《传 热 学》电子课件

上海电力学院
能源与环境工程学院
工程热物理学科

第4章　热传导问题的数值解法

§4.1　导热问题数值求解的基本思想

§4.2　内节点离散方程的建立方法

§4.3　边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

§4.4　非稳态导热问题的数值解法

§4.1 导热问题数值求解的基本思想

一、求解导热问题的三种基本方法

1. 理论分析法
2. 数值计算法
3. 实验法

二、三种方法的基本求解过程

1. 理论分析方法

在理论分析的基础上，直接对微分方程在给定的定解条件下进行积分，这样获得的解称之为分析解，或叫理论解；

2. 数值计算法

把原来在时间和空间连续的物理量的场，用有限个离散点上的值的集合来代替，通过求解按一定方法建立起来的关于这些值的代数方程，从而获得离散点上被求物理量的值；并称之为数值解；

§4.1　导热问题数值求解的基本思想

三、数值求解过程的步骤

以二维矩形区域内稳态、无内热源、常物性的导热问题为例

1. 建立控制方程及定解条件

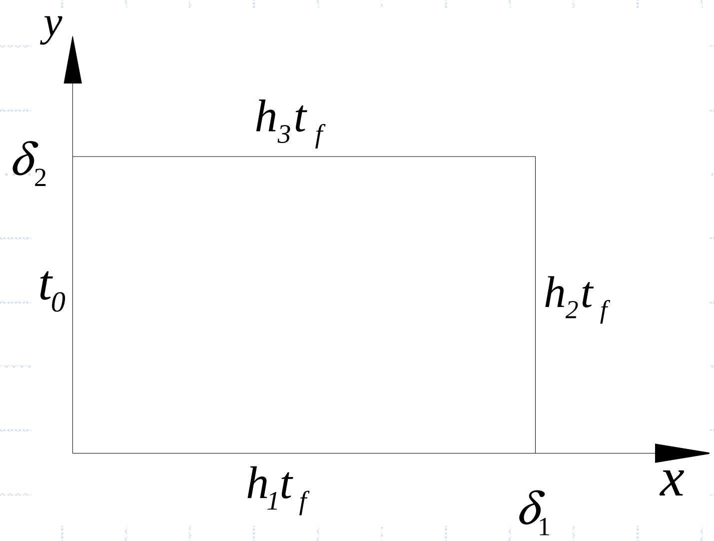
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0$$

