# 第三章 多维随机变量及其分布





## §3.1 多维随机变量及其联合分布

一、多维随机变量
二、联合分布函数
三、联合分布列
四、联合密度函数
五、常用多维分布



### 一、多维随机变量

- 引例:

1.炮弹落点的位置必须用两个坐标X和Y来描述;

2. 在研究儿童的发育情况，考虑身高$X$、体重Y两个随机变量 .

3.考察炼出钢的质量，要考虑硬度X，含硫量Y，含碳量Z等随机变量.

**特点:** 试验结果需要用两个或两个以上的随机变量才能描述 .



### 一、多维随机变量

定义 若 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ 是定义在同一个样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上的n个随机变量，则称

$$X(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

为n维(或者n元)随机变量或随机向量.

对于多维的随机变量, 我们主要讨论二维随机变量, 二维随机变量常记为 $(X,Y)$

在几何上，二维随机变量$(X, Y)$可看作平面上的随机点.



### 二、联合分布函数

定义：$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$, $n$个事件$\{X_1\le x_1\}$, $\{X_2\le x_2\}\cdots,\{X_n\le x_n\}$同时发生的概率

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P(X_1\le x_1, X_2\le x_2, \cdots, X_n\le x_n)$$

称为$n$维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数.

设$(X, Y)$是二维随机向量,对于任意实数$x,y$,二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P(X\le x, Y\le y)$$

称为二维随机向量(X, Y)的分布函数, 或称为随机变量X和Y的联合分布函数.

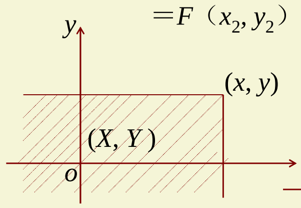


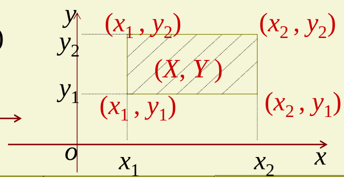
**定义** 对任对实数 $x$ 和 $y$, 称 $F(x, y)=P(X\le x, Y\le y)$ 为$(X, Y)$ 的联合分布函数.

**几何意义** $F(x, y)$为$(X, Y)$落在点$(x, y)$的左下区域的概率.

**计算概率：** 对于任意的$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$$
$$=F(x_2, y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$






**联合分布函数的基本性质**

(1) **(单调性)** $F(x, y)$ 关于 $x$ 和 $y$ 分别单调不减.

当$x_1<x_2$时, 有$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$;

当$y_1<y_2$时, 有$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$.

(2) **(有界性)** $0\le F(x, y)\le 1$，且

$F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=0$， $F(+\infty, +\infty)=1$.

(3) **(右连续性)** $F(x, y)$ 关于 $x$ 和 $y$ 分别右连续.

$$F(x+0, y)=F(x,y) \quad F(x, y+0)=F(x,y)$$

(4) **(非负性)**当$x_1<x_2, y_1<y_2$时，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$



### 三、联合分布列

1.定义 若$(X, Y)$ 的可能取值为有限对、或可列对，则称$(X, Y)$为二维离散随机变量. 称

$$p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j), \quad i, j=1, 2, ...,$$

为$(X,Y)$ 的联合分布列，其表格形式如下:

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_j$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | … | $p_{1j}$ | … |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | … | $p_{2j}$ | … |
| … | … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | … | $p_{ij}$ | … |
| … | … | … | … | … | … |

## 2. 联合分布列的基本性质

(1) **(非负性)** $p_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$

(2) (正则性) $\Sigma\Sigma\, p_{ij} = 1.$

## 3. 确定联合分布列的方法

(1) 确定随机变量 $(X, Y)$ 的所有取值数对.

(2) 计算取每个数值对的概率.

(3) 写出概率分布列或列出概率分布表.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例1 将两封信随意地投入3个空邮筒，设$X$、$Y$分别表示第1、第2个邮筒中信的数量，求$X$与$Y$的联合概率分布，并求出第3个邮筒里至少投入一封信的概率.

解 $X$、$Y$各自可能的取值均为0、1、2，由题设知，取（1，2）、（2，1）、（2，2）均不可能. 取其他值的概率可由古典概率计算.

$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$，$P(X=0,\ Y=1)=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$，

$P(X=0,\ Y=2)=\frac{1}{9}$　　$P(X=1,\ Y=0)=\frac{2}{9}$，

$P(X=1,\ Y=1)=\frac{2}{9}$，　　$P(X=2,\ Y=0)=\frac{1}{9}$，

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

(X,Y)的联合概率分布表为

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/9 | 2/9 | 1/9 |
| 1 | 2/9 | 2/9 | 0 |
| 2 | 1/9 | 0 | 0 |

P(第三个邮筒里至少有一封信)

=P(第一、第二个邮筒里最多只有一封信)

$=P(X+Y\le 1)$

而 $P(X+Y\le 1)$

=P(X=0,Y=0)+ P(X=0,Y=1)+ P(X=1，Y=0)=5/9

即第三个邮筒里至少有一封信的概率为5/9

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例 2** 设随机变量 $X$ 在 1,2,3,4四个数中等可能地取值，另一个随机变量 $Y$ 在1~$X$ 中等可能地取一整数值。试求 $(X,Y)$ 的分布律及P(X=Y).

解 由题意知，($X$=$i$，$Y$=j)的取值情况是：$i$=1,2,3,4，且是等可能的；然后 j 取不大于 $i$ 的正整数。由乘法公式求得 $(X,Y)$ 的分布律。

$P(X=i,Y=j)$

$=P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)=\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{i}$，其中$i=1,2,3,4,\quad j\le i.$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

(X,Y)的联合概率分布表为

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$$P(X=Y)$$
$$=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=4)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}=0.5208.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 四、联合密度函数

1. 定义设二维随机变量$(X, Y)$ 的分布函数为 $F(x, y)$，若存在非负可积函数 $p(x, y)$，使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu$$

则称 $(X, Y)$ 为二维连续型随机变量.

称$p(x, y)$ 为联合密度函数。

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 2.性质

$1^0$ $p(x,y)\ge 0$;

$2^0$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=F(+\infty,+\infty)=1$;

$3^0$ 若$p(x,y)$在点$(x,y)$连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y).$$

$4^0$ 设 $G$ 是平面上的一个区域，点 $(X,Y)$落在 $G$ 内 的概率为： $P((X,Y)\in G)=\iint_G p(x,y)dxdy.$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例3 已知二维连续型随机向量（$X$，$Y$）的联合概率密度，

$$p(x,y)=\begin{cases} ke^{-(x+y)}, & 当x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 (1)$k$ ; (2)$F(x,y)$; (3)P(0<X<1,0<Y<1);(4) P(X+Y ≤1)

解 （1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$

所以 $1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-(x+y)}dxdy$

$$=k\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=k(-e^{-x}|_0^{+\infty})^2=k$$

当x>0,y>0 时 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$

$$=\int_0^x\int_0^y e^{-(u+v)}dudv=\int_0^x e^{-u}du\int_0^y e^{-v}dv=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & ,x>0,y>0\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

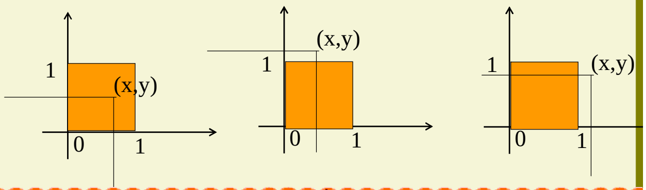
（3）记$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，则

$$P(0<X<1,0<Y<1)$$

$$=\iint_D p(x,y)dxdy=\iint_D e^{-x-y}dxdy$$

$$=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 e^{-y}dy=(1-e^{-1})^2\approx 0.3996$$






$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

(1) 当$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$时

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4uvdudv=\int_0^x 2udu\int_0^y 2vdv=x^2y^2$$

(2) 当$0\leqslant x\leqslant 1$，$y>1$时

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 4uvdudv=x^2$$

(3) 当$x>1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 时

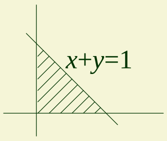
$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y 4uvdudv=y^2$$



（4）记D={（X，Y）| X+Y ≤ 1}，则有

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$

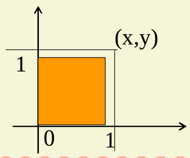



$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-(x+y)}dy$$

$$=\int_0^1 e^{-x}(1-e^{x-1})dx$$

$$=1-\frac{2}{e}\approx 0.2642$$






(4) 当$x>1$, $y>1$ 时

$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^1 4uvdudv=1$$

(5) 其它时

$$F(x,y)=0$$

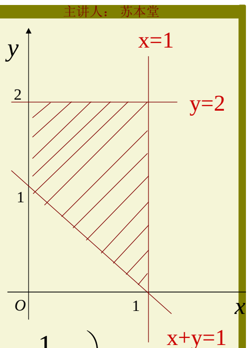
即：

$$F(x,y)=\begin{cases}x^2y^2 & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ x^2 & 0\le x\le 1,y>1\\ y^2 & 0\le y\le 1,x>1\\ 1 & x>1,y>1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



**例 4** 设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$




求 $P(X+Y\ge 1)$

解 $P(X+Y\ge 1)$

$$=\iint_{x+y\ge 1}p(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{65}{72}$$



## 五、常见多维分布

### 1. 多项分布

若每次试验有$r$ 种结果：$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$

记 $P(A_i)=p_i$，　$i=1, 2, \ldots\ldots, r$

记 $X_i$ 为 $n$ 次独立重复试验中 $A_i$ 出现的次数.

则 $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为：

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots\ldots, X_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots\cdots p_r^{n_r}$$

其中 $0\le n_i\le n$，且 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$.

这个联合分布列称为r项分布,记做 $M(n,p_1,\cdots,p_r)$.



练习　设二维随机变量（X，Y）的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}4xy & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）$P\left(0<X<\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<Y<1\right)$；（2）$P(X=Y)$；

（3）$P(X\le Y)$。　(4) F(x,y)

解：（1）$P\left(0<X<\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<Y<1\right)$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{4}}^{1}4xydxdy=4\int_0^{\frac{1}{2}}xdx\int_{\frac{1}{4}}^{1}ydy=\frac{15}{64}$$

（2）$P(X=Y)=\iint_{x=y}4xydxdy=0$

(3)$P(X\le Y)=\iint_{x<y}4xydxdy=\int_0^1\int_x^1 4xydydx$

$$=\int_0^1 2(x-x^3)dx=\frac{1}{2}$$



### 2.多维超几何分布

口袋中有 $N$ 只球，分成 $r$ 类 。

第 $i$ 种球有 $N_i$ 只，　$N_1+N_2+\ldots\ldots+N_r=N$.

从中任取 $n$ 只，

记 $X_i$ 为取出的$n$ 只球中，第$i$ 种球的只数.

则 $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_r)$的联合分布列为：

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots\ldots, X_r=n_r)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\cdots\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

其中$n=n_1+\cdots+n_r$.

### 3. 二维均匀分布

若二维连续随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度为：

$$p(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 其中$S_D$为D的面积.

则称 $(X, Y)$ 服从 $D$ 上的均匀分布，

记为 $(X, Y) \sim U(D)$ .



## § 3.2边际分布与随机变量的独立性

一、边际分布函数
二、边际分布列
三、边际密度函数
四、随机变量间的独立性



### 4. 二维正态分布

若二维连续随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度为：

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

则称 $(X, Y)$ 服从二维正态分布，

记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ .



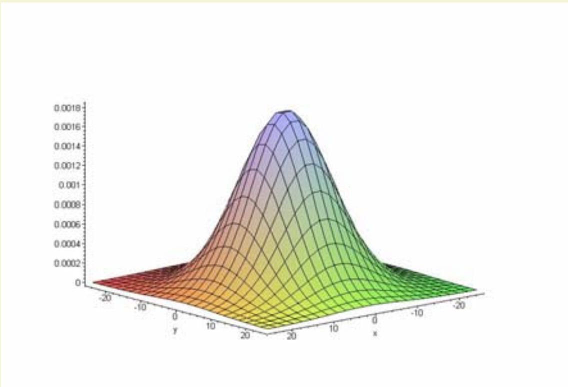
### 边际(缘)分布

设(X,Y)是二维随机变量, (X,Y)作为一个整体，有其分布,我们称为X和Y的联合分布，而X和Y都是一维随机变量，它们也有自身的概率分布，分别称为关于X和Y的边际(缘)分布.

更一般地, 设$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$是n维随机变量, 关于$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$中部分分量的分布称为边际分布.

在本节,我们主要讨论如何由联合分布来确定边际(缘)分布.



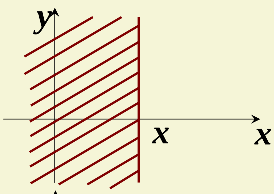




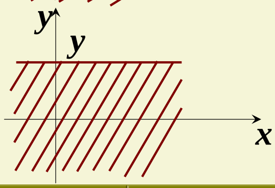
### 一、边际分布函数

设$(X, Y)$的联合分布函数$F(x, y)$则 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布函数 $F_X(x)$ ，$F_Y(y)$ 则

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y<+\infty)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$




$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty, Y\le y)=F(+\infty, y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$






**作业：p-150习题3.1**

**2, 5, 6, 10, 11,14**



在三维随机变量$(X, Y, Z)$的联合分布函数$F(x, y, z)$, 用类似的方法可得到更多的边际分布函数.

$$F_X(x)=F(x,+\infty,+\infty)$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y,+\infty)$$
$$F_Z(z)=F(+\infty,+\infty,z)$$
$$F_{X,Y}(x,y)=F(x,y,+\infty)$$
$$F_{X,Z}(x,z)=F(x,+\infty,z)$$
$$F_{Y,Z}(y,z)=F(+\infty,y,z)$$

例1 已知随机向量$(X, Y)$的联合分布函数为

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y)$$

求 (1)常数$a$，$b$，$c$；(2) 联合密度函数$p(x,y)$；(3)$X,Y$的边缘分布函数. (4) $P(X>2)$

解：由$F(-\infty,0)=0$, $F(0,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$ 得：

$$\begin{cases} a(b-\frac{\pi}{2})c=0 \\ ab(c-\frac{\pi}{2})=0 \\ a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$$

解得

$$a=\frac{1}{\pi^2},b=\frac{\pi}{2},c=\frac{\pi}{2}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

(2) $p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

$$=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$



例2 已知随机向量（$X$，$Y$）的联合分布如下表，求关于$X$ 和$Y$ 的边际分布。

| $X$ \ $Y$ | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0 |
| 1 | 0.3 | 0.05 | 0.1 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.1 |

你只要把每列的概率相加放在该列的最下面，就得到X的边际分布. 把每行的概率相加放在该行的最右面，就得到Y的概率分布.

