

# 《传 热 学》电子课件

上海电力学院  
能源与环境工程学院  
工程热物理学科

## 第3章 非稳态热传导

- § 3.1 非稳态导热的基本概念
- § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法
- § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解
- § 3.4 半无限大物体的非稳态导热
- § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解



## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 一、非稳态导热

#### 1. 产生的条件

边界条件的改变是引起非稳态导热的原因。

#### 2. 定义

物体的温度随时间而变化的导热过程。

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

#### 3. 分类

##### ◆ 非周期性非稳态导热（瞬态非稳态导热）

物体温度随时间推移逐渐趋近恒定值

##### ◆ 周期性非稳态导热

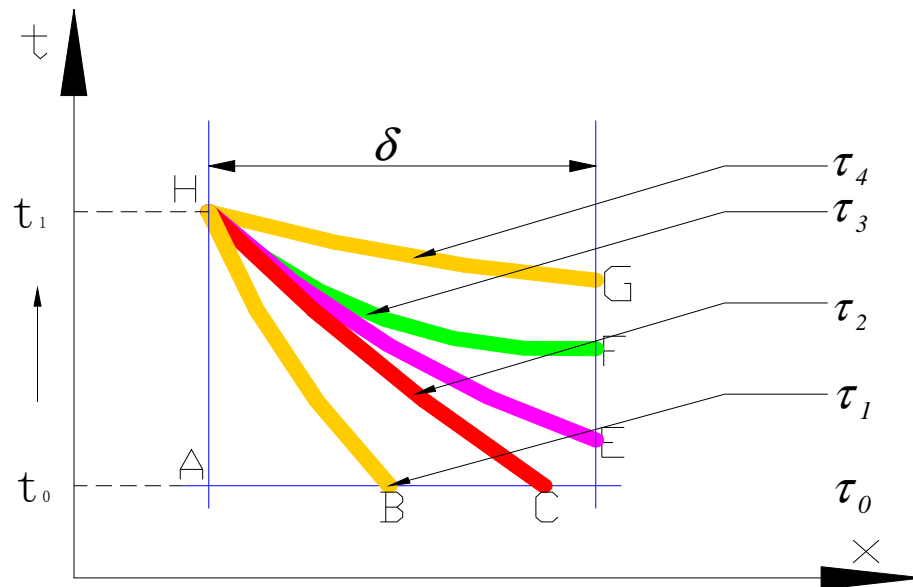
物体温度随时间周期性的变化



## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 一、非稳态导热

#### 4. 非稳态导热过程分析



## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 一、非稳态导热

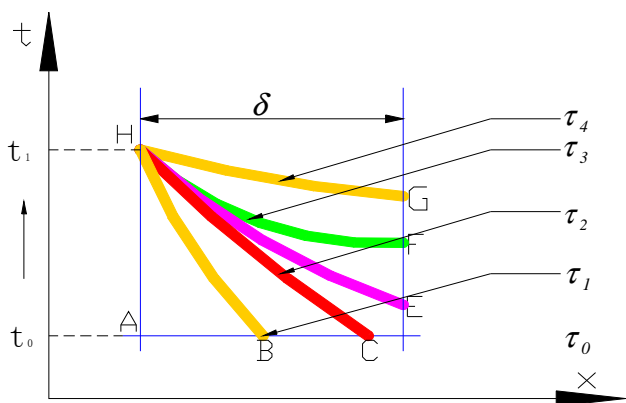
#### 5. 非稳态导热过程的两个阶段

导热过程的三个阶段:

非正规状况阶段（起始阶段）、正规状况阶段、新的稳态

非正规状况阶段: 温度分布主要受初始温度分布控制

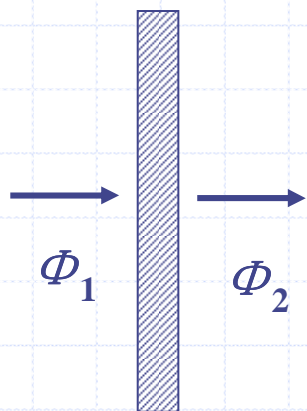
正规状况阶段: 温度分布主要取决于边界条件及物性



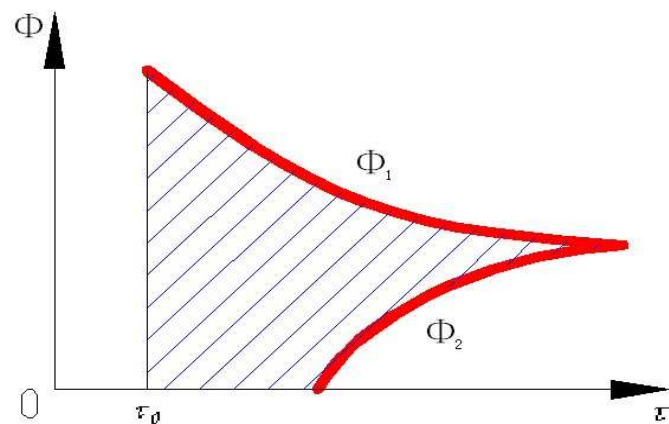
## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 一、非稳态导热

#### 6. 导热量的特点



由于物体各处本身温度的变化要积聚或消耗热量，非稳态导热过程中在与热流方向相垂直的不同截面上热流量处处不等。



$\Phi_1$  —— 板左侧导入的热流量

$\Phi_2$  —— 板右侧导出的热流量

## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 二、非稳态导热的研究内容

#### 1. 研究内容

温度分布和热流量分布随时间和空间的变化规律

$$t = f(x, y, z, \tau); \quad \Phi = f(\tau)$$

#### 2. 数学模型

$$\text{解的唯一性定律} \left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi} \\ \text{初始条件} \\ \text{边界条件} \end{array} \right.$$



## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 三、毕渥数

第三类边界条件是非稳态导热过程中常见的边界条件。

#### 1. 温度变化特性与边界条件参数的关系

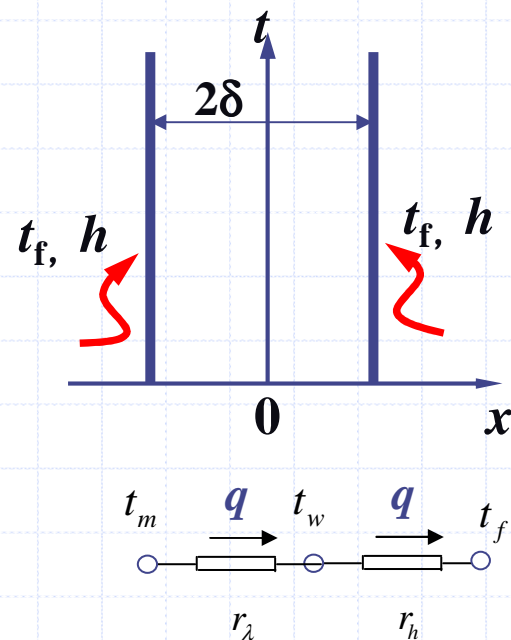
如图所示，存在两个换热环节，

##### a. 流体与物体表面的对流换热环节

外部的对流热阻  $r_h = 1/h$

##### b. 物体内部的导热环节

内部的导热热阻  $r_\lambda = \delta/\lambda$





## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 三、毕渥数

#### 1. 温度变化特性与边界条件参数的关系

(1)  $1/h \ll \delta/\lambda$

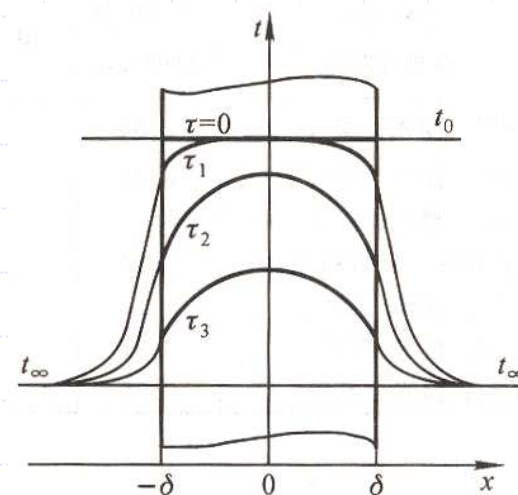
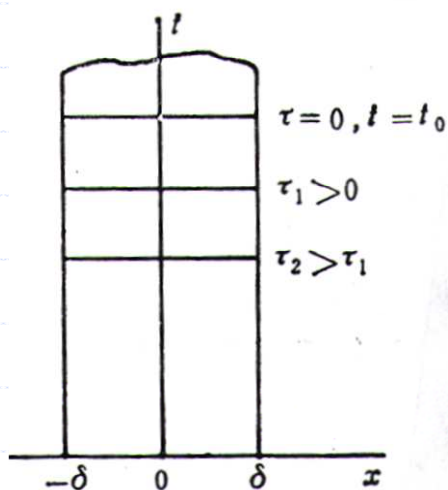
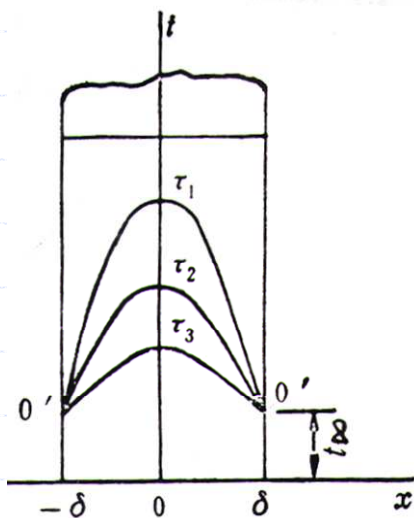
可以忽略对流换热热阻

(2)  $\delta/\lambda \ll 1/h$

可以忽略导热热阻

(3)  $\delta/\lambda$  与  $1/h$  数值相当

两个热阻均不可以忽略



## § 3.1 非稳态导热的基本概念

### 三、毕渥数

#### 2. 毕渥数

以上分析表明，两个热阻的相对大小对于物体中非稳态导热的温度场的变化具有重要影响。

$$Bi = \frac{r_\lambda}{r_h} = \frac{\delta / \lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda}$$