$$x=0 \quad t=t_0$$

$$x=\delta_1 \quad h_2(t_f-t)=-\lambda\frac{dt}{dx}$$

$$y=0 \quad h_1(t_f-t)=-\lambda\frac{dt}{dy}$$

$$y=\delta_2 \quad h_3(t_f-t)=-\lambda\frac{dt}{dy}$$



§4.1 导热问题数值求解的基本思想

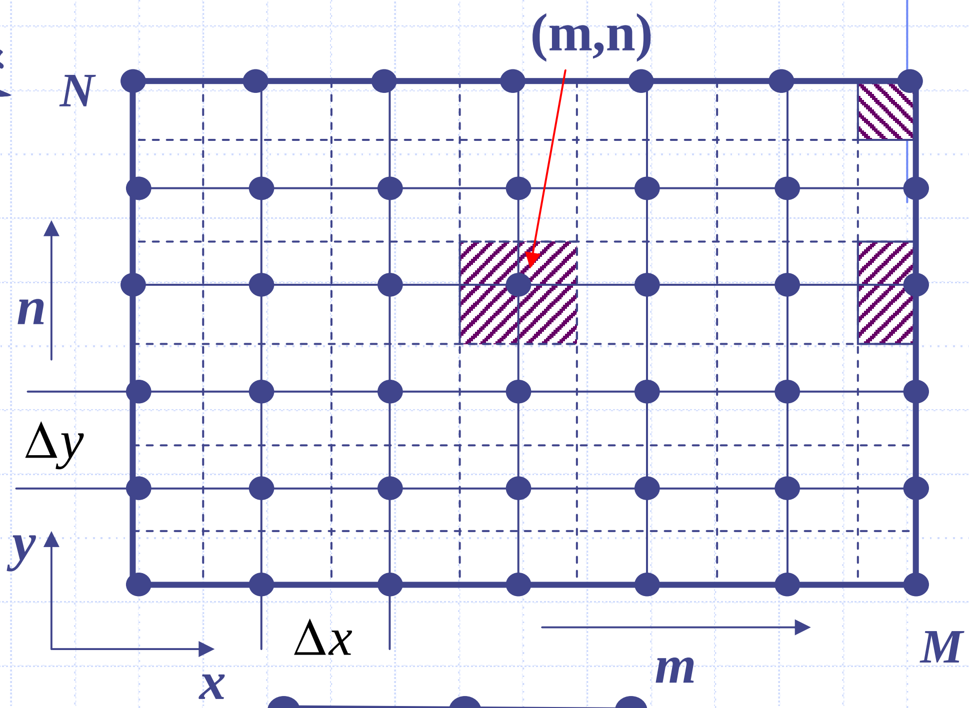
三、数值求解过程的步骤

2. 区域离散化

步长：　Δx　Δy

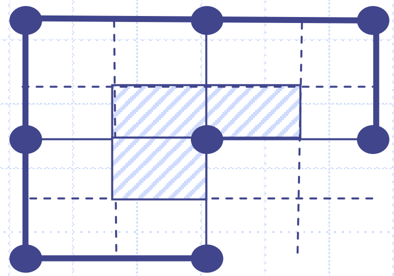
节点：内节点

边界节点
- 平直边界节点
- 外部角点
- 内部角点



控制容积：

内节点	$\Delta x \times \Delta y$
平直边界节点	$\dfrac{\Delta x \times \Delta y}{2}$
外部角点	$\dfrac{\Delta x \times \Delta y}{4}$
内部角点	$\dfrac{3\Delta x \times \Delta y}{4}$



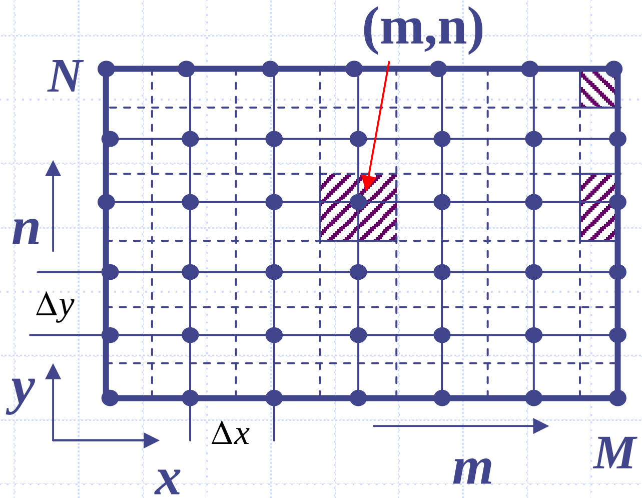
§4.1　导热问题数值求解的基本思想

三、数值求解过程的步骤

3. 建立节点物理量的代数方程

(1)　Taylor（泰勒）级数展开法;

(2)　控制容积平衡法(也称为热平衡法)



以内节点、$\Delta x = \Delta y$为例

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad t_{m,n}=\frac{1}{4}\left(t_{m+1,n}+t_{m-1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}\right)$$