把第一行和最后一行出来就是$X$的分布；把第列和最后一列拿出来就$Y$的分布。

| $X$ \ $Y$ | -1 | 0 | 2 | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0 | 0.3 |
| 1 | 0.3 | 0.05 | 0.1 | 0.45 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.1 | 0.25 |
| $p_{.j}$ | 0.55 | 0.25 | 0.2 | |



例1 已知随机向量$(X, Y)$的联合分布函数为

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y)$$

求 (1)常数$a$，$b$，$c$；(2) 联合密度函数$p(x,y)$；(3)$X,Y$的边缘分布函数. (4) $P(X>2)$

解得 $a=\frac{1}{\pi^2},b=\frac{\pi}{2},c=\frac{\pi}{2}$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

(2) $p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

$$=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

(3) $F_X(x)=P(X\le x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y$$

(4) $P(X>2)=1-F_X(2)$

$$=1-\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan 2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan 2$$



例3 $(X,Y)\sim M(n,p_1,p_2,p_3)$(三项分布),求$X$和$Y$边际分布.

解 $X$和$Y$联合分布为

$$P(X=i,\ Y=j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^i p_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

$$i,j=0,1,2,\cdots,n,\quad i+j\le n$$

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{n-i}P(X=i,\ Y=j)=\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^i p_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

$$=\frac{n!}{i!(n-i)!}p_1^i(1-p_1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(\frac{p_2}{1-p_1})^j(1-\frac{p_2}{1-p_1})^{n-i-j}$$

$$=\frac{n!}{i!(n-i)!}p_1^i(1-p_1)^{n-i}(\frac{p_2}{1-p_1}+1-\frac{p_2}{1-p_1})^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}p_1^i(1-p_1)^{n-i}$$

$$i=0,1,2,\cdots,n.$$



## 二、边际分布列

| $X$ \ $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_j$ | … | $P\{X=x_i\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | … | $p_{1j}$ | … | $p_{1.}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | … | $p_{2j}$ | … | $p_{2.}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | … | $p_{ij}$ | … | $p_{i.}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | … | ⋮ |
| $P\{Y=y_j\}$ | $p_{.1}$ | $p_{.2}$ | … | $p_{.j}$ | … | 1 |

$$p_{i.}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\qquad p_{.j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

**( i = 1,2, …)**　　**( j = 1,2, …)**

例如 $p_{1.}=P(X=x_1)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{1j}$, $p_{.2}=P(Y=y_2)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{i2}$



例3 $(X,Y)\sim M(n,p_1,p_2,p_3)$(三项分布),求$X$和$Y$边际分布.

解 $X$和$Y$联合分布为

$$P(X=i,\ Y=j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^i p_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

$$i,j=0,1,2,\cdots,n,\quad i+j\le n$$

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{n-i}P(X=i,\ Y=j)=\frac{n!}{i!(n-i)!}p_1^i(1-p_1)^{n-i}\qquad i=0,1,2,\cdots,n.$$

即 $X\sim B(n,p_1)$.

类似可得 $Y\sim B(n,p_2)$

◆多项分布的边际分布仍为多项分布



## 二、边际分布列

设 $(X, Y)$ 的联合分布列为 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, 则 $(X, Y)$ 的边缘分布列为

$$\boxed{p_{i.}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_i}\qquad \boxed{p_{.j}=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i}$$

( $i$ =1,2, …)　　( $j$ = 1,2, …)

即

| $X$ | $x_1$ $x_2$ … $x_i$ … |
|---|---|
| $p_{i.}$ | $P_{1.}$ $p_{2.}$ … $p_{i.}$ … |

| $Y$ | $y_1$ $y_2$ … $y_j$ … |
|---|---|
| $p_{.j}$ | $p_{.1}$ $p_{.2}$ … $p_{.j}$ … |



## 三、边际密度函数

设连续型随机变量$(X,Y)$的联合概率密度函数为$p(x,y)$,其关于$X$和$Y$的边际密度函数,分别记为$p_X(x)$,$p_Y(y)$.

由于

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy]dx$$

所以

$$\boxed{p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy}$$

类似可得

$$\boxed{p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx}$$

例3 设(X,Y)的概率密度是

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, |y|\le x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 (1)两个边际密度；（2）P(X<1/2)及P(Y>1/2)

解 首先注意$p(x,y)$的非零区域,见下图.

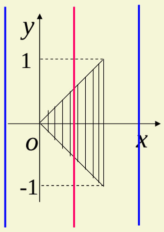
(1) X的边缘密度函数

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,\ y)\mathrm{d}y$$

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 1$时， $p_X(x)=0$

当0<x<1时， $p_X(x)=\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}y=2x$

故 $p_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$






例3 设(X,Y)的概率密度是

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0< x< 1, |y|< x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 (1)两个边际密度；（2）P(X<1/2)及P(Y>1/2)

Y的边缘密度函数

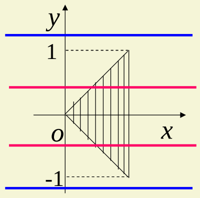
$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,\ y)\mathrm{d}x$$

当$y\leqslant$-1或$y\geqslant$1时， $p_Y(y)=0$

当0≤y<1时， $p_Y(y)=\int_{y}^{1}1\mathrm{d}y=1-y.$

当-1<y<0时， $p_Y(y)=\int_{-y}^{1}1\mathrm{d}y=1+y.$

故 $p_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0;\\ 1-y, & 0\le y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$






例3 设(X,Y)的概率密度是

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0< x< 1, |y|< x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 (1)两个边际密度；（2）P(X<1/2)及P(Y>1/2)

$$p_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0;\\ 1-y, & 0\le y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $\mathrm{P(X<1/2)}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}p_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$

$\mathrm{P(Y>1/2)}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}p_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$



例4 设 (X, Y)服从区域 $D=\{(x, y), x^2+y^2<1\}$ 上的均匀分布，求X 的边际密度$p(x)$.

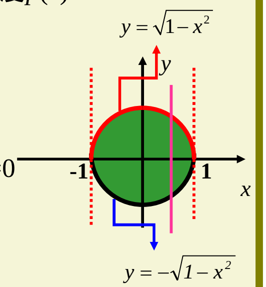
解 由题意得

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其\ 它\end{cases}$$

当|x|>1时，$p(x, y)=0$，所以 $p_X(x)=0$

当|x|≤1时，

$$p_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$




不是均匀分布



例5 设(X，Y)服从$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求边缘密度.

解 令 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,则有

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\}dv$$

令$t=\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-p^2}}$， $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$

类似地有 $p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

**可见 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.**



既若(X，Y)~$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.且两个边际分布与第5个参数无关, 由此得

- ◆正态分布的边际分布仍为正态分布
- ◆边际分布不能确定联合分布
- ◆联合分布比边际分布包含更多的信息



练习 设二维随机变量的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0, 其它\end{cases}$$

求（1）求边缘概率密度; (2) $P(X+Y<1)$.

(1)解 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

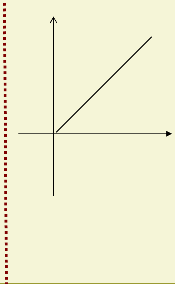
当$x$>0时 $p_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$;

当$x\leqslant$0时 $p_X(x)=0.$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$

$p_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=y\cdot e^{-y}, y>0;$

$p_Y(y)=0,\ y\le 0$





练习 设二维随机变量的概率密度为

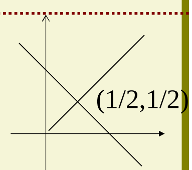
$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0, 其它\end{cases}$$

求（1）求边缘概率密度; (2) $P(X+Y<1)$.

(2) $P(X+Y<1)=\iint\limits_{x+y<1}p(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$$

$$=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$$



## 四、随机变量的独立性

**定义** 设两个随机变量$X, Y$，若对任意的实数 $x, y$ 有

$$F(x,\ y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

即 $$P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y) = P(X\leqslant x)\ P\{Y\leqslant y)$$

则称随机变量X与Y是相互独立的。

**1. $(X, Y)$是离散型**

若$(X,Y)$的所有可能取值为$(x_i, y_j)$ $(i, j=1, 2, \ldots)$，则$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是对一切 $i, j=1, 2,\ldots$，有

$$P(X = x_i,\ Y= y_j)= P(X= x_i)\cdot P(Y= y_i)$$



**2. $(X, Y)$是连续型**

若$(X,\ Y)$的 $p(x,y)$处处连续，则$X$和$Y$相互独立的充分必要条件是

$$p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$$

**证明** 充分性：若 $p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$，

则 $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p_X(u)p_Y(v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}p_X(u)du\int_{-\infty}^{y}p_Y(v)dv=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

必要性：若$X$、$Y$互相独立，则$F(x,y)= F_X(x)\cdot F_Y(y)$，

即 $$\int_{\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{x}p_X(u)du\int_{-\infty}^{y}p_Y(v)dv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p_X(u)p_Y(v)dudv$$

故 $p(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$



**注** (1) $X$ 与$Y$是独立的其本质是：

任对实数$a, b, c, d$，有

$$P(a<X<b,\ \ c<Y<d)=P(a<X<b)P(c<Y<d)$$

(2) 在$X$ 与$Y$独立的前提下，边际分布可以确定联合分布；

(3) $X$ 与$Y$ 是独立的，则$g(X)$与$h(Y)$也是独立的.

(4) 类似可定义n个随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n$的独立性.



**例6** 如果二维随机变量的概率分布用下列表格给出

| (X,Y) | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{3}$ | $\alpha$ | $\beta$ |

那么当$\alpha$, $\beta$取什么值时，$X$与$Y$才能相互独立？

**解** 先写出联合分布的表格形式，并计算边缘分布.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 1/9 | 1/18 | 1/3 |
| 2 | 1/3 | $\alpha$ | $\beta$ | 1/3+$\alpha$+$\beta$ |
| $p_{.j}$ | 1/2 | 1/9+$\alpha$ | 1/18+$\beta$ | |



若与相互独立，则对于所有的$i, j$，都有

$$p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$$

因此

$$P(X=1,\ Y=2)\ =P(X=1)P(Y=2)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\ =\frac{1}{9}$$

$$P(X=1,\ Y=3)\ =P(X=1)P(Y=3)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{18}+\beta\right)\ =\frac{1}{18}$$

联立以上两式求得 $\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$



**例7.** 已知随机变量X和Y的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\qquad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad \text{且}\quad P(XY=0)=1$$

(1)求X与Y的联合分布；(2）X和Y是否独立，为什么？

解（1）由P(XY=0)=1，得

P(XY≠0)=0

0=P(X=-1,Y=1)+ P(X=1,Y=1)

得：

P(X=-1,Y=1)=0,P(X=1,Y=1)=0

所以

| X \ Y | 0 | 1 | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|
| -1 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| 0 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| $p_{.j}$ | 1/2 | 1/2 | |

2) 由于 0=P(X=1,Y=1)≠ P(X=1)P(Y=1)=(1/2)(1/4)

所以 X 和 Y 不独立



**例8.** 设随机变量X与Y相互独立，下表列出了二维随机变量$(X,Y)$的联合分布及关于$X$和$Y$的边缘分布中的部分数据，请补充下表：

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_i\}=p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\boxed{1/24}$ | 1/8 | $\boxed{1/12}$ | $\boxed{1/4}$ |
| $x_2$ | 1/8 | $\boxed{3/8}$ | $\boxed{1/4}$ | $\boxed{3/4}$ |
| $P\{Y=y_j\}$ | 1/6 | $\boxed{1/2}$ | $\boxed{1/3}$ | 1 |



**例9** 设$(X,Y)$的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}xe^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问$X$和$Y$是否独立？

**解** $$p_X(x)=\int_0^{\infty}xe^{-(x+y)}dy\ =\boldsymbol{xe^{-x}},\quad x>0$$

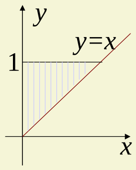
$$p_Y(y)=\int_0^{\infty}xe^{-(x+y)}dx\ =\boldsymbol{e^{-y}},\quad y>0$$

即：$$p_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ 故$X,Y$ 独立

若$(X,Y)$的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$




情况又怎样？

解 $p_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\quad 0<x<1$

$p_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\quad 0<y<1$

由于存在面积不为0的区域，

$$p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$$

故$X$和$Y$不独立 .



注 (1) $(X, Y)$ 服从矩形上的均匀分布，则$X$与$Y$独立.

(2) 联合密度 $p(x, y)$ 的表达式中，若 $x$ 的取值与 $y$ 的取值有关系，则 $X$与$Y$ 不独立.

(3) 若联合密度 $p(x, y)$ 可分离变量，即

$$p(x, y) = g(x)h(y)$$

则 $X$与$Y$ 独立。(习题3.2 16题)

(4) 若 $(X, Y)$ 服从二元正态 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

则 $X$与$Y$ 独立的充要条件是 $\rho = 0$.



例10 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均在[0,1]上均匀分布，求方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率.

解 由于 X 和 Y 均在[0，1]上均匀分布，所以

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

要使方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根，须 $X^2\ge 4Y$

$P\{\text{有实根}\}=P(X^2\ge 4Y)$

$$=P(Y\le \frac{1}{4}X^2)$$

$$=\iint_{y\le\frac{1}{4}x^2} p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2} 1dy=\frac{1}{12}$$



## $n$个随机变量的独立性

定义 设 $F(x_1, x_2,\ldots, x_n)$及$F_i(x_i)$分别为$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$和$X_i$的分布函数,对于任意$n$个实数$x_1, x_2,\ldots, x_n$,有

$$F(x_1, x_2,\ldots, x_n) =F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)$$

则称$X_1, X_2,\ldots, X_n$是相互独立的.