准则数或特征数

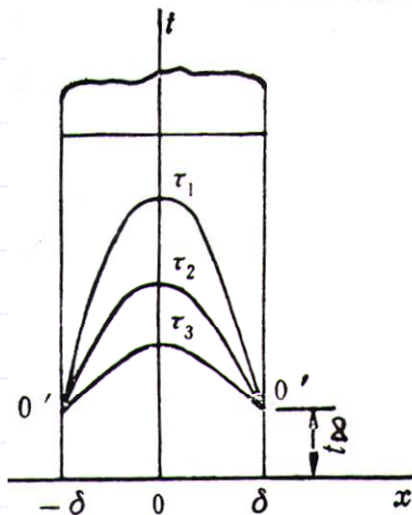
特征长度

# § 3.1 非稳态导热的基本概念

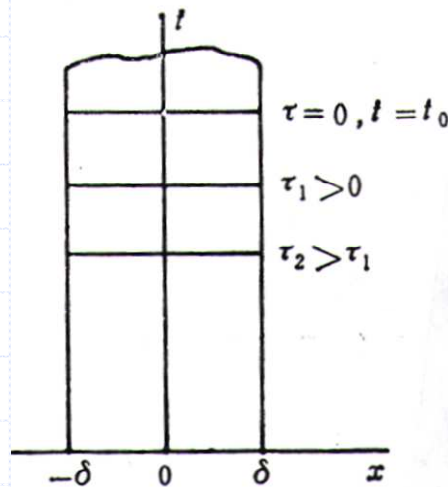
## 三、毕渥数

### 3. 毕渥数对温度分布的影响

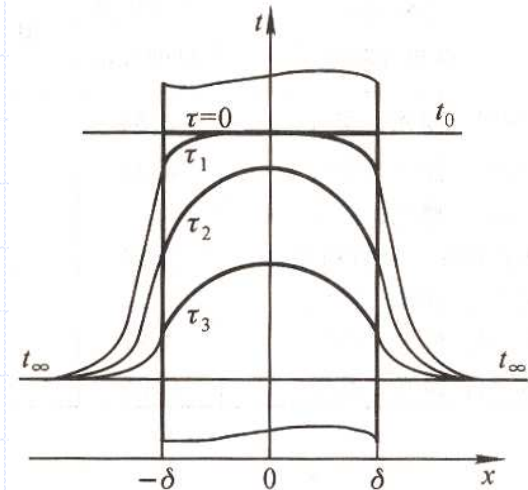
$Bi \rightarrow \infty$



$Bi \rightarrow 0$



$Bi$ 为有限值




## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 1 定义

忽略物体内部导热热阻、认为物体温度均匀一致的分析方法。


$$Bi \rightarrow \infty$$

此时，物体的温度分布只与时间有关，与空间位置无关，即物体温度均匀一致，也称为零维问题。

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

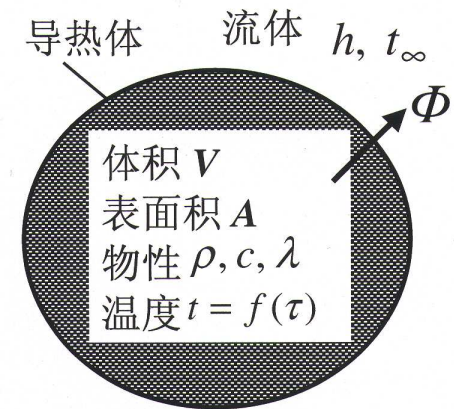
#### 2. 集中参数法的分析方法

##### (1) 问题描述

任意形状物体，参数均为已知。初始时刻物体温度为 $t_0$ ，将其突然置于温度恒为 $t_\infty < t_0$ 的流体中，传热系数 $h$ 和物体的物性参数均保持常数。求物体温度随时间的依变关系。

##### (2) 控制方程

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi} \\ \tau=0, \quad t=t_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho c \frac{dt}{d\tau} = \dot{\Phi} \\ \tau=0, \quad t=t_0 \end{cases}$$



## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 2. 集中参数法的分析方法

(2) 控制方程

$$\begin{cases} \rho c \frac{dt}{d\tau} = \dot{\Phi} \\ \tau=0, \quad t = t_0 \end{cases}$$

$\dot{\Phi}$ : 广义热源      物体边界面上的换热量需换算成体积热源

$$- \dot{\Phi} V = Ah(t - t_{\infty}) \quad \text{传出为负}$$

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \frac{-hA(t - t_{\infty})}{\rho c V} \\ \tau=0, \quad t = t_0 \end{cases}$$



## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 2. 集中参数法的分析方法

(3) 温度分布 -- 方程求解

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \frac{-hA(t-t_{\infty})}{\rho cV} \\ \tau=0, \quad t=t_0 \end{cases}$$

令  $\theta = t - t_{\infty}$  (过余温度), 则有

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{-hA\theta}{\rho cV} \\ \tau=0, \quad t=t_0 \end{cases}$$



## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 2. 集中参数法的分析方法

##### (3) 温度分布 -- 方程求解

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{-hA\theta}{\rho c V} \\ \tau=0, t=t_0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{变形} \\ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} \frac{d\theta}{\theta} = \frac{-hA}{\rho c V} d\tau \\ \tau=0, t=t_0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{积分} \\ \Rightarrow \end{array} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \frac{-hA}{\rho c V} \int_0^{\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow \ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho V c} \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t-t_{\infty}}{t_0-t_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{\rho V c} \tau}$$

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 2. 集中参数法的分析方法

##### (3) 温度分布 -- 方程求解

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V c} \tau} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = e^{(-Bi_v Fo_v)}$$

$\frac{\theta}{\theta_0}$  -- 过余温度比

指数:  $\frac{hA}{\rho c V} \tau = \frac{hV}{\lambda A} \cdot \frac{\lambda A^2}{V^2 \rho c} \tau = \frac{h(V/A)}{\lambda} \cdot \frac{a\tau}{(V/A)^2} = Bi_v \cdot Fo_v$

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 一、集中参数法

#### 2. 集中参数法的分析方法

##### (4) 物体与流体间的换热量

瞬时的换热量  $\Phi(\tau) = hA(t(\tau) - t_\infty) = hA\theta$

$$= hA\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \quad [\text{W}]$$

在时间  $0 \sim \tau$  内传给流体的总热量:

$$Q_\tau = \int_0^\tau \Phi(\tau) d\tau = \rho Vc \theta_0 (1 - e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}) \quad [\text{J}]$$