§4.1 导热问题数值求解的基本思想

三、数值求解过程的步骤

4. 设立迭代初场

迭代法求解方程设置的各节点温度初始值，将在求解过程中不断改进。

5. 求解代数方程

M × N个节点建立M × N方程，采用迭代法求解。

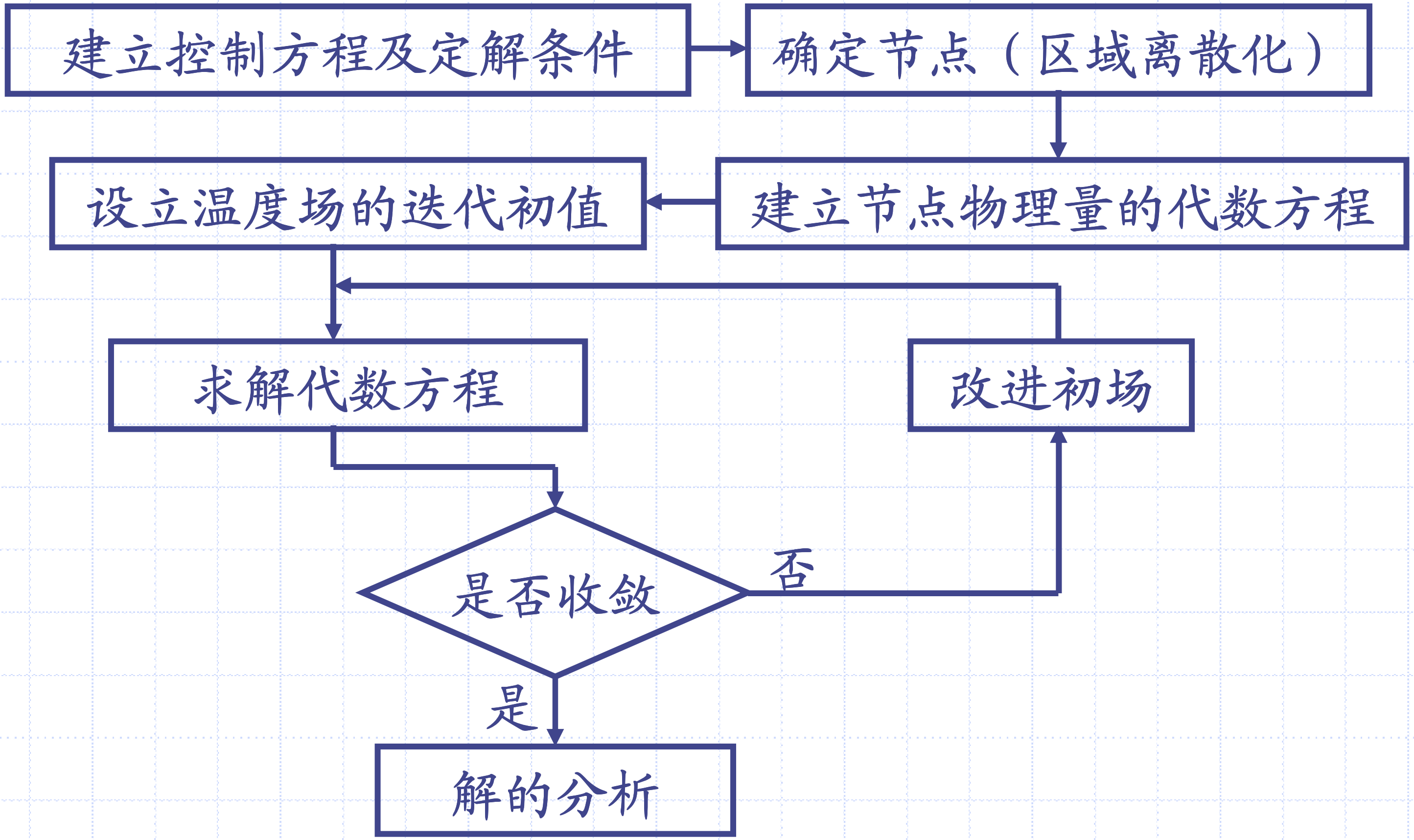
$$t_i^{(k+1)} \approx t_i^{(k)}$$

6. 解的分析

由温度分布进一步计算热流量、热变形等。

§4.1　导热问题数值求解的基本思想

三、数值求解过程的步骤

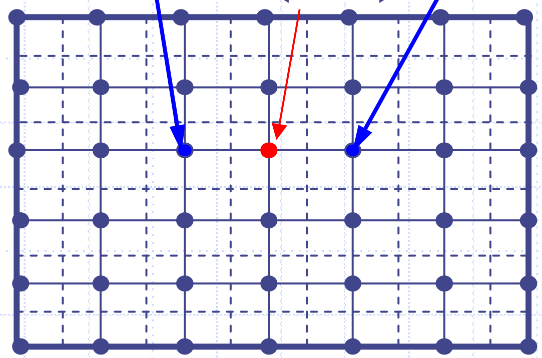


§4.2 内节点离散方程的建立方法

一、泰勒级数展开法

用节点(m,n)的温度来表示节点(m+1,n)的温度

$$t_{m+1,n}=t_{m,n}+\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{m,n}\Delta x+\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n}\frac{\Delta x^2}{2!}+\left.\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right|_{m,n}\frac{\Delta x^3}{3!}+\cdots$$



用节点(m,n)的温度来表示节点(m-1,n)的温度

$$t_{m-1,n}=t_{m,n}-\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{m,n}\Delta x+\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n}\frac{\Delta x^2}{2!}-\left.\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right|_{m,n}\frac{\Delta x^3}{3!}+\cdots$$

将上两式相加、移项整理即得二阶导数的中心差分:

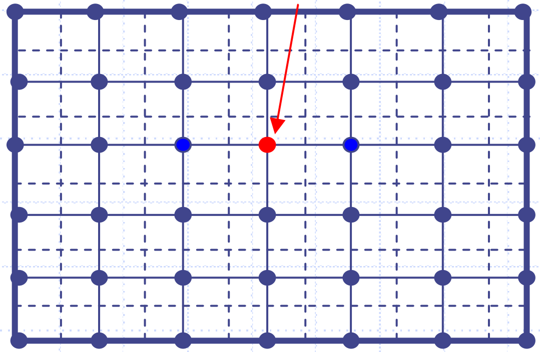
$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n}=\frac{t_{m+1,n}-2t_{m,n}+t_{m-1,n}}{\Delta x^2}+o(\Delta x^2)$$

§4.2 内节点离散方程的建立方法

一、泰勒级数展开法

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|_{m,n} = \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2)$$



$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{t_{i,j+1} - 2t_{i,j} + t_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\dot{\Phi}_v}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{t_{i,j+1} - 2t_{i,j} + t_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{\Phi}_{v,i,j}}{\lambda} = 0$$

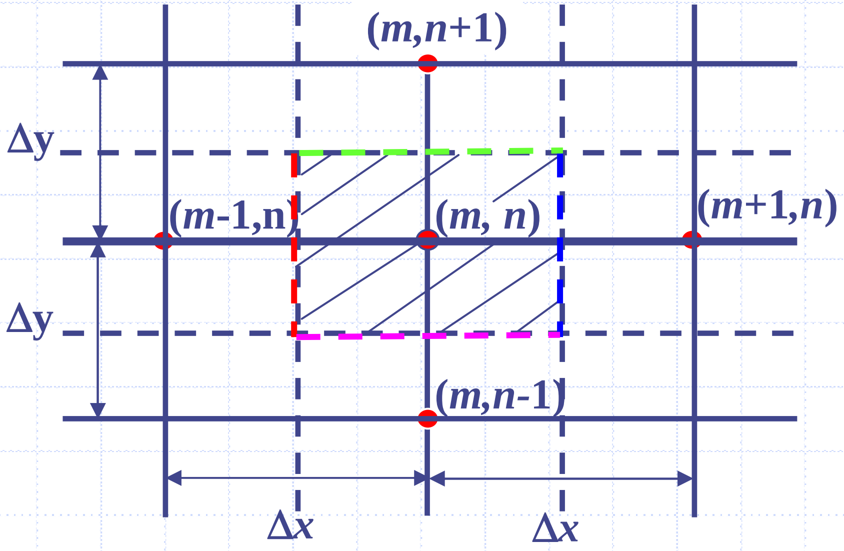
§4.2 内节点离散方程的建立方法

二、热平衡法

对每个控制容积应用能量守恒

内能的增量 = 净流入控制体的总热流量 + 控制体内热源生成热

以稳态、无内热源问题为例



流入控制体的热流量来自于控制体的各个界面：e界面、w界面、n界面、s界面。

每个界面上的热流量均是导热方式进来。

$$\Phi_e + \Phi_w + \Phi_n + \Phi_s + \Phi_v = 0$$

§4.2 内节点离散方程的建立方法

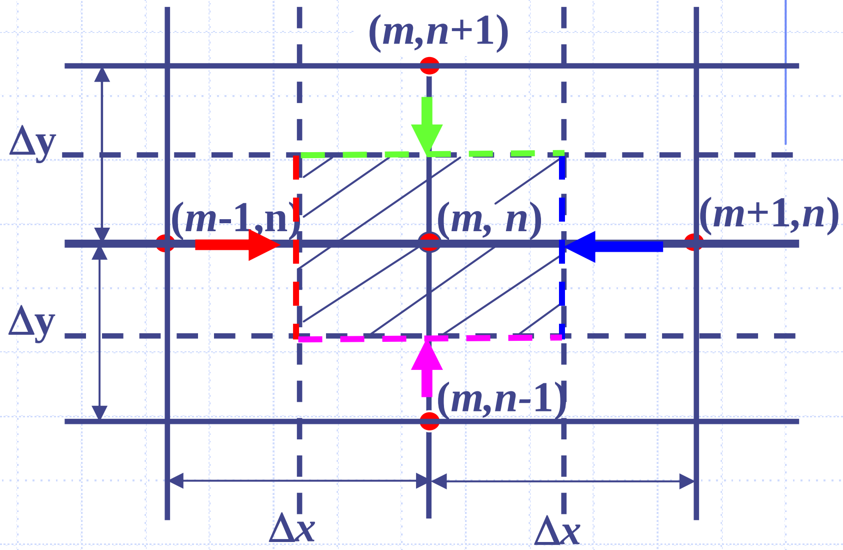
二、热平衡法

e界面: $\Phi_e = \lambda \Delta y \dfrac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$

w界面: $\Phi_w = \lambda \Delta y \dfrac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$

n界面: $\Phi_n = \lambda \Delta x \dfrac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$

s界面: $\Phi_s = \lambda \Delta x \dfrac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$