若$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$是$n$维离散随机变量, 则$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立的充要条件

$$P(X_1=x_1,\ldots, X_n=x_n)= P(X_1=x_1) \ldots P(X_n=x_n)$$

对任意$x_1, x_2,\ldots, x_n$成立.

若$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$是$n$维连续型随机变量, 则$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立的充要条件是

$$p(x_1, x_2,\ldots, x_n)= p_1(x_1)\, p_2(x_2)\ldots p_n(x_n)$$

几乎处处成立.



例11 设$(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 求证X和Y相互独立的充要条件为参数 $\rho=0$.

证明 因为X,Y的联合分布概率密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

又因为关于$X,Y$的边缘概率密度函数分别为

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\qquad -\infty<x<\infty$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\qquad -\infty<y<\infty$$



## 重要结论

(1 ) 设$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立,则其中任意$k(2\le k\le n)$个随机变量$X_{i1}, X_{i1},\ldots, X_{ik}$也是相互独立的.

(2) 若$X_1, \ldots,X_n$相互独立,而 $Y_1=f_1(X_1),\ldots, Y_n=f_n(X_n)$ 则$Y_1,\ldots,Y_n$相互独立.

(3) 若$X_1, \ldots,X_n$相互独立,而

$Y_1=g_1(X_1, \ldots,X_m)$, $Y_2=g_2(X_{m+1}, \ldots,X_n)$

则$Y_1$与$Y_2$独立 .



所以

$$p_X(x)p_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因此

(1)若 $\rho=0$ ,则对于所有的$x,y$,有

$$p(x,y)= p_X(x)p_Y(y)$$

即X和Y相互独立.

(2)如果$X$和$Y$相互独立, 则对于所有的$x,y$有

$$p(x,y)= p_X(x)p_Y(y)$$

从而 $\rho=0$.



**作业：p-159 习题3.2**

**1, 2, 4, 5(1)(2), 7(第一次)**

**8, 10, 11, 13, 16(第二次)**

# §3.3多维随机变量函数的分布

一、多维离散随机变量函数的分布

二、最大值与最小值分布

三、连续型随机向量函数的分布

问题：已知二维随机变量 $(X, Y)$ 的分布，

如何求出 $Z=g(X, Y)$的分布？



## 一、多维离散随机变量函数的分布

(1) 设$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ 是$n$维离散随机变量，
则 $Z = g(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 是一维离散随机变量.

(2) 多维离散随机变量函数的分布是容易求的：

i) 对$(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$的各种可能取值对，写出 $Z$ 相应的取值.

ii) 对$Z$ 相同的取值，合并其对应的概率.



例1 已知(X,Y )的联合分布律

| X \ Y | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| -1 | 1/10 | 2/10 | 0 |
| 2 | 3/10 | 0 | 4/10 |

求（1） Z = X+Y的概率分布

（2）Z = X² - Y的概率分布

解 (1) Z = X +Y 的所有可能取值为：-1，0，2，3，5，且

P(Z= -1)=P(X+Y= -1)=P(X= -1,Y=0)=1/10

P(Z= 0)=P(X+Y=0)=P(X= -1,Y=1)=2/10

P(Z= 2)=P(X+Y=2)=P(X= -1,Y=3)+P(X=2,Y=0)= 3/10

P(Z= 3)=P(X+Y=3)=P(X= 2,Y=1)=0

P(Z= 5)=P(X+Y=5)=P(X= 2,Y=3)=4/10

| Z | -1 | 0 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 1/10 | 2/10 | 3/10 | 0 | 4/10 |



## 离散型卷积公式

若$X$、$Y$独立，$P(X=k)=a_k$，$k=0,1,2,\ldots$，$P(Y=k)=b_k$，$k=0,1,2,\ldots$，求$Z=X+Y$的概率分布.

$$\boldsymbol{P(Z=r)=P(X+Y=r)}$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\boldsymbol{P(X=i,Y=r-i)}$$

由独立性

$$=\sum_{i=0}^{r}\boldsymbol{P(X=i)P(Y=r-i)}$$

此即离散卷积公式

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$



例2 设 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，且X和Y相互独立.

证明 $Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ (即泊松分布具有可加性).

证明 
$$P(Z=k)=P(X+Y=k)\overset{独立}{=}\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\right)$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

即 $Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.



例3 设 $X \sim B(n_1, p)$，$Y \sim B(n_2, p)$，且X和Y相互独立，

则 $Z = X+ Y \sim B(n_1+n_2, p)$. (即二项分布具有**可加性**).

注：若 $X_i \sim B(1, p)$，且独立，则

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n \sim B(n, p).$$

**直观解释：**若$X\sim B(n_1,p)$,则$X$是在$n_1$次独立重复试验中事件$A$出现的次数,每次试验中$A$出现的概率都为$p$.

同样，$Y$是在$n_2$次独立重复试验中事件$A$出现的次数,每次试验中$A$出现的概率为$p$.

故$Z=X+Y$是在$n_1+n_2$次独立重复试验中事件$A$出现的次数，每次试验中$A$出现的概率为$p$，于是$Z$是以$n_1+n_2$，$p$为参数的二项随机变量，即$\boldsymbol{Z \sim B(n_1+n_2, p)}$.



例3 设 $X \sim B(n_1, p)$，$Y \sim B(n_2, p)$，

则 $Z = X+ Y \sim B(n_1+n_2, p)$. (即二项分布具有**可加性**).

注：若 $X_i \sim B(1, p)$，且独立，则

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n \sim B(n, p).$$

证明 
$$P(Z=k)=P(X+Y=k)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^i p^i q^{n_1-i}C_{n_2}^{k-i}p^{k-i}q^{n_2-k+i}$$

$$\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i}=C_{n_1+n_2}^k$$

$$=p^k q^{n_1+n_2-k}\sum_{i=0}^{k}C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i}=C_{n_1+n_2}^k p^k q^{n_1+n_2-k}$$

所以 $Z = X+ Y \sim B(n_1+n_2, p)$.



## 二、最大值与最小值的分布

例4 (最大值分布)设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Y = max(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Y的分布.

(1) 若$X_i\sim F_i(x)$ ,$i=1,2, \ldots n$.

(2) 若$X_i$ 同分布且$X_i\sim F(x)$ ,$i=1,2, \ldots n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p(x)$ ,$i=1,2, \ldots n$.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ,$i=1,2, \ldots n$.

解 (1) 
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\max(X_1,X_2,\cdots X_n)\le y)$$

$$=P(X_1\le y, X_2\le y,\cdots X_n\le y)$$

$$=P(X_1\le y)P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)$$

$$=F_1(y)F_2(y)\cdots F_n(y).$$

例4 (最大值分布) 设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Y=\max(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Y的分布.

(1) 若$X_i \sim F_i(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(2) 若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $i=1,2,\ldots n$.

解 (1) $F_Y(y)=F_1(y)F_2(y)\cdots F_n(y)$.

(2)若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F_X(x)$,则 $F_Y(y)=F_X^n(y)$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为 $p(x)$, $i=1,2,\ldots n$. 对上式求导数得

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=nF_X^{n-1}(y)p_X(y).$$



例4 (最大值分布) 设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Y=\max(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Y的分布.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $i=1,2,\ldots n$.

解 (1) $F_Y(y)=F_1(y)F_2(y)\cdots F_n(y)$.

(2)若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F(x)$,则 $F_Y(y)=F_X^n(y)$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p(x)$,则

$$p_Y(y)=nF_X^{n-1}(y)p_X(y).$$

(4) 将Exp(λ) 的分布函数和密度函数代入(2)(3)得

$$F_Y(y)=\begin{cases}[1-e^{-\lambda y}]^n, & y>0;\\ 0 & y\le 0.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}n[1-e^{-\lambda y}]^{n-1}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0 & y\le 0.\end{cases}$$



例5 (最小值分布)设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Z=\min(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Z的分布.

(1) 若$X_i \sim F_i(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(2) 若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $i=1,2,\ldots n$.

解 (1)
$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(\min(X_1,X_2,\cdots X_n)\le z)\\&=1-P(\min(X_1,X_2,\cdots X_n)>z)\\&=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots X_n>z)\\&=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\cdots P(X_n>z)\\&=1-(1-F_1(z))(1-F_2(z))\cdots(1-F_n(z)).\end{aligned}$$



例5 (最小值分布)设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Z=\min(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Z的分布.

(1) 若$X_i \sim F_i(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(2) 若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p_X(x)$, $i=1,2,\ldots n$.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $i=1,2,\ldots n$.

解 (1) $F_Z(z)=1-(1-F_1(z))(1-F_2(z))\cdots(1-F_n(z))$.

(2)若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F(x)$,则 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为 $p(x)$, $i=1,2,\ldots n$. 对上式求导数得

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=n[1-F_X(z)]^{n-1}p_X(z).$$



例5 (最小值分布)设 $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$独立，若记

$Z=\min(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$,在以下情况求Z的分布.

(4) 若$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $i=1,2,\ldots n$.

解 (1) $F_Z(z)=1-(1-F_1(z))(1-F_2(z))\cdots(1-F_n(z))$.

(2)若$X_i$ 同分布且$X_i \sim F(x)$,则 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^n$.

(3) 若$X_i$ 是连续型且同分布其密度函数为$p(x)$

$$p_Z(z)=n[1-F_X(z)]^{n-1}p_X(z).$$

(4) 将Exp(λ) 的分布函数和密度函数代入(2)(3)得

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-n\lambda y}, & z>0;\\ 0 & z\le 0.\end{cases}$$

$$p_Z(z)=\begin{cases}n\lambda e^{-n\lambda z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

即Z~Exp($n\lambda$)



## 三、连续型随机向量函数的分布

已知$(X,Y)$的 $p(x,y)$,求$Z=f(X,Y)$的概率密度$p_Z(z)$

### 1、分布函数法

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(f(X,Y)\le z)$$

$$=\iint\limits_{f(x,y)\le z}p(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}p(x,y)dxdy$$

其中$D=\{(x,y)|f(x,y)\le z\}$,且在$p(x,y)$的连续点处，一维连续型随机变量$Z=f(X,Y)$的概率密度为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)$$



例6. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从 N (0, 1)，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解：由于 $X$和 $Y$独立且都服从$N(0,1)$，所以$(X, Y)$的联合密度为：

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

设 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 分布函数为$F_Z(z)$.

若$z\le 0$ $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)=0.$

若$z>0$ $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}p(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$$

所以，$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0;\\ 0 & z\le 0\end{cases}$



例7.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x;\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求随机变量Z=2X-Y的密度函数.

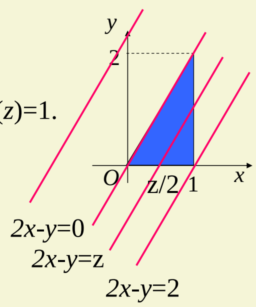
解 设Z=2X-Y分布函数为$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)$$

当$z\le 0$时, $F_Z(z)=0$. 当$z\ge 2$时, $F_Z(z)=1$.

当$0<z<2$时,

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P(2X-Y\le z)\\&=1-P(2X-Y>z)\\&=1-\int_{\frac{z}{2}}^1dx\int_0^{2x-z}1dy=z-\frac{z^2}{4}.\end{aligned}$$



例7.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x;\\ 0, & 其他\end{cases}$$ 求随机变量Z=2X-Y的密度函数.

解 设Z=2X-Y分布函数为$F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)$$

当z≤0时, $F_Z(z)$=0. 当z≥2时, $F_Z(z)$=1.

当0<z<2时,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)=1-P(2X-Y>z)=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_0^{2x-z}1dy=z-\frac{z^2}{4}.$$

所以得

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2;\\ 0, & 其他\end{cases}$$



例8设随机向量( X , Y )在矩形 G ={(x,y)| 0≤x≤2,0≤y≤1}上均匀分布，试求边长 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率分布.

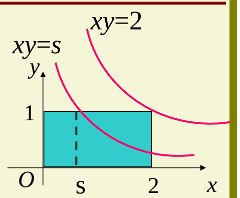
解 设面积 S 的分布函数为$F_S(s)$, 则

$F_S(s)$=P(S≤s)= P(XY≤s)

s≤ 0,则 $F_S(s)$=P(S≤s)=0

s≥2,则 $F_S(s)$ =P(S≤s)=1

若 0<s<2,则




$F_S(s)$=P(S≤s) = P(XY≤s) =1- P(XY>s)

$$=1-\int_s^2dx\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}dy=1-\int_s^2\frac{1}{2}(1-\frac{s}{x})dx=\frac{1}{2}s\ln 2+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}s\ln s$$

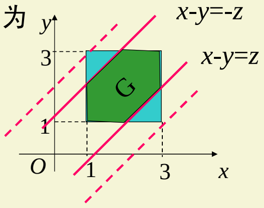
所以 $$p(s)=F'(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s) & 0<s<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$



例9. 设(X,Y)在正方形G={(x,y):1≤x≤3,1≤y≤3}上的均匀分布，试求 随机变量Z=|X-Y|的概率密度.

解：由条件知X和Y的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1<x<3, 1<y<3;\\ 0, & 其他\end{cases}$$




设Z的分布函数为$F_Z(z)$, 则

$F_Z(z)$=P(Z≤z)= P(|X-Y|≤z)

z≤ 0,则 $F_Z(z)$=P(Z≤z)= 0; z≥2,则 $F_Z(z)$=P(Z≤z)=1;

若 0<z<2,则 $F_Z(z)$= P(|X-Y|≤z) $=\iint_{|x-y|\le z}p(x,y)dxdy$

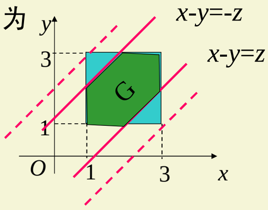
$$=\iint_G\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}S_G=\frac{1}{4}[4-(2-z)^2]=1-\frac{1}{4}(2-z)^2.$$



例9. 设(X,Y)在正方形G={(x,y):1≤x≤3,1≤y≤3}上的均匀分布，试求 随机变量Z=|X-Y|的概率密度.