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 1. 时间常数

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} = e^{-Bi_v \cdot Fo_v}$$

方程中指数的量纲:

$$\frac{hA}{\rho Vc} = \frac{\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right] \cdot [\text{m}^2]}{\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \cdot \left[ \frac{\text{Jkg}}{\text{K}} \right] [\text{m}^3]} = \frac{w}{J} = \frac{1}{s} \quad \text{与} \quad \frac{1}{\tau} \quad \text{的量纲相同,}$$

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

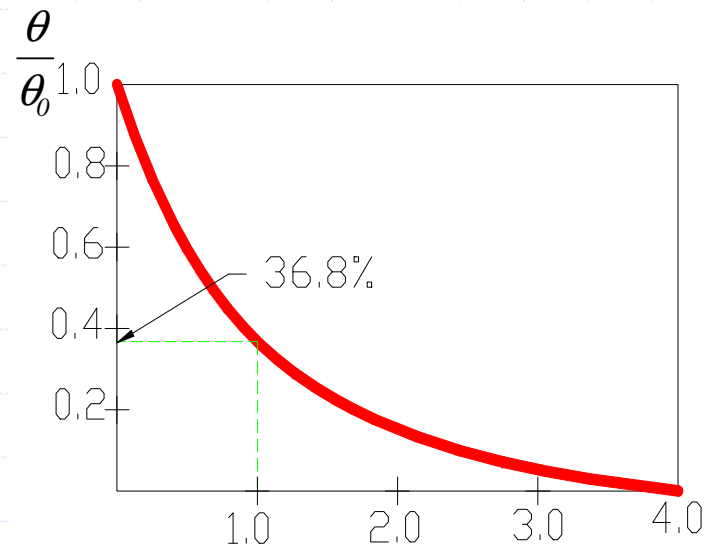
#### 1. 时间常数

当  $\tau = \frac{\rho c V}{h A}$  时,  $\tau \cdot \frac{h A}{\rho c V} = 1$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 36.8\%$$

上式表明: 当传热时间等于  $\frac{\rho V c}{h A}$  时, 物体的过余温度已经达到了初始过余温度的36.8%。

$$\tau_c = \frac{\rho V c}{h A} \quad \text{-- 时间常数}$$



## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 1. 时间常数

##### ◆ 时间常数的物理意义

时间常数越小，说明物体对流体温度变化的响应越快（测温技术所需要的）

如果导热体的热容量（ $\rho cV$ ）小、换热条件好（ $h$ 大），那么单位时间所传递的热量、导热体的温度变化快，时间常数（ $\rho cV/hA$ ）小。

##### ◆ 应用 —— 热电偶、薄膜热电阻

##### ◆ 工程上认为 $\tau=4\rho cV/hA$ 时导热体已达到热平衡状态

$$\tau = 4 \frac{\rho V c}{h A} \quad \frac{\theta}{\theta_0} = 1.83\%$$



## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 2. Bi数和Fo数的物理意义

##### ◆ 无量纲数简介

基本思想：当所研究的问题非常复杂，涉及到的参数很多，为了减少问题所涉及的参数，于是人们将这样一些参数组合起来，使之能表征一类物理现象，或物理过程的主要特征，并且没有量纲。因此，这样的无量纲数又被称为特征数，或者准则数。

例：

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu}$$

$$\text{Bi} = \frac{h\delta}{\lambda}$$

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{l^2}$$





## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 2. Bi数和Fo数的物理意义

##### ◆ Bi数

$$\text{Bi} = \frac{hl}{\lambda} = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

无量纲  
热阻

**Bi**越小，内部热阻越小，物体各点的温度越趋于均匀。

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 2. Bi数和Fo数的物理意义

##### ◆ Fo数

$$Fo = \frac{\tau}{l^2/a} = \frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到}l^2\text{面积上所需的时间}}$$

