 10271-10282.
- [6] WEN Z S, LIU Z R. Bifurcation of peakons and periodic cusp waves for the generalization of the Camassa-Holm equation[J]. Nonlinear analysis real world applications, 2011, 12(3): 1698-1707.
- [7] PAN C H, LING L M, LIU Z R. A new integrable equation with cuspons and periodic cuspons[J]. Physica scripta, 2014, 89(10): 105-207.
- [8] WEN Z S. Bifurcation of solitons, peakons, and periodic cusp waves for θ -equation [J]. Nonlinear dynamics, 2014, 77(1/2): 247-253.
- [9] LI S Y, LIU R. Some explicit expressions and interesting bifurcation phenomena for nonlinear waves in generalized Zakharov equations [J]. Abstract and applied analysis, 2013(107): 173-186.
- [10] PAN C H, YI Y T. Some extensions on the soliton solutions for the Novikov equation with cubic nonlinearity[J]. Journal of nonlinear mathematical physics, 2015, 22(2): 308-320.
- [11] PAN C H, LIU Z R. Infinitely many solitary waves of an integrable equation with singularity [J]. Nonlinear dynamics, 2016, 83: 1469-1475.
(责任编辑:扶文静)

(上接第 65 页)