解：由条件知X和Y的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1<x<3, 1<y<3;\\ 0, & 其他\end{cases}$$




设Z的分布函数为$F_Z(z)$, 则

$F_Z(z)$=P(Z≤z)= P(|X-Y|≤z)

z≤ 0,则 $F_Z(z)$=P(Z≤z)= 0; z≥2,则 $F_Z(z)$=P(Z≤z)=1;

若 0<z<2,则 $F_Z(z)$= P(|X-Y|≤z) $=1-\frac{1}{4}(2-z)^2$.

所以 $$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-z), & 0<z<2;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



例10 设随机变量X与Y独立，其中X的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$ 而Y的概率密度为$f(y)$,求随机变量$U=X+Y$的概率密度g($u$).

解：设F(y)是Y的分布函数，则由全概率公式，知U=X+Y的分布函数为

$$G(u)=P(X+Y\le u)=0.3P(X+Y\le u|X=1)+0.7P(X+Y\le u|X=2)$$

$$=0.3P(Y\le u-1|X=1)+0.7P\{Y\le u-2|X=2).$$

由于X和Y独立，可见

$$G(u)=0.3P(Y\le u-1)+0.7P(Y\le u-2)=0.3F(u-1)+0.7F(u-2).$$

由此得U的密度函数

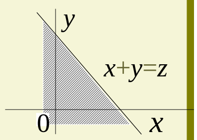
$$g(u)=G'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$$



## 2、卷积公式

已知（X,Y）的联合概率密度 $p(x,y)$，求$Z=X+Y$ 的密度函数.

根据分布函数定义有




$$F_z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_D p(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{x+y\le z}p(x,y)dxy=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy]dx$$

$$\overset{令u=y+x}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}p(x,u-x)du=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,u-x)dx\right]du$$

对z求导，得Z的概率密度$f_Z(z)$为 $$p_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$$

由对称性可得 $$p_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)dy$$



卷积公式：若X，Y相互独立，则 $p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$, 代入上式, 可得

$$\boxed{p_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx}\qquad\boxed{p_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy}$$

例11 设X和Y是两个互相独立的随机变量，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，求$Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于X、Y互相独立, 由卷积公式 $$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$p_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_x(x)p_y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\{-\frac{x^2}{2}-\frac{(z-x)^2}{2}\}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$



## 正态分布的可加性

（1）若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

且X、Y相互独立，则有

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

（2）如果$X_i$($i$=1,2,…,$n$)为 $n$ 个互相独立的随机变量，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$$

例12 设$X$、$Y$的相互独立，且都在[0,1]上服从均匀分布，求$Z=X+Y$的分布。

解 (方法一) (变量替换) $X$、$Y$的概率密度分别为

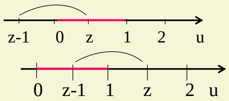
$$p_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_0^1 p_Y(z-x)dx$$

$$\underline{\underline{u=z-x}}\ -\int_z^{z-1}p_Y(u)du=\int_{z-1}^{z}p_Y(u)du$$

当$0\leqslant z\leqslant 1$时，$p_Z(z)=\int_0^z 1du=z$

当$1<z<2$时 $p_Z(z)=\int_{z-1}^{1}1\,du=2-z$




所以 $p_z(z)=\begin{cases}z, & \text{当}\ 0\le z\le 1\\ 2-z, & \text{当}\ 1<z\le 2\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$



例14 若 $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$，且独立，则 $Z=X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$. (伽玛分布的可加性)

解 设Z的密度函数为$p_Z(z)$，则当$z\leqslant 0$，$p_Z(z)=0$，当$z>0$，用卷积公式,使$p_X(x)\,p_Y(z-x)>0$的积分限,为$0<x<z$.

$$p_Z(z)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}e^{-\lambda x}(z-x)^{\alpha_2-1}e^{-\lambda(z-x)}dx$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x}{z}}}\ \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

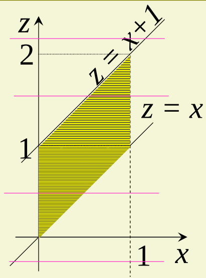
即$Z=X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.



## 解法二（图形定限法）

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$p_X(x)p_Y(z-x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, x<z<x+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$




$$p_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2,\\ \int_0^z 1dx, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^{1}1dx, & 1<z<2,\end{cases}$$

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2\\ z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}$$



由于 $\exp(\lambda)=Ga(1,\lambda)$，$\chi^2(n)=Ga(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.

(1) 若 $X_i\sim\exp(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,m$，且相互独立,则

$$\sum_{i=1}^{m}X_i\sim Ga(m,\lambda).$$

(2) 若 $X_i\sim\chi^2(n_i)$，$i=1,2,\cdots,m$，且相互独立,则

$$\sum_{i=1}^{m}X_i\sim\chi^2(n_1+n_2+\cdots+n_m)$$

例14 若 $X_i\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,n$. 且相互独立,则 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$.

解 当 $X_i\sim N(0,1)$,有$X_i^2\sim\chi^2(1)$.且$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 且独立

故 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$.



例13 设 $X$ 与 $Y$ 独立，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim Exp(1)$. 试求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解:方法一 $X\sim p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$ $Y\sim p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

用卷积公式：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_0^1 p_Y(z-x)dx$

$$\underline{\underline{u=z-x}}\ -\int_z^{z-1}p_Y(u)du=\int_{z-1}^{z}p_Y(u)du$$

当$z<0$时，$p_Z(z)=0$

当$0<z<1$时，$p_Z(z)=\int_0^z e^{-u}du=1-e^{-z}$

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1;\\ e^{-z}(e-1). & z\ge 1.\end{cases}$$

当$1\leqslant z$时 $p_Z(z)=\int_{z-1}^{z}e^{-u}\,du=e^{-z}(e-1).$



## 3、变量替换法

若 $\begin{cases}u=g_1(x,y)\\ v=g_2(x,y)\end{cases}$ 有连续偏导、存在反函数

$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 则 $(U,V)$ 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(x(u,v),y(u,v))\,|J|$$

其中$J$为变换的雅可比行列式：$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$



解: $X\sim p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$ $Y\sim p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

用卷积公式：$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$

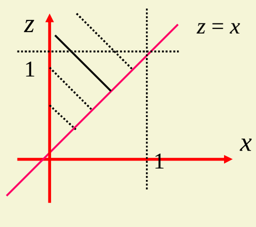
$$p_X(x)p_Y(z-x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ x<z\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此有

(1) $z<0$ 时 $p_Z(z)=0$；

(2) $0<z<1$ 时$p_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$.

(3) $z>1$ 时 $p_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}(e-1)$.






例15 设$X$和$Y$独立同分布，都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 记 $U=X+Y$，$U=X-Y$，试求（$U$，$V$）的联合密度函数，问$U$和$V$是否独立.

解 因为$u=x+y$, $v=x-y$，则反函数为

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-1/2\neq 0$$

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(x(u,v),y(u,v))\,|J|$$

$$=p_{XY}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(x(u,v),y(u,v))|J| = p_X(\frac{u+v}{2})p_Y(\frac{u-v}{2})\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{u+v}{2}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{u-v}{2}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\sigma}e^{-\frac{(u-2\mu)^2+v^2}{4\sigma^2}}$$

即 $(U,V)\sim N(2\mu,0,2\sigma^2,2\sigma^2,0)$

由于 $\rho=0$. 所以U和V相互独立.



例16 (积的公式)设$X$和Y相互独立,其密度函数分别为$p_X(x)$和$p_Y(y)$, 则$U=XY$的概率密度为

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{u}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv$$

解 令V=Y, 则 $\begin{cases}u=xy\\v=y\end{cases}$ 其反函数为 $\begin{cases}x=\frac{u}{v}\\y=v\end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix}1/v & 0\\-u/v^2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{v}$$

得$(U,V)$联合密度为 $p(\frac{u}{v},v)\frac{1}{|v|}=p_X(\frac{u}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}$

所以$U$的密度为 $p_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{u}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv$



## 增补变量法

若要求 $U=g_1(X,Y)$ 的密度 $p_U(u)$，

可增补一个变量$V=g_2(X,Y)$，

先用变量变换法求出 $(U,V)$的联合密度$p_{UV}(u,v)$，

然后再由联合密度$p_{UV}(u,v)$，去求出边际密度$p_U(u)$

<u>用此方法可以求出卷积公式、积的公式、商的公式</u>



练习 (商的公式)设$X$和Y相互独立,其密度函数分别为$p_X(x)$和$p_Y(y)$, 则$U=X/Y$的概率密度为

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(uv)p_Y(v)|v|dv$$

解 令$V$=Y, 则 $\begin{cases}u=x/y\\v=y\end{cases}$ 其反函数为 $\begin{cases}x=uv\\y=v\end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix}v & 0\\u & 1\end{vmatrix}=v$$

得$(U,V)$联合密度为 $p(uv,v)|v|=p_X(uv)p_Y(v)|v|$

所以$U$的密度为 $p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(uv)p_Y(v)|v|dv$



例15 已知 $(X,Y)$的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\0, & 其他\end{cases}$$

$U=3X-2Y$,求 $p_U(u)$

解 令 $\begin{cases}u=3x-2y\\v=\quad\quad y\end{cases}$ 其反函数为 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}(u+2v)\\y=\quad v\end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix}1/3 & 0\\2/3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$p_{UV}(u,v)=p\left(\frac{1}{3}(u+2v),v\right)\cdot\frac{1}{3}=\begin{cases}\frac{1}{3}(u+2v), & 0<\frac{1}{3}(u+2v)<1, 0<v<\frac{1}{3}(u+2v)\\0, & 其他\end{cases}$$



例17 已知$(X,Y)$的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\0, & 其他\end{cases}$$

求$U=X/Y$的概率密度函数

解 $p(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\0, & 其他\end{cases}$

$$p(uv,v)=\begin{cases}e^{-(uv+v)}, & u>0,v>0\\0, & 其他\end{cases}$$

$$p_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(uv,v)|v|dv=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-(u+1)v}vdv=\frac{1}{(u+1)^2}, & u>0\\0, & u\le 0.\end{cases}$$

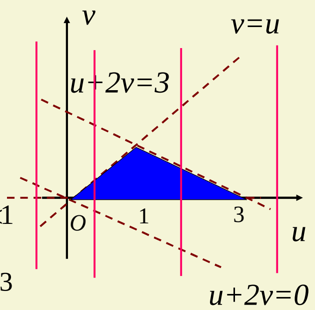


$$p_{UV}(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{3}(u+2v), & 0<\frac{1}{3}(u+2v)<1, 0<v<\frac{1}{3}(u+2v)\\0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(z+2u), & v<u<3-2v, 0<v<1\\0, & 其他\end{cases}$$

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv$$

$$=\begin{cases}\int_0^u\frac{1}{3}(u+2v)dv=\frac{2}{3}u^2, & 0<u<1\\\int_0^{\frac{3-u}{2}}\frac{1}{3}(u+2v)dv=\frac{1}{12}(9-u^2), & 1<u<3\\0, & u\le 0或u\ge 3\end{cases}$$






作业：p-171 习题3.3

1, 3, 6, 7,13(第一次)

8, 9, 10(1),14, 16 (第二次)

# §3.4多维随机变量的特征数

一、多维随机变量函数的数学期望
二、数学期望和方差的运算性质
三、协方差
四、相关系数
五、随机向量的数学期望与协方差阵



## 二、数学期望和方差的性质

### 1. 数学期望的性质

(1) $E(C) = C$ (2) $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

(4) 当$X, Y$独立时，$E(XY) = E(X)E(Y)$.

若$X_1, X_2, \ldots X_n$独立，则 $E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

证明 (3) 不妨设(X,Y)是连续型随机变量

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)dxdy$$
$$= E(X) + E(Y)$$



## 一、多维离散随机变量函数的数学期望

1. 如果(X,Y)为离散型随机向量，其联合概率分布为
$P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}$ $k = 1,2,3,\ldots,$
则$Z=g(X,Y)$的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_i\sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

2.设二维随机向量（$X$, $Y$）的联合概率密度为$p(x,y)$，则$Z=g(X,Y)$的数学期望为：

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)p(x,y)dxdy$$

特别地 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)dxdy$



## 二、数学期望和方差的性质

### 1. 数学期望的性质

(1) $E(C) = C$ (2) $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

(4) 当$X, Y$独立时，$E(XY) = E(X)E(Y)$.

若$X_1, X_2, \ldots X_n$独立，则 $E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

证明 (4) 不妨设(X,Y)是连续型随机变量

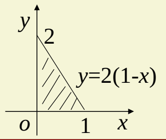
$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(y)dy = E(X)\cdot E(y).$$



例1 设二维随机向量（$X$，$Y$）的概率密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 6xy, & 0<x<1, 0<y<2(1-x) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求 E(X)及E(XY).




解 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)} x\cdot 6xydy = \frac{2}{5}$$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)} xy\cdot 6xydy = \frac{4}{15}.$$



### 2. 方差的性质

(1) $Var(c)=0$. (2) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.

(3) 当$X$与$Y$独立时，$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$.

证明 (3)Var(X+Y) = E (X+Y)-E(X+Y))$^2$

= E((X-E(X))+ (Y-E(Y))$^2$

= Var(X)+Var(Y) + 2E(X-E(X))(Y-E(Y))

而 E(X-E(X))(Y-E(Y))

= E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)

= E(XY)- E(X)E(Y)

由于 X,Y相互独立，故有 E(XY)= E(X)E(Y)

从而有 E(X—E(X))(Y—E(Y))= 0

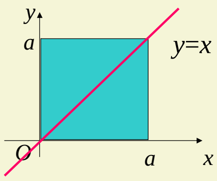
于是 Var($X \pm Y$)= Var($X$)+Var($Y$).



例2 在长为 $a$ 的线段上任取两点 $X$ 与 $Y$，求两点间的平均长度.

解：由于X和Y独立,且在(0,$a$)上均匀分布,所以(X,Y)的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & 0<x<a, 0<y<a; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$




$E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|p(x,y)dxdy$

$$= \int_0^a dx\int_0^x (x-y)\frac{1}{a^2}dy + \int_0^a dx\int_x^a (y-x)\frac{1}{a^2}dy$$
$$= \frac{a}{3}.$$



例3. 设 X ~B( $n$ ,$p$) ，求E(X)，Var(X) .