无量纲  
时间

Fo越大，热扰动就能越深入地传播到物体内部，因而，物体各点地温度就越接近周围介质的温度。

## § 3.2 零维问题的分析法-集中参数法

### 二、结果讨论

#### 3. 采用集总参数法的判断条件

采用此判据时，物体中各点过余温度的差别小于5%

$$B_{iv} = \frac{h(V/A)}{\lambda} < 0.1M$$

$M$ 是与物体几何形状有关的无量纲常数

厚为 $2\delta$ 的无限大平板  $M=1$

$$\frac{V}{A} = \frac{A\delta}{A} = \delta$$

$$B_{iv} = B_i$$

半径为 $R$ 的无限长圆柱  $M = \frac{1}{2}$

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi R \rho} = \frac{R}{2}$$

$$B_{iv} = \frac{B_i}{2}$$

半径为 $R$ 的球  $M = \frac{1}{3}$

$$\frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

$$B_{iv} = \frac{B_i}{3}$$



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

本节研究分析的非稳态问题：第三类边界条件下的无限大平板、无限长圆柱体、球体的非稳态导热。

实际问题的简化：以无限大平板为例

某平板尺寸为 $a \times b \times \delta$ ，

(1) 当 $a \gg \delta$ ,  $b \gg \delta$ 时，

平板长度、宽度边缘与四周的换热对平板内温度分布的影响较小。

(2) 当 $a, b, \delta$  相差不大时，

平板长度、宽度边缘与四周绝热良好。



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

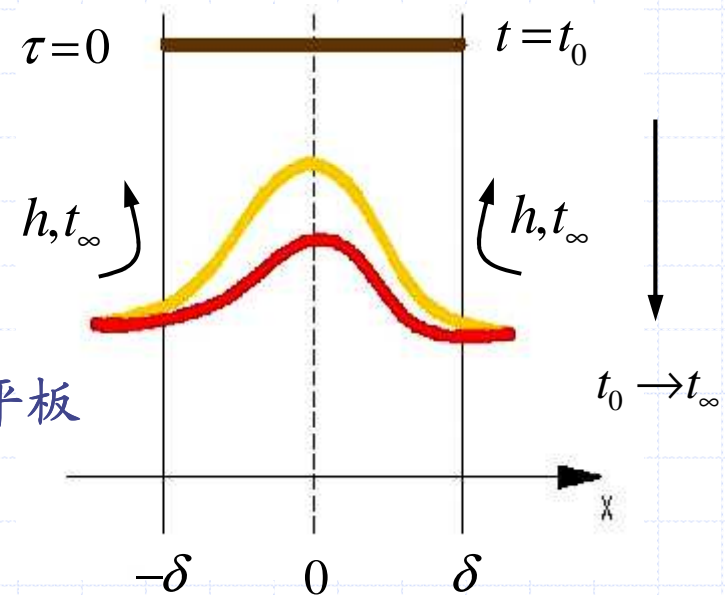
### 一、无限大平板的分析解

#### 1. 研究对象

平板为常热物性,  $h = \text{const}$

#### 2. 研究区域

由于两边对称, 故只研究厚度为  $\delta$  的半块平板



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 一、无限大平板的分析解

#### 3. 导热方程及定解条件

导热微分方程  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (0 < x < \delta, \tau > 0)$

初始条件  $t = t_0 \quad \tau = 0$

边界条件  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad x = 0$  —— (对称性)

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_\infty) \quad x = \delta$$



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 一、无限大平板的分析解

#### 4. 导热方程的求解 —— 温度随时间的变化规律

引入过余温度  $\theta(x, \tau) = t(x, \tau) - t_\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad 0 < x < \delta, \tau > 0 \\ t = t_0 \quad \tau = 0 \\ \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_\infty) \quad x = \delta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < \delta, \tau > 0 \\ \theta = \theta_0 \quad \tau = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \quad x = \delta \end{array} \right.$$



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 一、无限大平板的分析解

#### 4. 导热方程的求解 —— 温度随时间的变化规律

采用分离变量法，可得其分析解为：

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n \delta)^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \frac{\sin(\beta_n \delta) \cos\left((\beta_n \delta) \frac{x}{\delta}\right)}{\beta_n \delta + \sin(\beta_n \delta) \cos(\beta_n \delta)}$$

无穷级数

式中， $\beta_n$ 为超越方程  $\tan(\beta_n \delta) = \frac{Bi}{\beta_n \delta}$  的根，称为特征值。

经分析可知，
$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 二、非稳态导热的正规状况阶段

当  $F_0 \geq 0.2$  时，取无穷级数的首项， $\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0}$  误差小于1%

$$\text{令 } \mu_n = \beta_n \delta$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 F_0}$$

板中心温度

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-\mu_1^2 F_0}$$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 二、非稳态导热的正规状况阶段

任意 $x$ 位置处温度

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 F_0}$$

板中心温度

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-\mu_1^2 F_0}$$

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right)$$

与时间无关

当 $F_0 > 0.2$ 时,虽然 $\theta(x, \tau)$ 和 $\theta_m$ 均与时间有关,但其比值与时间不再有关,即初始条件的影响已经消失,进入正规状况阶段。

判断进入正规状况阶段的依据:  $F_0 \geq 0.2$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 二、非稳态导热的正规状况阶段

非稳态过程的热量传递

非稳态导热所能传递的最大热量:  $Q_0 = \rho c V (t_0 - t_\infty)$

0 →  $\tau$  时间段内的传递热量:  $Q = \int_V \rho c V (t - t_\infty) dV$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\int_V \rho c V (t - t_\infty) dV}{\rho c V (t_0 - t_\infty)} = \frac{1}{V} \int_V \frac{(t_0 - t_\infty) - (t - t_\infty)}{(t_0 - t_\infty)} dV = 1 - \frac{1}{V} \int_V \frac{(t - t_\infty)}{(t_0 - t_\infty)} dV = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{V} \int_V (t - t_\infty) dV = \frac{1}{V} \int_V \theta dV = \theta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-(-\mu_1^2 Fo) \frac{\sin \mu_1}{\mu_1}}$$

过余温度的体积平均值



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 三、长圆柱体及球的非稳态导热

无限大平板的结论:

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 Fo} = A \exp(-\mu_1^2 Fo) f(\mu_1 y)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} e^{-\mu_1^2 Fo} \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} = \theta_0 A \exp(-\mu_1^2 Fo) B_i$$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 三、长圆柱体及球的非稳态导热

同理，长圆柱、球可得类似的结论：

$$\frac{\theta}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 F_0) f(\mu_1 y)$$

见表3-2

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 A \exp(-\mu_1^2 F_0) B$$

无限大平板	$y = \frac{x}{\delta}$	$Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$	$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$
长圆柱体及球	$y = \frac{x}{R}$	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$	$Fo = \frac{a\tau}{R^2}$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 1. 拟合公式法