控制体内热源生成热: $\Phi_v = \dot{\Phi} \cdot V = \dot{\Phi} \cdot \Delta x \Delta y$

$$\lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \Delta y \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \Delta x \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \dot{\Phi} \Delta x \Delta y = 0$$

§4.2 内节点离散方程的建立方法

二、热平衡法

$\Delta x = \Delta y$ 时

$$4t_{m,n} = t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi}$$

无内热源时

$$4t_{m,n} = t_{m-1,n} + t_{m+1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1}$$

§ 4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

一、平直边界节点的离散方程

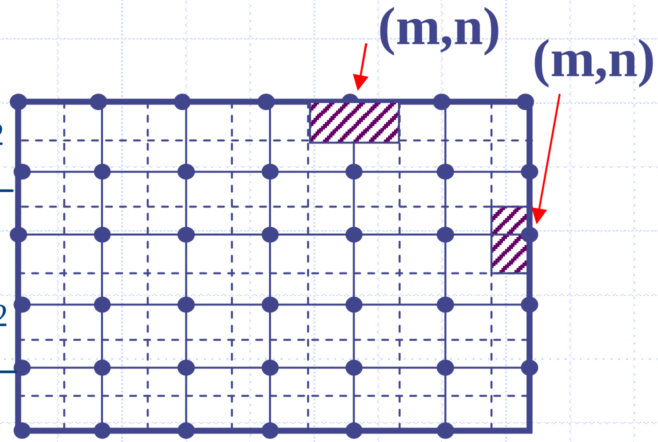
$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\Delta y q_w+\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta x}{2}\Delta y=0$$

$$\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\Delta x q_w+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta y}{2}\Delta x=0$$

$\Delta x=\Delta y$时

$$4t_{m,n}=2t_{m-1,n}+\frac{2\Delta x}{\lambda}q_w+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta x^2}{\lambda}$$

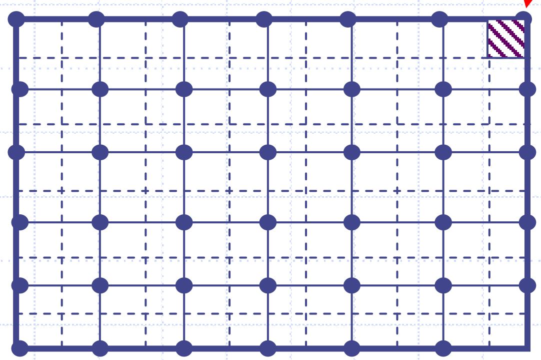
$$4t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+\frac{2\Delta y}{\lambda}q_w+2t_{m,n-1}+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta x^2}{\lambda}$$



§ 4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

二、外部角点的离散方程

$$\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{2}q_w+\frac{\Delta x}{2}q_w+\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\Delta y}{2}=0$$



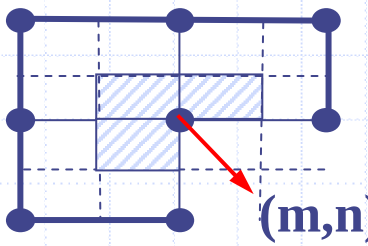
$\Delta x=\Delta y$时

$$2t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m,n-1}+\frac{2\Delta x}{\lambda}q_w+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{\Delta x^2}{2\lambda}$$

三、内部角点的离散方程

$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\left(\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{2}q_w\right)$$

$$+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\left(\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\frac{\Delta x}{2}q_w\right)+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{3\Delta x\Delta y}{4}=0$$



§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

四、边界热流密度q_w

1. 第二类边界条件

$$q_w = const$$

绝热或对称边界条件？ $q_w = 0$

2. 第三类边界条件

$$q_w = h(t_f - t_{m,n})$$

3. 辐射边界条件

§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

五、代数方程的求解

直接解法：通过有限次运算获得精确解的方法，如：
矩阵求解，高斯消元法。

迭代法： 先对要计算的场作出假设（设定初场），在迭代计算中不断予以改进，直到计算前的假定值与计算结果相差小于允许值为止的方法，称迭代计算收敛。

（1）雅可比迭代法

每次迭代计算，均用上一次迭代计算出的值。

（2）高斯—赛德尔迭代法

每次迭代计算，均是使用节点温度的最新值。

§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

五、代数方程的求解

以三元方程组为例，

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 = b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 = b_2 \\ a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 = b_3 \end{cases}$$