解: 令 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验出现}A \\ 0 & \text{第}i\text{次试验不出现}A \end{cases}$ $i=1,2,\ldots,n$

则 X= $X_1+X_2+\ldots+X_n$

显然 $X_i$ 均服从（0-1）分布,

从而 E($X_i$)= $p$, Var($X_i$) = $pq$, （$i$ =1，2，…，$n$）

且 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$相互独立。

于是 E(X)= E($X_1+X_2+\ldots+X_n$)

= E($X_1$)+E($X_2$)+…+E($X_n$)= $np$

Var(X)=Var($X_1+X_2+\ldots+X_n$)

=Var($X_1$)+Var($X_2$)+…+Var($X_n$)= $npq$

例4 将n个球放入M个盒子中,设每个球落入各个盒子是等可能的,求有球的盒子数X的期望.

解 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第i个盒子有球;\\ 0, & 第i个盒子无球.\end{cases}$ $i=1,2,\ldots,M$

$P(X_i=0)=(1-\frac{1}{M})^n$, $P(X_i=1)=1-(1-\frac{1}{M})^n$

得 $E(X_i)=1-(1-\frac{1}{M})^n$, $i=1,2,\ldots,M$

由于 $X=X_1+X_2+\ldots+X_M$,于是

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_M).$$

$$=M[1-(1-\frac{1}{M})^n]$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例5 在区间(0,1)随机取$n$个点,求相距最远的两点间的距离的数学期望.

解 设第i个点坐标为 $X_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 由题意知 $X_i$ 在(0,1)内均匀分布.其密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

则相距最远的两点间的距离为

$max\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)-min\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$

而$Y=max\,(X_1, X_2, \ldots X_n)$, 和$Z=min\,(X_1, X_2, \ldots X_n)$的分布密度分别为

$$p_Y(y)=nF^{n-1}(y)p(y)=\begin{cases}ny^{n-1}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_Z(z)=n(1-F(z))^{n-1}p(z)=\begin{cases}n(1-z)^{n-1}, & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例5 在区间(0,1)随机取$n$个点,求相距最远的两点间的距离的数学期望.

相距最远的两点间的距离为

$max\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)-min\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$

而$Y=max\,(X_1, X_2, \ldots X_n)$, 和$Z=min\,(X_1, X_2, \ldots X_n)$的分布密度分别为

$$p_Y(y)=nF^{n-1}(y)p(y)=\begin{cases}ny^{n-1}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_Z(z)=n(1-F(z))^{n-1}p(z)=\begin{cases}n(1-z)^{n-1}, & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(max\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)-min\,(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n))=E(Y-Z)}$$

$$\mathbf{=E(Y)-E(Z)}=\int_0^1 ny^n dy-\int_0^1 nz(1-z)^{n-1}dz=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 三、协方差

对于二维随机向量(X,Y)来说,数学期望E(X)、E(Y)只反映了X与Y各自的平均值,方差只反映了X与Y各自离开均值的偏离程度,它们对X与Y之间相互关系不提供任何信息.

二维随机向量(X,Y)的联合分布全面的地描述了(X,Y)的统计规律,也包含有X与Y之间关系的信息.我们希望有一个数字特征能够在一定程度上反映这种联系.

注意到 如果X和Y独立 则

$$E(X-E(X))(Y-E(Y))=0$$

如果E(X-E(X))(Y-E(Y))≠0, 说明X和Y不独立,从而具有一定的关系.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 三、协方差

**1.定义** 若$E(X-E(X))(Y-E(Y))$存在，则称其为随机变量$X$与$Y$的协方差. 记为Cov($X$,$Y$)即

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(X-E(X))(Y-E(Y))}$$

**协方差常用计算公式**

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- Cov(X,Y)>0, 称X和Y正相关, 表示X和Y同时增加或减少.
- Cov(X,Y)<0, 称X和Y负相关, 表示X增大而Y减少,或Y增大而X减少.
- Cov(X,Y)=0, 称X和Y不相关.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例5 设二维(X,Y)随机变量的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

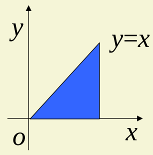
求$Cov(X,Y)$

解 因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 3xdy=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}.$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 3xdy=\int_0^1\frac{3x^3}{2}dx=\frac{3}{8}.$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 3xdy=\int_0^1\frac{3x^4}{2}dx=\frac{3}{10}.$$




$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 2. 协方差的性质

(1) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.

(2) $Cov(X, a) = 0$.

(3) $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ .

(4) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$.

(5) 若 $X$ 与 $Y$ 独立，则$Cov(X, Y) = 0$.

(6) $Var(X\pm Y) = Var(X)+ Var(Y) \pm 2\,Cov(X, Y)$

一般地

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例6 (配对问题)$n$ 个人、$n$ 件礼物，任意取. $X$ 为拿对自已礼物的人数，求 $E(X)$, $Var(X)$

解: $X_i=\begin{cases}1, & 第i个人拿对自己的礼物;\\ 0, & 第i个人未拿对自己的礼物.\end{cases}$

则 $X=\sum_{i=1}^n X_i$,

因为$X_i$ ~B(1,1/n) $E(X_i) = 1/n$, $Var(X_i) = (1/n)(1-1/n)$,

所以 $E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=1.$

又因为$Var(X)=\sum_{i=1}^n Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i, X_j)$,

所以先计算 $E(X_iX_j)$, $X_iX_j$的分布列为

| $X_iX_j$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-1/n(n-1)$ | $1/n(n-1)$ |

所以 $E(X_iX_j)=1/n(n-1)$, 由此得

$$Cov(X_i, X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$$

所以 $$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i, X_j)$$
$$=n\frac{n-1}{n^2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{n^2(n-1)}$$
$$=\frac{n-1}{n}+2C_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=1$$



2.相关系数的性质

(1) $-1\le Corr(X, Y)\le 1.$

证明：由柯西--许瓦兹不等式得.

$$[Corr(X, Y)]^2=\frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(X)Var(Y)}\le 1.$$ 所以 $-1\le Corr(X, Y)\le 1.$

(2) $Corr(X, Y)=\pm 1 \Leftrightarrow$ $X$ 与 $Y$ 几乎处处有线性关系。

$P(Y=aX+b)=1$

证明：充分性.若Y=$aX+b$ ($X=cY+d$也一样), 则

$$Var(Y)=Var(aX+b)=a^2\operatorname{var}(X),$$
$$Cov(X,Y)=E[X-E(X)][aX+b-E(aX+b)]=aVar(X).$$
$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{aVar(X)}{|a|Var(X)}=\begin{cases}1, & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}.$$



## 四、相关系数

协方差的数值在一定程度上反映了X与Y相互间的联系,但它要受到X与Y量纲的影响.取不同的量纲,会得到不同的协方差. 令X*=kX,Y*=kY,这时X*与Y*

$$Cov(X^*,Y^*)=k^2Cov(X,Y)$$

为了克服这一缺点,在计算X与Y的协方差之前,先对X与Y进行标准化,以便消除量纲的影响.

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\qquad Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

再来计算X*和Y*的协方差，这样就引进了相关系数的概念.



证明：必要性.记 $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}, \sigma_Y=\sqrt{Var(Y)}$

因为 $Var(\frac{X}{\sigma_X}\pm\frac{Y}{\sigma_Y})=2[1\pm Covv(X,Y)],$

所以当Corr(X,Y)=1时, $Var(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y})=0$

由此得 $P(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}=c)=1,$

或 $P(Y=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X-c\sigma_Y)=1.$

即Corr(X,Y)=1时, Y与X几乎处处正相关.

所以当Corr(X,Y)=-1时, $Var(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y})=0$

由此得 $P(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}=c)=1,$ 或 $P(Y=-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X+c\sigma_Y)=1.$

即Corr(X,Y)=-1时, Y与X几乎处处负相关.



1.相关系数的定义

对于随机变量$X$和$Y$,若$Var(X)\neq 0$ , $Var(Y)\neq 0$ 则称

$$Corr(X, Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

为随机变量$X$和$Y$的相关系数（标准协方差）.

2.相关系数的性质

(1) $-1\le Corr(X, Y)\le 1.$ (性质3.4.11)

(2) $Corr(X, Y)=\pm 1$ $\Leftrightarrow$ $X$ 与 $Y$ 几乎处处有线性关系。

(性质3.4.12) $P(Y=aX+b)=1$



相关系数$Corr(X,Y)$刻划了随机变量X和Y的线性相关程度.所以也称为线性相关系数.

- 当$Corr(X,Y)=0$时，称X与Y不相关.不相关指的是没有线性关系,也可能有其他的函数关系.
- 当$Corr(X,Y)=1$时，称X与Y完全正相关.当$Corr(X,Y)=-1$时，称X与Y完全负相关
- 当$0<|Corr(X,Y)|<1$时，称X与Y有“一定程度”的线性关系.当$|Corr(X,Y)|$越接近与1时，称X与Y线性程度越高,反之越弱.



引理(柯西--许瓦兹不等式) 若X和Y的方差存在,则

$$[Cov(X, Y)]^2\le Var(X)Var(Y).$$

证明：若$Var(X)=0$, 显然成立; 若$Var(X)\neq 0$考虑实变量$t$的二次函数

$$q(t)=E[(X-E(X))t+(Y-E(Y)]^2$$
$$=E[X-E(X)]^2t^2+2E[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]t+E[Y-E(Y)]^2$$
$$=Var(X)\cdot t^2+2Cov(X,Y)t+Var(Y)$$

因 $q(t)\geq 0$，Var(X)>0，

即 方程 $q(t)=0$ 或者没有实根或者有重根，

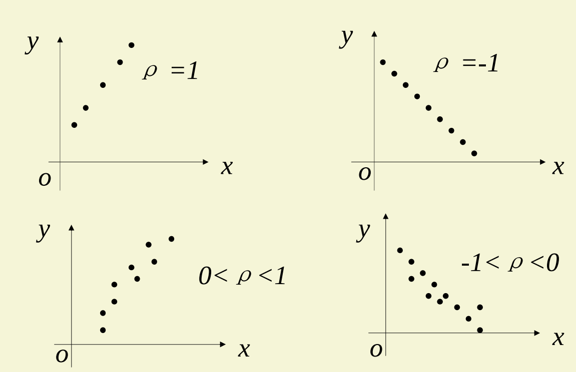
于是，判别式

$\triangle=4[Cov(X,Y)]^2-4Var(X)\cdot Var(Y)\leq 0$

即 $[Cov(X,Y)]^2\le Var(X)\cdot Var(Y).$



*相关情况示意图*



例7. 设（$X,Y$）服从二维正态分布，求$X,Y$的相关系数.

解：$X$，$Y$的联合密度$f(x,y)$及边缘密度 $p_X(x)$，$p_Y(y)$ 如下：

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\cdot e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)dxdy=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

从而说明二维正态分布随机变量X、Y相互独立当且仅当 ρ =0，即X、Y相互独立与不相关是等价的.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 练 习 题

1.将一枚不均匀硬币投掷$n$次，以X和Y分别表示出现正面和反面的次数，则X和Y的相关系数为

（A）－1；（B）0；（C）½；(D) 1.

2.设随机变量X和Y独立同分布，记U=X+Y, V=X-Y,则U和V

（A）不独立；（B）独立；

（C）相关系数为0；（D）相关系数不为0。

3.设随机变量X的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad(-\infty<x<\infty)$

求X与|X|的协方差，问X和|X|是否不相关，是否相互独立.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例8 设 $(X, Y)$ 的联合分布列为

| X \ Y | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |
| 0 | 1/8 | 0 | 1/8 |
| 1 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |

求 $X$, $Y$ 的相关系数.

解：$E(X)=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}=0$

$E(X^2)=\sum_i\sum_j x_i^2 p_{ij}=3/4$

同理 $E(Y)=E(X)=0$

$E(Y^2)=E(X^2)=3/4$

另一方面

$E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}$

$=1/8–1/8–1/8+1/8=0$

所以 $Cov(X, Y)$

$=E(XY)–E(X)E(Y)=0$

即 $Corr(X, Y)=0$

X,Y不相关,但也不独立.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 五、随机向量的数学期望与协方差阵

定义 记n维随机向量 $\vec{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$ 则

称 $E(\vec{X})=(E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n))'$

为$n$维随机向量 $\vec{X}$ 的数学期望.

称
$$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

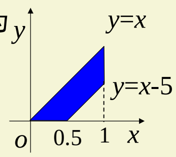
为 $\vec{X}$ 的协方差阵，记为 $Cov(\vec{X})$，或 $\Sigma$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例9 设二维(X,Y)随机变量的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{3}, & 0<x-y<0.5, 0<x,y<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求$Corr(X,Y)$




解 因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_0^x x\cdot\frac{8}{3}dy+\int_{0.5}^1 dx\int_{x-0.5}^x x\cdot\frac{8}{3}dy=\frac{11}{18},$$

$$E(X^2)=\int_0^{0.5}dx\int_0^x x^2\cdot\frac{8}{3}dy+\int_{0.5}^1 dx\int_{x-0.5}^x x^2\cdot\frac{8}{3}dy=\frac{31}{72},$$

$$Var(X)=E(X^2)\text{-}E^2(X)=\frac{31}{72}-(\frac{11}{18})^2=\frac{37}{648}$$

类似可得 $E(Y)=\frac{7}{18},Var(Y)=\frac{37}{648}$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

协方差矩阵的性质

协方差阵是对称、非负定矩阵.