对上述公式中的 $A$ ,  $B$ ,  $\mu_1$ ,  $J_0$ 可用公式拟合

$$\mu_1^2 = \left( a + \frac{b}{B_i} \right)^{-1}$$

$$A = a + b(1 - e^{-cBi})$$

$$B = \frac{a + cB_i}{1 + bB_i}$$

$$J_0(x) = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3$$

式中常数 $a, b, c, d$ 见表3-3

$a', b', c', d'$ 见表3-4

$$\frac{\theta}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 F_0) f(\mu_1 y)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0}$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 A \exp(-\mu_1^2 F_0) B$$





## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 2. 诺模图

以无限大平板为例,  $Fo > 0.2$  时,

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = f(Fo, Bi, \frac{x}{\delta})$$

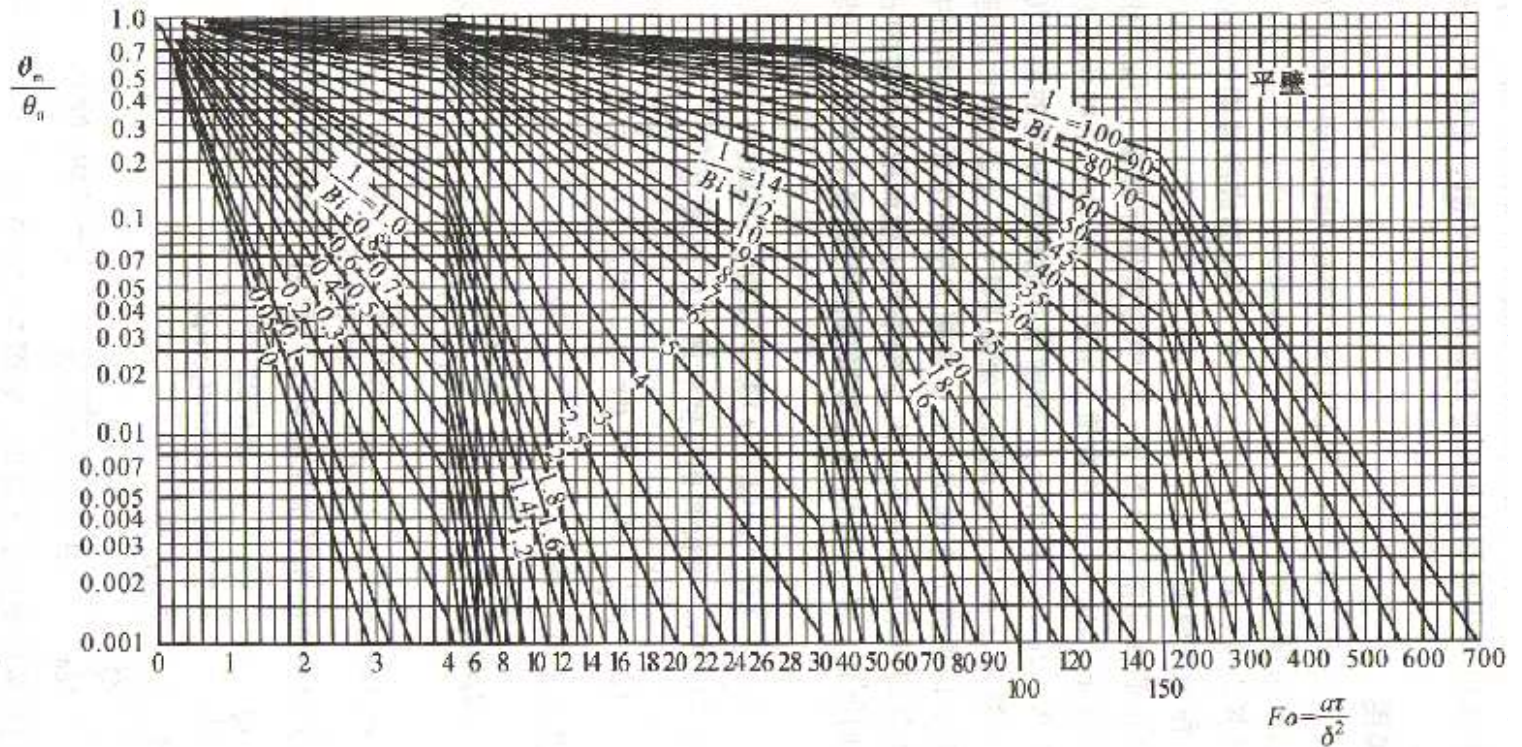
$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta}{\theta_m} = f_1(Fo, Bi) f_2(Bi, \frac{x}{\delta})$$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 2. 诺模图

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta}{\theta_m}$$
$$= f_1(Fo, Bi) f_2\left(Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$