1. 假设初场

$$t_1^{(0)}、t_2^{(0)}、t_3^{(0)}$$

2. 确定迭代方程式

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2 - a_{13}t_3) \\ t_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1 - a_{23}t_3) \\ t_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1 - a_{32}t_2) \end{cases}$$

§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

五、代数方程的求解

3.更新初场

(1) 雅可比迭代法

$$\begin{cases} t_1^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2^{(i)} - a_{13}t_3^{(i)}) \\ t_2^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1^{(i)} - a_{23}t_3^{(i)}) \\ t_3^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1^{(i)} - a_{32}t_2^{(i)}) \end{cases}$$

(2) 高斯——赛德尔迭代法

$$\begin{cases} t_1^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}t_2^{(i)} - a_{13}t_3^{(i)}) \\ t_2^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1^{(i+1)} - a_{23}t_3^{(i)}) \\ t_3^{(i+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1^{(i+1)} - a_{32}t_2^{(i+1)}) \end{cases}$$

§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

五、代数方程的求解

4.判断收敛

收敛准则：

$$\max\left|t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_i^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_{\max}^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

若不收敛，以新的初场 重复计算，直到相邻两次迭代值之差小于允许值，计算终止。

§ 4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

六、迭代方程式的讨论

1. 迭代过程发散

对于一个代数方程组，若选用的迭代方式不合适，有可能导致发散。

例题4−1

$$\begin{cases} 8t_1 + 2t_2 + t_3 = 29 \\ t_1 + 5t_2 + 2t_3 = 32 \\ 2t_1 + t_2 + 4t_3 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{8}(29 - 2t_2 - t_3) \\ t_2 = \dfrac{1}{5}(32 - t_1 - 2t_3) \\ t_3 = \dfrac{1}{4}(28 - 2t_1 - t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 32 - 5t_2 - 2t_3 \\ t_2 = 28 - 2t_1 - 4t_3 \\ t_3 = 29 - 8t_1 - 2t_2 \end{cases}$$

§4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

六、迭代方程式的讨论

2. 主对角占优

每一个迭代变量的系数总是大于或等于该式中其它变量系数绝对值的代数和。

$$\frac{|a_{12}|+|a_{13}|}{a_{11}}\le 1 \qquad \frac{|a_{21}|+|a_{23}|}{a_{22}}\le 1 \qquad \frac{|a_{31}|+|a_{32}|}{a_{33}}\le 1$$