**例10:** 设(X,Y)~N($\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$),求X和Y的协方差矩阵.

解 因为

$c_{11}=Var(X)=\sigma_1^2, c_{22}=Var(Y)=\sigma_2^2$

$c_{12}=c_{21}=Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

所以X和Y的协方差矩阵为

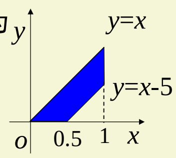
$$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例9 设二维(X,Y)随机变量的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{3}, & 0<x-y<0.5, 0<x,y<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求$Corr(X,Y)$




$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_0^x xy\cdot\frac{8}{3}dy+\int_{0.5}^1 dx\int_{x-0.5}^x xy\cdot\frac{8}{3}dy=\frac{41}{144},$$

最后得协方差和相关系数为

$$Cov(X,Y)=E(XY)\text{-}E(X)E(Y)=\frac{41}{144}-\frac{11}{18}\times\frac{7}{18}=\frac{37}{648}\approx0.0471.$$

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{61}{74}\approx0.8243.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

$n$维正态分布

**定义:**设n维随机变量($X_1,X_2,\ldots,X_n$),其协方差矩阵C和向量X与μ分别为

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}\quad \mu=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ E(X_2)\\ \ldots\\ E(X_n)\end{pmatrix}$$

若($X_1,X_2,\ldots,X_n$)的密度函数为

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)}$$

则称($X_1,X_2,\ldots,X_n$)是n维正态的随机向量,或服从$n$维正态分布,记为N(μ,C).

**作业：p-189 习题3.4**

**2, 6, 7, 10, 11(第一次)**

**17, 19, 24,27, 29,31,41 (第二次)**

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 1.离散型随机向量$(X, Y)$的条件分布

(2)条件分布函数

在$Y=y_j$的条件下, $X$的条件分布函数为

$$F(x\mid y_j)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i\mid Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}p_{i|j}\ ,$$

在$X=x_i$的条件下, $Y$的条件分布函数为

$$F(y\mid x_i)=\sum_{y_j\le y}P(Y=y_j\mid Y=x_i)=\sum_{y_j\le y}p_{j|i}\ ,$$

**(3) 条件分布的性质**

（1）$P(X=x_i\mid Y=y_j)\geqslant 0$

（2）$\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i\mid Y=y_j)=1.$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

# §3.5条件分布与条件数学期望

一、条件分布

二、条件数学期望

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例1 设二维离散型随机变量$(X, Y)$的概率分布如下表. 求$Y$在$X=0$和$X=1$条件下的条件概率分布.

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 | $P(X=x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.6 |
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4 |

解 先计算 $(X, Y)$关于$X$的边缘概率分布

由公式 $P\left(Y=y_j\middle|X=x_i\right)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad (j=1,2,\cdots)$

得在$X=0$条件下$Y$的条件概率分布为:

| Y\|X=0 | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| $p_{j\mid i}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 一、条件分布

- 二维随机变量$(X, Y)$之间主要表现为独立与相依两类关系.
- 许多问题中有关的随机变量取值是相互影响的. 如$X$表示人的身高, $Y$表示人的体重, 则$X$和$Y$一般有相依关系
- 条件分布是研究随机变量的相依关系的一个有力工具.
- 条件分布是条件概率的推广.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例1 设二维离散型随机变量$(X, Y)$的概率分布如下表. 求$Y$在$X=0$和$X=1$条件下的条件概率分布.

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 | $P(X=x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.6 |
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4 |

解 先计算 $(X, Y)$关于$X$的边缘概率分布

由公式 $P\left(Y=y_j\middle|X=x_i\right)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad (j=1,2,\cdots)$

得在$X=1$条件下$Y$的条件概率分布为:

| Y\|X=1 | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| $p_{j\mid i}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 1.离散型随机向量$(X, Y)$的条件分布

(1)定义 设离散型随机向量$(X, Y)$的联合分布列为

$p_{ij}=p(X=x_i, Y=y_j)\quad (i, j=1, 2, \ldots)$

在已知$Y=y_j$的条件下($P(Y=y_j)>0$)，$X$的条件概率

$$p_{i|j}=P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad (i=1,2\cdots)$$

称为在$Y=y_j$的条件下，$X$的条件分布.

类似地，当$P(X=x_i)>0$时,在$X=x_i$的条件下，$Y$的条件分布为

**条件概率公式：$P(B\mid A)=P(AB)/P(A)$，$P(A)>0$**

$$p_{j|i}=P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad (j=1,2,\cdots)$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例2 设随机变量$X$和 $Y$相互独立,且$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$, 求在$X+Y=n$的条件X的条件分布.

解 由于泊松分布具有可加性, 得$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$, 所以

$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

即 $X\mid X+Y=n\sim B(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$

例3 设某班车起点站上客人数X服从参数为λ的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为p，且中途下车与否相互独立。以Y表示在中途下车的人数。求（1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率。（2）随机向量（X，Y）的联合分布.

解：(1) P(Y=m|X=n)

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, 0\le m\le n, n=0,1,2\cdots$$

(2) P(X=n, Y=m) = P(X=n) P(Y=m|X=n)

$$=\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\quad 0\le m\le n, n=0,1,2,3\cdots$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 2.连续型随机向量(X, Y)的条件分布

### (1) 条件分布函数和分布密度

设对于任意小的Δx>0，有 $P(x<X<x+\Delta x)>0$

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}P(Y\le y\,|\,x<X\le x+\Delta x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(Y\le y, x<X\le x+\Delta x)}{P(x<X\le x+\Delta x)}$$

存在，则称此极限为X=x的条件下Y的条件分布函数。

记作 $P(Y\le y\,|X=x)$ 或 $F_{Y|X}(y|x)$

且有 $$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}p(x,v)dv}{p_X(x)}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

事实上，若p(x, y)在点(x, y)处连续，$p_X(x)$连续，且$p_X(x)>0$，则有

$$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x, Y\le y)}{P(x<X\le x+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[F(x+\Delta x,y)-F(x,y)/\Delta x}{[F_X(x+\Delta x)-F_X(x)]/\Delta x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[F(x+\Delta x,y)-F(x,y)]/\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[F_X(x+\Delta x)-F_X(x)]/\Delta x}$$

$$=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Big/\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}=\frac{\partial\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu}{\partial x}\Big/\frac{\partial\int_{-\infty}^{x}p_X(u)du}{\partial x}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{y}p(x,v)dv}{p_X(x)}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

对y求导，得到在条件X=x下Y的条件概率密度

$$p_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

类似地，在条件Y=y下，X的条件分布函数及条件概率密度为

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}p(u,y)\,du}{p_Y(y)}$$

$$p_{X/Y}(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例4 已知 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 求条件分布

解 $$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))\right]}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例4 已知 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 求条件分布

即

$$X\,|\,Y=y\ \sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

类似可得，

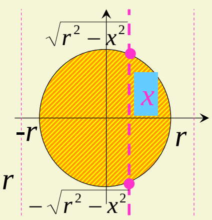
$$Y\,|\,X=x\ \sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

所以 二维正态分布的条件分布仍然服从正态分布.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例5 已知(X,Y)服从圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布,求 $p_{Y|X}(y|x)$.

解 $$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$




$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy, & -r<x<r\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r\\ 0, & 其他\end{cases}$$

边缘分布不是均匀分布！

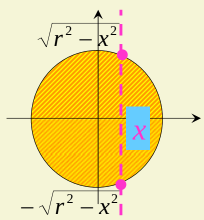
山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例5 已知(X,Y)服从圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布,求 $p_{Y|X}(y|x)$.

当 $-r<x<r$ 时，

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & -\sqrt{r^2-x^2}<y<\sqrt{r^2-x^2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$




— 这里 x 是常数，当 X = x 时，

$$Y\,|\,X=x\sim U\left(-\sqrt{r^2-x^2},\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

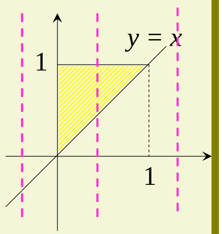
条件分布是均匀分布!

**例6** 设 $p(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$

**解** $p_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

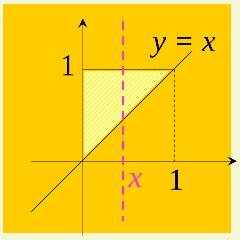
$=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$




山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

$p_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydx, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

$=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$




当 $0<y<1$ 时，

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0\le x\le y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 2.连续型随机向量(X, Y)的条件分布

(2) 连续场合的全概率公式和贝叶斯公式

$$p(x,y)=p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$$

$$p(x,y)=p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

全概率公式

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_{Y|X}(y|x)dx$$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)dy$$

由边际分布无法得到联合分布,但**由边际分布和条件分布就可得到联合分布.**

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

贝叶斯公式

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_{Y|X}(y|x)dx}$$

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)dy}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例7** 已知 $X\sim U(0,1)$,已知当 $X=x$ 时，$Y\sim U(0,x)$, 其中 $0<x<1$, 求 $(X,Y)$ 的联合分布密度

**解:** 由于 $X\sim U(0,1)$,所以 $p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时，$p_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

由 $p(x,y)=p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$ 得

$$p(x,y)=\begin{cases}1/x, & 0<x<1, 0<y<x;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

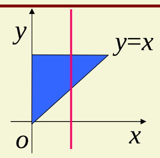
**例8** 对于随机向量(X,Y)已知

$p_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}3x^2/y^3 & 0<x<y\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, $p_Y(y)=\begin{cases}5y^4 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,

求边缘密度函数 $p_X(x)$ 及 $P(X>1/2)$

**解:** $p(x,y)=p_y(y)p_{X|Y}(x|y)$

$=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$




$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 15x^2udy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases},$$

$$P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}p_X(x)\ dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{47}{64}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

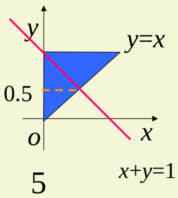
**练习** 对于随机向量(X,Y)已知

$p_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $p_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 $P(X+Y\geqslant 1)$, $P(Y<0.5)$, $P\left(Y<\frac{2}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$

**提示** $p(x,y)=p_y(y)p_{X|Y}(x|y)$

$=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

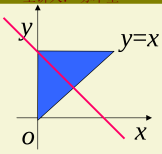



$$P(X+Y\ge 1)=\int_{0.5}^1 dy\int_{1-y}^y 8xydx=\frac{5}{6}$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

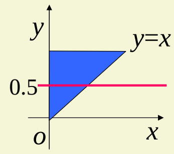
**提示** $p(x,y)=p_y(y)p_{X|Y}(x|y)$

$=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$




$$P(X+Y\ge 1)=\int_{0.5}^1 dy\int_{1-y}^y 8xydx=\frac{5}{6}.$$

$$P(Y<0.5)=\int_0^{1/2}dy\int_0^y 8xydx=\frac{1}{16}.$$




$$P\left(Y<\frac{2}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{2/3}p_{Y|X}(y|\frac{1}{2})dy$$

$$=\int_{1/2}^{2/3}\frac{2y}{1-(0.5)^2}dy=\int_{1/2}^{2/3}\frac{8y}{3}dy=\frac{7}{27}$$

$p_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

## 二、条件数学期望

**定义** 条件分布的数学期望(若存在)称为条件数学期望，其定义如下

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i \mid Y=y), & (X,Y)\text{是离散型;}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X|Y}(x\mid y)dx, & (X,Y)\text{是连续型.}\end{cases}$$

$$E(Y|X=x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} y_j P(Y=y_j \mid X=x), & (X,Y)\text{是离散型;}\\ \int_{-\infty}^{\infty} y p_{Y|X}(y\mid x)dx, & (X,Y)\text{是连续型.}\end{cases}$$



**例9** 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,如果已知$Y=y$,试求$E(X|Y=y)$.

**解:** 已知

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))\right]}$$

即

$$X\mid Y=y \quad \sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

所以 $E(X\mid Y=y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$



◆条件期望是条件分布的数学期望，所以其具有数学期望的一切性质. 如

$$E(aX_1+bX_2\mid Y=y)=aE(X_1\mid Y=y)+bE(X_2\mid Y=y)$$

$$E(f(X)\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{X|Y}(x\mid y)dx$$

◆$E(X|\ Y=y)$ 是 $y$ 的函数.所以记 $g(y)=E(X|\ Y=y)$.

进一步记 $g(Y)=E(X|\ Y)$.



**重期望公式** 设$(X,Y)$是二维随机变量,若$E(X)$存在,则

$$E(E(X|Y))=E(X).$$

**证明** (2)设$(X,Y)$为二维连续型随机变量,则

$$E(E(X\mid Y))=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\mid Y=y)p_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}xp_{X|Y}(x\mid y)dx\right)p_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}dx\right)p_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)dxdy=E(X)$$



**例10** 一矿工被困有三个门的矿井.沿第一个门经一坑道3小时到达安全区,沿第二个门经一坑道5小时回到原处.沿第三个门经一坑道7小时回到原处.假设总是等可在三个门中选一个，求他平均用多少时间到达安全区.

**解** 设矿工需要X小时到达安全区,直接求X的分布是困难的.考虑用条件分布的期望来计算.为此记Y表示第一次所选的门.由题意

$$P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=1/3$$

$$E(X\mid Y=1)=3 \qquad E(X\mid Y=2)=5+E(X)$$

$$E(X\mid Y=3)=7+E(X)$$

$$E(X)=E(E(X\mid Y))=\frac{1}{3}[3+(5+E(X))+(7+E(X))]=5+\frac{2}{3}E(X)$$

所以 $E(X)=15.$



**例11** 口袋有编号1,2,3, …,n的n个球,从中任取1球,若取到1号球,则得1分,且停止摸球;若取到i号球(i⩾2),则得i分,且将此球放回,重新摸球,如此下去,求得到的平均总分数.

**解** 设$X$为得到的总分数,$Y$表示第一次取到的球的号码.则

$$P(Y=1)=P(Y=2)=\cdots=P(Y=n)=1/n.$$

又因为 $E(X\mid Y=1)=1,$

当i⩾2时, $E(X\mid Y=i)=i+E(X).$

所以, $E(X)=E(E(X\mid Y))=\sum_{i=1}^{n}E(X\mid Y=i)P(Y=i)$

$$=\frac{1}{n}[1+2+\cdots n+(n-1)E(X))]$$

由上式解得, $E(X)=\frac{n(n+1)}{2}.$



**例12** 电力公式月供电$X\sim U(10,30)(10^4\text{kw})$,某工厂月需要电$Y\sim U(10,20)$.若工厂得到足够电力,则每$10^4$kw创30万元利润,若得不到足够电力,不足部分有其他途径获得,这时$10^4$kw只能创10万元利润.求该厂的月平均利润.