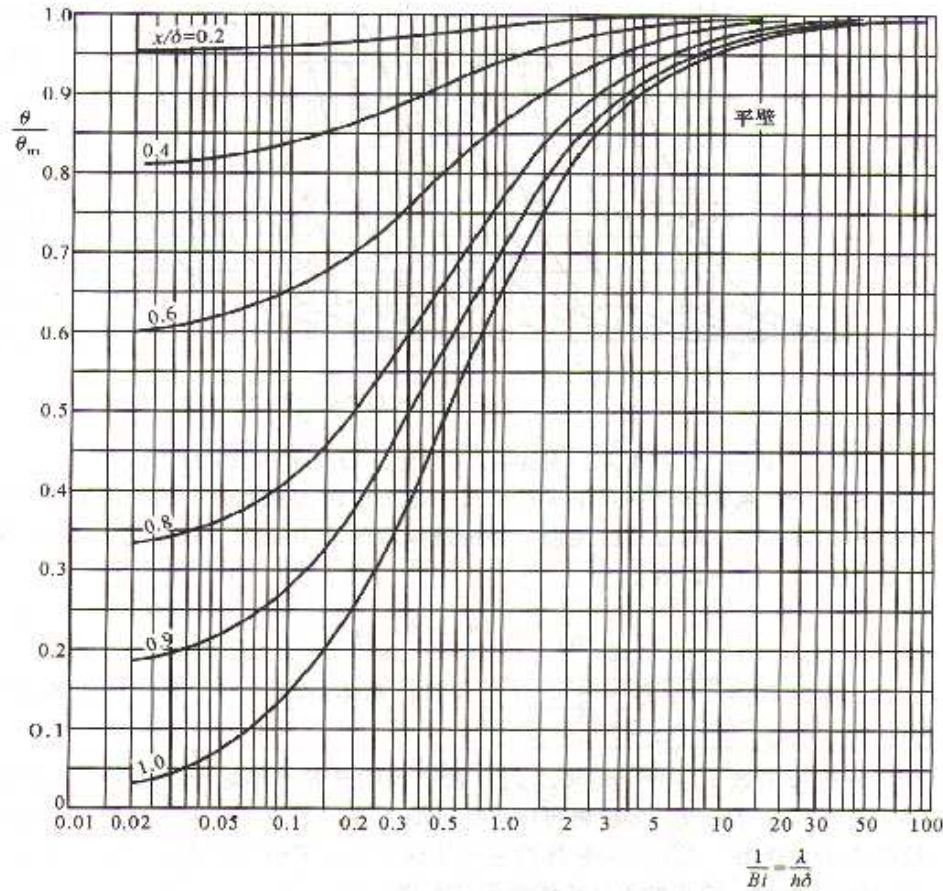


## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 2. 诺模图

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta}{\theta_m}$$
$$= f_1(Fo, Bi) f_2\left(Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$



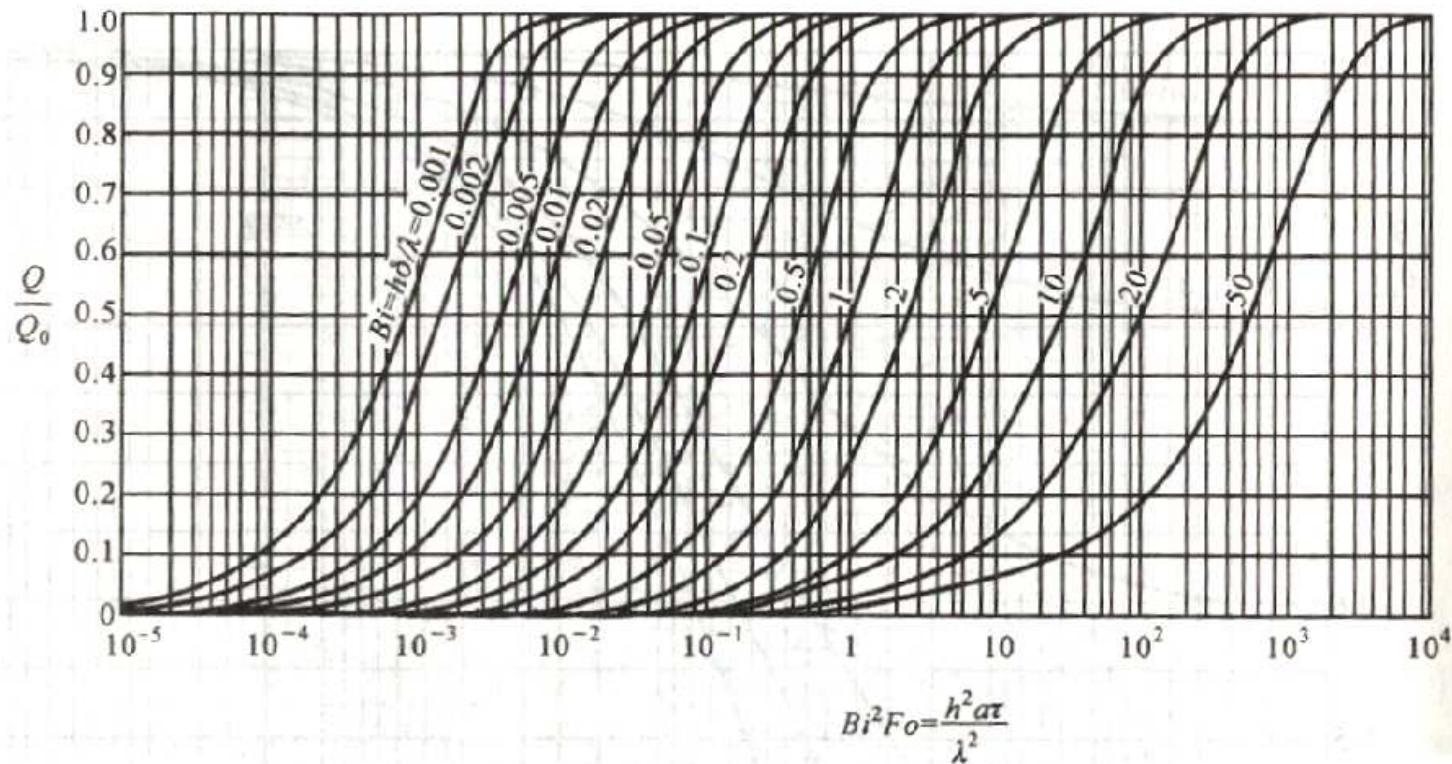


## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 2. 诺模图

$$\frac{Q}{Q_0} = f(Fo, Bi)$$



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 3. 诺模图使用方法

(1) 已知时间  $\tau$ ，求温度分布及热量

##### ◆ 温度分布

由已知条件，计算  $Fo, 1/Bi$  数，查主图得  $\theta_m / \theta_0$  }  $\Rightarrow$  求得温度分布

由  $1/Bi, x/\delta$ ，查轴图得  $\theta / \theta_m$  }  $\Rightarrow$   $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta}{\theta_m}$