3. 如何做到主对角占优

采用热平衡法导出差分方程时，若每一个方程都选用导出该方程中心节点的温度作为迭代变量，则上述条件必满足，迭代一定收敛。

§4.4 非稳态导热问题的数值解法

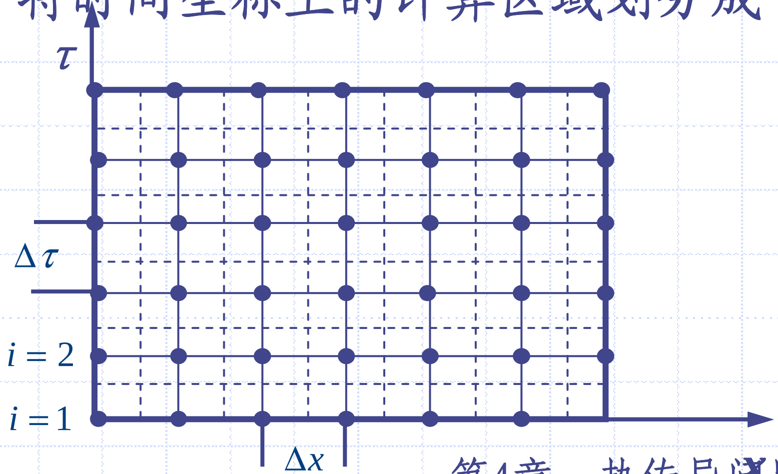
一、非稳态导热问题与稳态导热问题数值解法的比较

不同：控制方程中多了一个非稳态项

相同：扩散项的离散方法与稳态一样

二、时间-空间区域的离散化

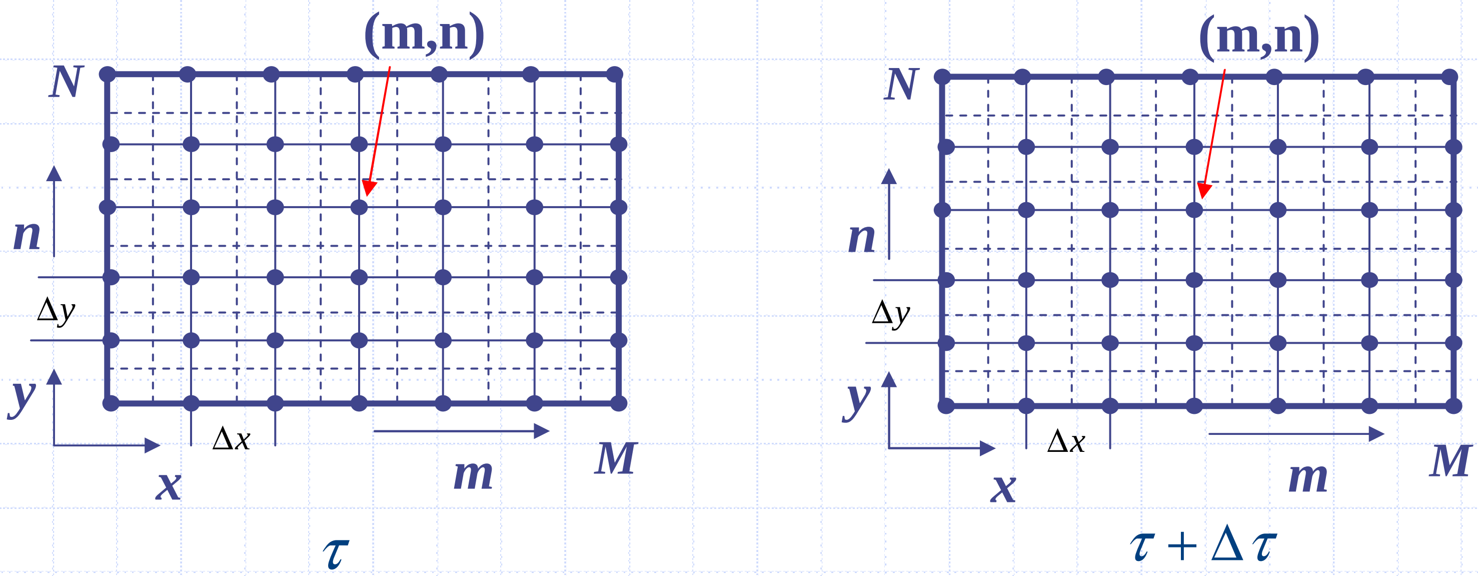
将时间坐标上的计算区域划分成（I-1）等份，得到I个时间节点。



一维非稳态导热时间、
空间区域的离散化

§4.4 非稳态导热问题的数值解法

二、时间-空间区域的离散化



二维非稳态导热时间、空间区域的离散化

§4.4 非稳态导热问题的数值解法

三、非稳态项的离散

1. 向前差分

函数 **t** 在节点（**n**，**$i+1$**）对点（**n**，**i**）作泰勒展开

$$t_n^{(i+1)} = t_n^{(i)} + \Delta\tau \left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} + \frac{\Delta\tau^2}{2}\left.\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}\right|_{n,i} + \ldots\ldots$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

§ 4.4 非稳态导热问题的数值解法

三、非稳态项的离散

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

2. 向后差分

函数 **t** 在节点（**n**，**i－1**）对点（**n**，**i)**作泰勒展开

$$t_n^{(i-1)} = t_n^{(i)} - \Delta\tau \left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} + \frac{\Delta\tau^2}{2}\left.\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}\right|_{n,i} + \ldots\ldots$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i)} - t_n^{(i-1)}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

3. 中心差分

将 **t** 在节点（**n**，**i ＋1**）及（**n**，**i －1)**处的展开式相加，得中心差分表达式:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \tau}\right|_{n,i} = \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i-1)}}{2\Delta\tau} + O(\Delta\tau^2)$$

§ 4.4 非稳态导热问题的数值解法

四、非稳态方程的离散

1. 泰勒展开法

以一维非稳态导热的内节点为例，

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

非稳态项取向前差分，扩散项取中心差分。

扩散项用 (**i**-**1**) 时层的值，
$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} = a\frac{t_{n+1}^{(i)} - 2t_n^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2}$$
显式差分格式