**解** 由题意月供电$X\sim U(10,30)$,工厂实际需求$Y\sim U(10,20)$.设Z表示工厂的月利润.由题意可得

$$Z=\begin{cases}30Y, & \text{当}Y\le X;\\ 30X+10(Y-X), & \text{当}Y>X.\end{cases}$$

在X=$x$给定时候, Z仅是Y的函数,当10⩽x<20时,

$$E(Z\mid X=x)=\int_{10}^{x}30yp_Y(y)dy+\int_{x}^{20}(10y+20x)p_Y(y)dy$$

$$=\int_{10}^{x}30y\cdot\frac{1}{10}dy+\int_{x}^{20}(10y+20x)\cdot\frac{1}{10}dy$$



在X=$x$给定时候, Z仅是Y的函数,当10⩽x<20时,

$$E(Z\mid X=x)=50+40x-x^2$$

当$20\leqslant x\leqslant 30$时,

$$E(Z\mid X=x)=\int_{10}^{20}30yp_Y(y)dy=\int_{10}^{20}30y\cdot\frac{1}{10}dy=450.$$

然后用X的分布对条件期望E(Z|X=x)再做一次平均,得

$$E(Z)=E(E(Z\mid X))$$

$$=\int_{10}^{20}E(Z\mid X=x)p_X(x)dx+\int_{20}^{30}E(Z\mid X=x)p_X(x)dx$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{20}(50+40x-x^2)dx+\frac{1}{20}\int_{20}^{30}450dx$$

$$=25+300-\frac{700}{6}+225\approx 433$$

例13 随机个随机变量和的数学期望 设$X_1, X_2, \dots$为一列独立同分布随机变量,随机变量N只取正整数,且N与$\{X_n\}$独立,证明 $E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(X_1)E(N)$

证明

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E[E(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n)P(N=n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} X_i)P(N=n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} nE(X_1)P(N=n)$$
$$=E(X_1)\sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n) \quad =E(X_1)E(N)$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

# 第三章习题课

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例13 随机个随机变量和的数学期望 设$X_1, X_2, \dots$为一列独立同分布随机变量,随机变量N只取正整数,且N与$\{X_n\}$独立,证明 $E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(X_1)E(N)$

利用此题的结论,可以解决许多实际问题,如

(1)设一天内到达某商场的顾客数N是仅取非负整数值的随机变量,且E(N)=35000.又设进入此商场的第i个顾客的购物金额为$X_i$,可以认为诸$X_i$相互独立同分布,且$E(X_i)$=82(元).假设N与$X_i$独立是合理的,所以该商场一天的平均营业额为

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(X_1)E(N) \quad =82\times 35000 \quad =287(\text{万元})$$

其中$X_0$=0.

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 一、离散型随机向量及其分布

例1. 5 个球分别编号①～⑤，任取 3 球，以 X 和 Y 分别表示其中的最小号码和最大号码，求（1）（X，Y）的概率分布．（2）边缘分布.（3）在X=1的条件下，Y的条件分布列.

解：（X，Y）可取(1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,5),且

P(X=1,Y=3)=1/10,
P(X=1,Y=4)=2/10,
P(X=1,Y=5)=3/10
P(X=2,Y=4)=1/10,
P(X=2,Y=5)=2/10,
P(X=3,Y=5)=1/10

| X \ Y | 3 | 4 | 5 | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/10 | 2/10 | 3/10 | 6/10 |
| 2 | 0 | 1/10 | 2/10 | 3/10 |
| 3 | 0 | 0 | 1/10 | 1/10 |
| $p_{.j}$ | 1/10 | 3/10 | 6/10 | |

| Y\|X=1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| p | 1/6 | 2/6 | 3/6 |

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例13 随机个随机变量和的数学期望 设$X_1, X_2, \dots$为一列独立同分布随机变量,随机变量N只取正整数,且N与$\{X_n\}$独立,证明 $E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(X_1)E(N)$

利用此题的结论,可以解决许多实际问题,如

(2)一只昆虫一次产卵N服从参数为λ的泊松分布,每个卵成活的概率为$p$,可设$X_i$服从0-1分布,$\{X_i=1\}$表示第i个卵成活,则一只昆虫产卵后平均的成活卵数为

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(X_1)E(N) \quad =\lambda p.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例2．设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，定义随机变量

$X_k=\begin{cases}0 & Y\le k\\ 1 & Y>k\end{cases}$ （$k=1, 2$）求 随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布

解：（$X_1,X_2$）可取(0,0), (0,1), (1,0), (1,1),

注意到 Y 服从参数为 1 的指数分布，其分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

所以：$P(X_1=0, X_2=0)=P(Y\le 1, Y\le 2)=P(Y\le 1)$
$=F(1) \;=1-e^{-1}$

$P(X_1=0, X_2=1)=P(Y\le 1, Y>2)=P\{\phi\}=0$

$P(X_1=1, X_2=0)=P(Y>1, Y\le 2)=P(1<Y\le 2)=F(2)-F(1)$
$=e^{-1}-e^{-2}$

$P(X_1=1, X_2=1)=P(Y>1, Y>2)=P(Y>2)=1-F(2) \quad =e^{-2}$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**作业：p-205 习题3.5**

**2, 3, 5, 7, 8, 10,12**

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例3 设随机变量的联合概率分布为

| Y / X | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 |
| 2 | $a$ | $b$ |

已知 E(Y)=1.6, (1)求常数a,b的值；(2)求关于t的一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 无实根的概率

解(1)由概率分布的性质可得 $a+b=0.7$

利用得E(Y)=1.6得 $1\times(0.1+a)+2\times(0.2+b)=1.6$

即 $a+2b=1.1$ 得方程组 $\begin{cases}a+b=0.7\\ a+2b=1.1\end{cases}$ 解得 $a=0.3, b=0.4$

(2)要使 $t^2+Xt+Y=0$ 无实根,须 $X^2-4Y<0$ 即 $X^2<4Y$.

所以 P(无实根)= $P(X^2<4Y)$
$=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=2,Y=2)$
$=0.1+0.2+0.4=0.7$

**例4** 设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 独立同分布，且已知

$$P(X_i=0)=0.6,\quad P(X_i=1)=0.4\quad (i=1,2,3,4)$$

求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

**解** 令 $Y_1=X_1X_4$，$Y_2=X_2X_3$ 则 $Y_1,Y_2$ 独立同分布，

$$P(Y_i=1)=P(X_1=1,X_4=1)=P(X_1=1)P(X_4=1)=0.16$$

$$P(Y_i=0)=1-0.16=0.84.\qquad (i=1,2)$$

$X=Y_1-Y_2$ 可能取值为则-1, 0,1

$$P(X=-1)=P(Y_1=0,Y_2=1)=0.84\times 0.16=0.1344,$$

$$P(X=1)=P(Y_1=1,Y_2=0)=0.16\times 0.84=0.1344,$$

$$P(X=0)=1-2\times 0.1344=0.7312.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例5.** 设X,Y是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知X的分布律为：P(X=i)=1/3(i=1,2,3),又设$Z_1$=max{X,Y}, $Z_2$=min{X,Y}, 试求(1)($Z_1$,$Z_2$)的联合分布;(2) $Z_1$的边缘分布.

解 (1) 根据X与Y的取值，可以看出$Z_1$和$Z_2$也只能取1，2，3三个值. ($Z_1$,$Z_2$)取值为(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(3,3),逐点分析它们的取值，可以得出

$$P(Z_1=1,\ Z_2=1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{9};$$

类似地，

$$P(Z_1=2,Z_2=2)=P(Z_1=3,Z_2=3)=1/9;$$

$$P(Z_1=1,Z_2=2)=P(Z_1=1,Z_2=3)=P(Z_1=2,Z_2=3)=P(\varnothing)=0;$$

$$P(Z_1=2,Z_2=1)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=2/9;$$

类似地,

$$P(Z_1=3,Z_2=1)=P(Z_1=3,Z_2=2)=2/9.$$

其联合分布表为

| $Z_1$ \ $Z_2$ | 1 | 2 | 3 | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/9 | 0 | 0 | 1/9 |
| 2 | 2/9 | 1/9 | 0 | 1/3 |
| 3 | 2/9 | 2/9 | 1/9 | 5/9 |
| | | | | |

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例6.** 设随机变量U服从二项分布B(2,1/2).随机变量 $X=\begin{cases}-1, & 若U\le 0,\\ 1, & 若U>0;\end{cases}$ $Y=\begin{cases}-1, & 若U<2,\\ 1, & 若U\ge 2.\end{cases}$ 求随机变量X-Y与X+Y的方差和X与Y的协方差.

**解法一** 先求出X与Y的概率分布及XY的概率分布.即

$$P\{X=-1\}=P\{U\le 0\}=P\{U=0\}=\frac{1}{4},\ P\{X=1\}=\frac{3}{4},$$

$$P\{Y=-1\}=P\{U<2\}=1-P\{U=2\}=\frac{3}{4},\ P\{Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{XY=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{XY=1\}=1-P\{XY=-1\}=\frac{1}{2}.$$

其次计算E(X),E(Y),D(X),D(Y)与E(XY).即

$$E(X)=-P\{X=-1\}+P\{X=1\}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2},\ EY=-\frac{1}{2},$$

$$E(X^2)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,\ D(X)=\frac{3}{4},D(Y)=\frac{3}{4},$$

$$E(XY)=-P\{XY=-1\}+P\{XY=1\}=0$$

最后应用公式可得

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4},$$

$$D(X+Y)=DX+2Cov(X,Y)+DY=2,$$

$$D(X-Y)=DX-2Cov(X,Y)+DY=1.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例6.** 设随机变量U服从二项分布B(2,1/2).随机变量 $X=\begin{cases}-1, & 若U\le 0,\\ 1, & 若U>0;\end{cases}$ $Y=\begin{cases}-1, & 若U<2,\\ 1, & 若U\ge 2.\end{cases}$ 求随机变量X-Y与X+Y的方差和X与Y的协方差.

**解二** 先求出X±Y的概率分布.即

$$P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le 0,U<2\}=P\{U=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2},\quad P\{X+Y=2\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X-Y=0\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=P\{U=0\}+P\{U=2\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X-Y=2\}=\frac{1}{2}.$$

其次，计算E(X±Y),D(X±Y)即

$$E(X+Y)=0,D(X+Y)=E(X+Y)^2=2,$$

$$E(X-Y)=1,E(X-Y)^2=2,D(X-Y)=1.$$

最后计算Cov(X,Y).解方程组

$$\begin{cases}D(X+Y)=DX+2Cov(X,Y)+DY,\\ D(X-Y)=DX-2Cov(X,Y)+DY,\end{cases}$$

可得

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{4}[D(X+Y)-D(X-Y)]=\frac{1}{4}.$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例7** 设$A,B$为随机试验$E$的两个事件，$0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,$

令 $X=\begin{cases}1, & A发生\\ 0, & \bar{A}发生\end{cases}$ $\quad Y=\begin{cases}1, & B发生\\ 0, & \bar{B}发生\end{cases}$

证明: 若$\rho_{XY}=0$，则随机变量$X,Y$相互独立.

**证** 由 $\rho_{XY}=0 \Longrightarrow COV(X,Y)=0$

$$\Longrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

而 $E(X)=P(A)\qquad E(Y)=P(B)$

$$XY=\begin{cases}1, & A,B同时发生\\ 0, & A,B不同时发生\end{cases}$$

$$\Longrightarrow E(XY)=P(AB)$$

$$\Longrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例8** 设某班车起点站上客人数X服从参数为λ的泊松分，每位乘客在中途下车的概率为p，且中途下车与否相互独立。Y表示在中途下车的人数。求

（1）在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率。

（2）随机向量（X,Y）的联合分布.

**解:** (1) P(Y=m|X=n)

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2\cdots$$

(2) P(X=n, Y=m) = P(X=n) P(Y=m|X=n)

$$=\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\quad 0\le m\le n,n=0,1,2,3\cdots$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

## 二、连续型随机向量及其分布

**例1** 已知随机向量$(X,Y)$的联合分布函数为

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y)$$

求 (1)常数$a$，$b$，$c$；(2) 联合密度函数$p$(x,y)；(3)$X,Y$的边缘分布函数. (4) P(X>2)

解：由F(-∞,0)=0,
F(0,-∞)=0
F(+∞, +∞)=1 得：

$$\begin{cases}a(b-\frac{\pi}{2})c=0\\ ab(c-\frac{\pi}{2})=0\\ a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{1}{\pi^2},b=\frac{\pi}{2},c=\frac{\pi}{2}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

(2) $p(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

**例1** 已知随机向量$(X,Y)$的联合分布函数为

$$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan y)$$

求 (1)常数$a$，$b$，$c$；(2) 联合密度函数$p$(x,y)；(3)$X,Y$的边缘分布函数. (4) P(X>2)

解得 $a=\frac{1}{\pi^2},b=\frac{\pi}{2},c=\frac{\pi}{2}$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

(2) $p(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$

(3) $F_X(x)=P(X\le x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y$

(4) $P(X>2)=1-F_X(2)=1-\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan 2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan 2$

例2 设 随机变量$(X,Y)$的联合 密度 为

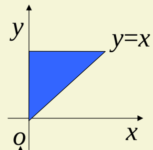
$$p(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(1)常数 $k$； (2) $P(X+Y\ge 1)$， (3) 联合分布函数 $F(x,y)$;

解 (1)由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$

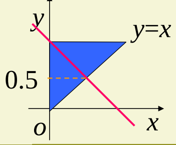
$$=k\int_0^1 y\frac{y^2}{2}dy=\frac{k}{8}$$

得 $k=8.$




(2) $P(X+Y\ge 1)=\int_{0.5}^1 dy\int_{1-y}^y 8xydx$

$$=\frac{5}{6}.$$




山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

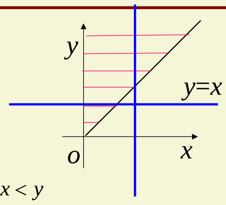
例4 设二维随机变量的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

求(1)求边缘概率密度并判断X与Y是否独立；(2)条件概率密度

(1) $p_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$

$p_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0;\\ 0 & y\le 0.\end{cases}$




(2)当y>0时，$p_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 0<x<y\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

当x>0时，$p_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y} & y>x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

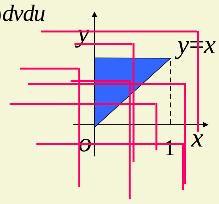
山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

(3) $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu$

当x<0 或 y<0 时， $F(x,y)=0.$

当0≤ x< 1, 0≤ y< x 时，

$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uvdu=y^4$$




当0≤ x<1, x≤ y<1时，

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uvdv=2x^2y^2-x^4$$

当$0\le x<1, y\ge 1$时，

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^1 8uvdv=2x^2-x^4$$

当 $x\ge 1, y\ge 1$ 时，

$$F(x,y)=1$$

当$x\ge 1, 0\le y<1$时，

$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uvdu=y^4$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

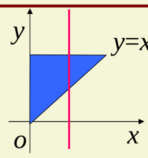
例5 对于随即向量(X,Y)已知

$$p_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}3x^2/y^3 & 0<x<y\\ 0 & \text{其它}\end{cases},\quad p_Y(y)=\begin{cases}5y^4 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

求边缘密度函数$p_X(x)$ 及P(X>1/2)

解: $p(x,y)=p_y(y)p_{X|Y}(x\mid y)$

$$=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$




$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 15x^2udy=\frac{15}{2}x^2(1-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}.\end{cases},$$

$$P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}p_X(x)\ dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{47}{64}$$

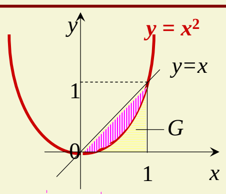
山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例3 设$(X,Y)\sim G$上的均匀分布，$G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$

求(1) $p(x,y)$; (2) $P(Y>X^2)$; $(X,Y)$在平面上的落点到 $y$ 轴距离小于0.3的概率.

解 (1) 区域G的面积是1/2,所以

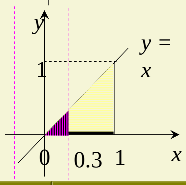
$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$




(2) $P(Y>X^2)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}2dy=\frac{1}{3}.$

(3) $P\ \ X<\quad =P(-0.3<X<0.3)$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(0.3)^2=0.09$$




山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例6.设随机变量X,Y相互独立，其概率密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求随机变量Z=2X+Y的概率密度.

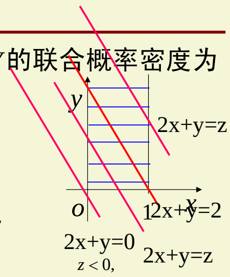
解法一：由于X与Y独立，因此X和Y的联合概率密度为

$$p(x,y)=p_x(x)p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z}p(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy, & 0\le z<2\\ \int_0^1 dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy, & z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & z<0,\\ \frac{z}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}, & 0\le z<2,\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$




山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例4 设二维随机变量的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

求(1)求边缘概率密度并判断X与Y是否独立；(2)条件概率密度

(1)解 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

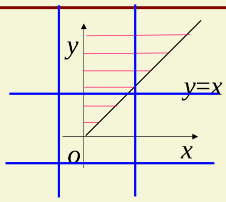
当x>0时 $p_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy\quad =e^{-x};$

当x≤0时 $p_X(x)=0.$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$

当y>0时 $p_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=y\cdot e^{-y}$

当y≤0时 $p_Y(y)=0,\ \ y\le 0$




由于$p(x,y)\ne p_X(x)\,p_Y(y)$，所以X， Y不独立

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例6.设随机变量X,Y相互独立，其概率密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求随机变量Z=2X+Y的概率密度.

解法一：随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\begin{cases}0 & z<0,\\ \frac{z}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}, & 0\le z<2,\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

随机变量的概率密度为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z<0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-z}, & 0\le z<2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

解法二：由于X与Y相互独立，因此2X与Y也是相互独立，且2X的概率密度为

$$p_{2X}(x)=\begin{cases}1/2, & 0\le x\le 2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

根据独立随机变量和的卷积公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{2X}(x)p_Y(z-x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}p_Y(z-x)dx$$

$$\underline{\underline{u=z-x}}\ -\frac{1}{2}\int_z^{z-2}p_Y(u)du=\frac{1}{2}\int_{z-2}^{z}p_Y(u)du$$

当z<0时，$p_Z(z)=0$

当0<z<2时，$p_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^z e^{-u}du=\frac{1}{2}(1-e^{-z}).$

当2 ≤ z时 $p_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{z-2}^{z}e^{-u}\,du=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}.$

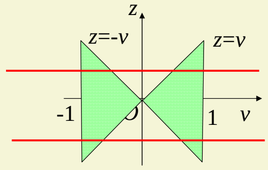


解二 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{z}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv$

其中 $p_X(\frac{z}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}=\begin{cases}-1/(4v) & v\le z\le -v,-1\le v<0;\\ 1/(4v), & -v\le z\le v,0<v\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当-1<z<0

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{z}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv=\int_{-1}^{z}-\frac{1}{4v}dv+\int_{-z}^{1}\frac{1}{4v}dv=-\frac{1}{2}\ln|z|$$




当0<z ≤ 1 $p_Z(z)=\int_{-1}^{-z}-\frac{1}{4v}dv+\int_{z}^{1}\frac{1}{4v}dv=-\frac{1}{2}\ln z$

当|z| > 1时，$p_Z(z)=0$



例7设随机向量(X, Y)在矩形G={(x,y)| -1≤x≤1,-1≤y≤1}上均匀分布，试求Z=XY的概率分布.

解一 设Z=XY的分布函数为$F_Z(z)$，则

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$

$z<-1$,则 $F_Z(z)=P(Z\le z)=0$

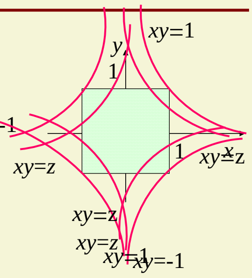
$-1\le z<0$,则 $F_Z(z)=\iint\limits_{xy\le z}p(x,y)dxdy$

$$=\int_{-1}^{z}dx\int_{\frac{z}{x}}^{1}\frac{1}{4}dy+\int_{-z}^{1}dx\int_{-1}^{\frac{z}{x}}\frac{1}{4}dy$$

$$=\frac{1}{2}(z+1-z\ln|z|)$$

$0<z\le 1$,则 $F_Z(z)=\iint\limits_{xy\le z}p(x,y)dxdy=1-\iint\limits_{xy>z}p(x,y)dxdy$

$$=1-\int_{-1}^{-z}dx\int_{-1}^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}dy-\int_{z}^{1}dx\int_{\frac{z}{x}}^{1}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(z-z\ln z)$$






例8. 设随机变量X与Y的联合分布在以点(0,1), (1,0),(1,1)为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量Z=X+Y的方差.

解一 三角形区域为

$D=\{(x,y):0\le x\le 1,1-x\le y\le 1\}$,

随机变量X和Y的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$$EZ=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1}2(x+y)dx=\int_0^1(y^2+2y)dy=\frac{4}{3},$$

$$EZ^2=E(X+Y)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)^2p(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1}2(x^2+2xy+y^2)dx$$

$$=\int_0^1(2y+2y^2+\frac{2}{3}y^3)dy=\frac{1}{16},$$

$$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}.$$

解二 随机变量X的边缘概率为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}2dy=2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}.$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18}.$$

同理可得E(Y)=2/3, D(Y)=1/18

$$E(XY)=\iint\limits_D 2xydxdy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1}2xydy=\int_0^1(2y^2-y^3)dy=\frac{5}{12}.$$

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}.$$

$$DZ=D(X,Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$



例7设随机向量(X, Y)在矩形G={(x,y)| -1≤x≤1,-1≤y≤1}上均匀分布，试求Z=XY的概率分布.

解一 设Z=XY的分布函数为$F_Z(z)$，则

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$

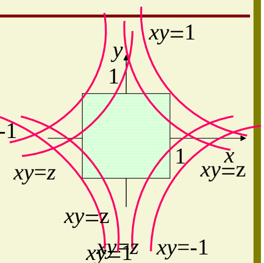
$z<-1$,则 $F_Z(z)=P(Z\le z)=0$

$-1\le z<0$,则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}(z+1-z\ln|z|)$

$0<z\le 1$,则 $F_Z(z)=\frac{1}{2}(z-z\ln z)$

$z>1$,则 $F_Z(z)=1$

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln|z| & -1\le z<0,\\ -\frac{1}{2}\ln z, & 0<z\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$






例9.已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且X与Y分别服从正态分布N(1,3²)与N(0,4²),它们的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$ 令$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1)求Z的数学期望E(Z)与方差D(Z)；(2)求X与Y的相关系数$\rho_{XZ}$.

解(1)因X~N(1,3²),Y~N(0,4²),

$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$ $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

$$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y)=\sqrt{DX}\sqrt{DY}\rho_{XY}$$

$$=3\times 4\times(-\frac{1}{2})=-6$$

$$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{9}DX+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y)+\frac{1}{4}DY$$

$$=\frac{3^2}{9}+2\times\frac{1}{6}\times(-6)+\frac{4^2}{4}=3.$$

(2) $Cov(X,Y)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$

$$=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

$$=\frac{3^2}{3}+\frac{1}{2}\times(-6)=0.$$

$\rho_{XZ}=0.$



(积的公式)设X和Y相互独立,其密度函数, 分别为$p_X(x)$和$p_Y(y)$, 则U=XY的概率密度为

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{u}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv$$

解二 $$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(\frac{z}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}dv$$

其中 $p_X(\frac{z}{v})p_Y(v)\frac{1}{|v|}=\begin{cases}-1/(4v) & -1\le z/v\le 1,-1\le v<0;\\ 1/(4v), & -1\le z/v\le 1,0<v\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$=\begin{cases}-1/(4v) & -v\le z\le v,-1\le v<0;\\ 1/(4v), & -v\le z\le v,0<v\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



例10.将一颗骰子重复投掷n次，X表示出现点数小于3的次数，Y表示出现点数不小于3的次数．求证：(1)X与Y一定不独立,(2)求证：X+Y与X-Y一定不相关；(3)求3X+Y与X-3Y的相关系数.

证明 依题意，X服从二项分布，参数为掷一颗骰子出现点数小于3的概率，即p=1/3．因此有

$$X\sim B(n,\frac{1}{3}),\quad EX=\frac{n}{3},DX=\frac{2n}{9};$$

$$Y=n-X\sim B(n,\frac{2}{3}),EY=\frac{2n}{3},\quad DY=\frac{2n}{9}.$$

(1) $Cov(X,Y)=Cov(X,n-X)$

$$=-DX=-\frac{2}{9}n\ne 0,$$

因此X与Y一定不独立.

(2) $Cov(X+Y,X-Y)$

$$=Cov(X,X)-Cov(Y,Y)$$

$$=DX-DY=0.$$

(3) $D(3X+Y)=9DX+6Cov(X,Y)+DY$

$$=4DX=\frac{8n}{9},$$

$$D(X-3Y)=DX-6Cov(X,Y)+9DY$$

$$=16DX=\frac{32n}{9},$$

$$Cov(3X+Y,X-3Y)=3DX-8Cov(X,Y)-3DY$$

$$=8DX=\frac{16n}{9}.$$

$$\rho=\frac{Cov(3X+Y,X-3Y)}{\sqrt{D(3X+Y)}\sqrt{D(X-3Y)}}=\frac{\frac{16n}{9}}{\sqrt{\frac{8n}{9}}\sqrt{\frac{32n}{9}}}=1.$$

(3)另解：3X+Y = 3X+n-X=2X+n, X-3Y=4X-3n,得 X-3Y= 2(3X+Y)-5n 由于 X-3Y 是 3X+Y的线性函数，因此他们的相关系数为1.

例11.一商店经销某种商品，每周进货的数量X与需求量Y是相互独立，且在区间[10，20]上服从均匀分布.商店每售出一个单位该商品可得利润1000元，若需求量超过进货量，商店可以从其它商店调剂供应，这时每单位商品可获利500元；若进货量多于需求量则须处理，每处理一单位商品亏损200元试计算此商品店经销该商品每周所得期望值

解 设Z表示商店每周所得利润的期望值，则

$$Z=\begin{cases}1000Y-200(X-Y), & Y\le X,\\ 1000X+500(Y-X), & Y>X,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1200Y-200X, & Y\le X,\\ 500(Y+X), & Y>X,\end{cases}$$

由于X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{100} & ,10\le x\le 20,10\le y\le 20,\\ 0 & ,\text{其他}.\end{cases}$$

$$EZ=\iint_{D_1}\frac{1}{100}(1200y-200x)dxdy+\iint_{D_2}500(x+y)\times\frac{1}{100}dxdy$$

$$=\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}(12y-2x)dy+\int_{10}^{20}dy\int_{10}^{y}5(x+y)dx$$

$$=\int_{10}^{20}(4x^2+20x-600)dx$$

$$+\int_{10}^{20}5(\frac{3}{2}y^2-10y-50)dy$$

$$=\frac{19000}{3}+7500\approx 13833.33(\text{元}).$$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例12 一矿工被困有三个门的矿井.沿第一个门经一坑道3小时到达安全区,沿第二个门经一坑道5小时回到原处.沿第三个门经一坑道7小时回到原处.假设总是等可在三个门中选一个, 求他平均用多少时间到达安全区.

解 设矿工需要X小时到达安全区,直接求X的分布是困难的.考虑用条件分布的期望来计算.为此记Y表示第一次所选的门.由题意

$$P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=1/3$$

$$E(X\mid Y=1)=3 \qquad E(X\mid Y=2)=5+E(X)$$

$$E(X\mid Y=3)=7+E(X)$$

$$E(X)=E(E(X\mid Y))=\frac{1}{3}[3+(5+E(X))+(7+E(X))]=5+\frac{2}{3}E(X)$$

所以 $E(X)=15.$

山东农业大学 概率论与数理统计教程 主讲人：苏本堂

例13 随机个随机变量和的数学期望 设$X_1, X_2, \ldots$为一列独立同分布随机变量,随机变量N只取正整数,且N与$\{X_n\}$独立,证明 $E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E(X_1)E(N)$

证明 $$E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E[E(\sum_{i=1}^{N}X_i\mid N)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E(\sum_{i=1}^{N}X_i\mid N=n)P(N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)P(N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nE(X_1)P(N=n)$$

$$=E(X_1)\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=E(X_1)E(N)$$