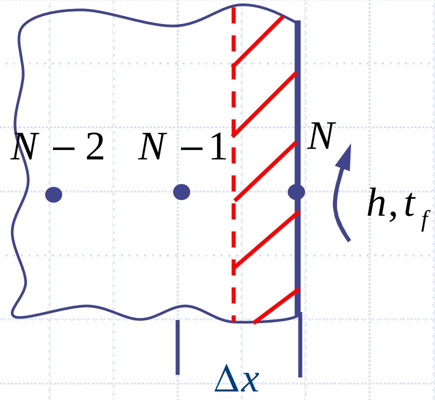
扩散项用 (**i** + **1**) 时层的值，
$$\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta\tau} = a\frac{t_{n+1}^{(i+1)} - 2t_n^{(i+1)} + t_{n-1}^{(i+1)}}{\Delta x^2}$$
隐式差分格式

§ 4.4 非稳态导热问题的数值解法

四、非稳态方程的离散

2. 热平衡法

以边界节点为例，



由能量守恒定律得，

$$\rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_N^{(i+1)} - t_N^{(i)}}{\Delta \tau} = \lambda \frac{t_{N-1}^{(i)} - 2t_N^{(i)}}{\Delta x} + h\left(t_f - t_N^{(i)}\right)$$

$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} \left(1 - \frac{2h\Delta\tau}{\rho c \Delta x} - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right) + \boxed{\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}} t_{N-1}^{(i)} + 2\boxed{\frac{h\Delta\tau}{\rho c \Delta x}} t_f$$

$\dfrac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$ －－网格傅里叶数

$$\frac{h\Delta\tau}{\rho c \Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \frac{h\Delta x}{\lambda} = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \frac{h\Delta x}{\lambda} = Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta$$

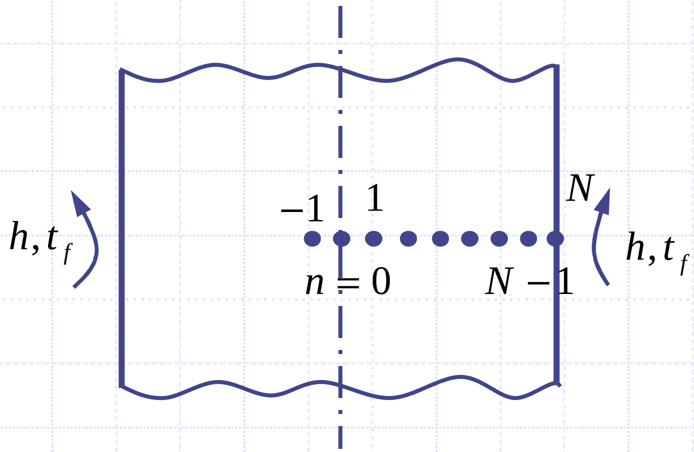
$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} \left(1 - 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta - 2Fo_\Delta\right) + 2Fo_\Delta t_{N-1}^{(i)} + 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta t_f$$

§4.4 非稳态导热问题的数值解法

四、非稳态方程的离散

3. 一维非稳态导热的离散方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial \tau} = a\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0, t = t_0 \\ x = 0, \dfrac{dt}{dx} = 0, \qquad x = \delta, h(t - t_f) = -\lambda \dfrac{dt}{dx} \end{cases}$$



$$t_n^{(i+1)} = Fo_\Delta(t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + (1 - 2Fo_\Delta)t_n^{(i)} \quad \text{n=0,1....,N-1}$$

$$t_n^{(1)} = t_0, \quad \text{n=0,2....,N}$$

$$t_{-1}^{(i)} = t_1^{(i)}$$

$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)}(1 - 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta - 2Fo_\Delta) + 2Fo_\Delta t_{N-1}^{(i)} + 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta t_f$$

§4.4 非稳态导热问题的数值解法

四、非稳态方程的离散

4. 时间、空间步长的匹配

$$t_n^{(i+1)} = Fo_\Delta (t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}) + (1 - 2Fo_\Delta) t_n^{(i)} \quad \text{n=0,2....,N-1}$$

$$t_N^{(i+1)} = t_N^{(i)} (1 - 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta - 2Fo_\Delta) + 2Fo_\Delta t_{N-1}^{(i)} + 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta t_f$$

由物理意义，$t_n^{(i)}$ 的系数必须大于或等于零。

$$1 - 2Fo_\Delta \ge 0 \qquad Fo_\Delta = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$1 - 2Fo_\Delta \cdot Bi_\Delta - 2Fo_\Delta \ge 0 \qquad Fo_\Delta \le \frac{1}{2(1 + Bi_\Delta)}$$

作业

- 离散方程的建立(188页):4-9
- 一维稳态导热计算（188页）：4-10