##### ◆ 热量

由  $Q/Q_0$  曲线查图而得

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 四、正规状况阶段的实用计算方法

#### 3. 诺模图使用方法

(2) 已知温度分布，求时间  $\tau$

◆ 时间

由  $1/Bi$ ,  $x/\delta$ , 查轴图得  $\theta/\theta_m$

由已知  $\frac{\theta}{\theta_0} \rightarrow \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta/\theta_0}{\theta/\theta_m}$

由  $1/Bi$

查主图，得  $Fo = \frac{\alpha\tau}{l^2}$

}  $\Rightarrow$  计算得时间

◆ 热量

由  $Q/Q_0$  曲线查图而得



## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 五、分析解应用范围的推广和讨论

#### 1. 推广

◆ 加热问题 → 冷却问题

◆ 厚  $2\delta$  的平板 → 一侧绝热，一侧为第三类边界条件的厚为  $\delta$  的平板

◆  $h \rightarrow \infty$ ,  $t(\delta) = t_\infty$ , 即第一类边界条件

#### 2. $Fo$ 数对温度场的影响

$$\left. \begin{array}{l} \tau \uparrow \Rightarrow Fo \uparrow \\ \tau \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow Fo \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow$$

## § 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

### 五、分析解应用范围的推广和讨论

#### 3. $Bi$ 数对温度场的影响

◆ 相同 $Fo$ 数下,  $Bi$ 数大, 即换热条件强, 物体中心温度越迅速地接近周围环境温度。

◆  $Bi$ 数的大小, 决定了物体中温度的扯平程度

$Bi$ 小, 导热热阻小, 温度越容易扯平

$$Bi < 0.1 \quad \frac{\theta}{\theta_m} > 95\%$$

## § 3.4 半无限大物体的非稳态导热

### 一、半无限大物体

- ◆ 从 $x=0$ 的界面开始可以向正的 $x$ 方向及其他两个坐标 $(y, z)$ 方向无限延伸。
- ◆ 现实世界中不存在半无限大物体。
- ◆ 在研究物体中非稳态导热的初始阶段，可能将实际物体当作半无限大平板处理

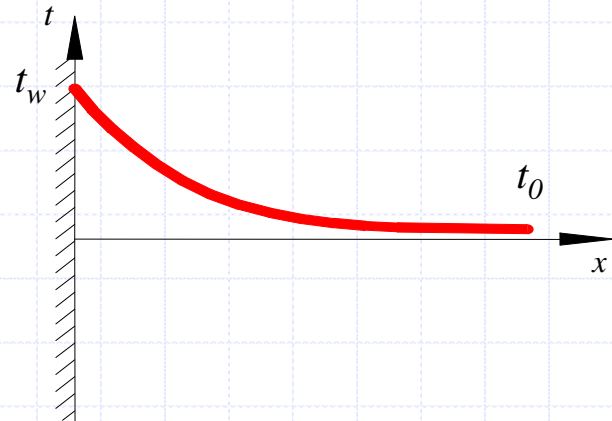


## § 3.4 半无限大物体的非稳态导热

### 二、半无限大物体非稳态导热的数学描写及求解

#### 1. 数学描写

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\ \tau = 0 \quad t(x, 0) = t_0 \\ x = 0 \quad t(0, \tau) = t_w \\ x \rightarrow \infty \quad t(x, \tau) = t_0 \end{array} \right.$$



## § 3.4 半无限大物体的非稳态导热

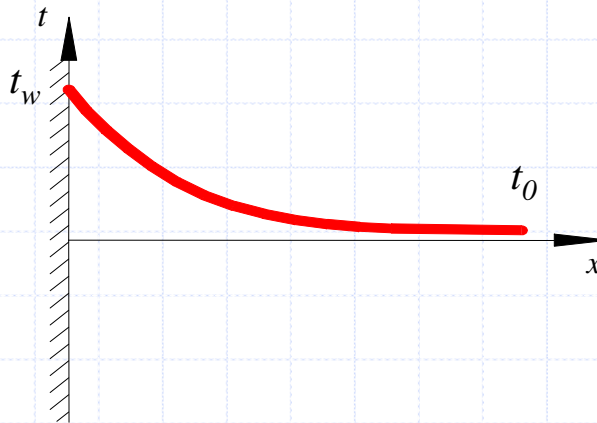
### 二、半无限大物体非稳态导热的数学描写及求解

#### 2. 求解结果

引入过余温度  $\theta = t - t_w$

求解结果  $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-y^2} dy = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}\right)$

误差函数



## § 3.4 半无限大物体的非稳态导热

### 二、半无限大物体非稳态导热的数学描写及求解

#### 3. 结果讨论

◆ 从几何位置上来说:

由误差函数的性质,  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \geq 2$  时,  $\frac{\theta}{\theta_0} \geq 0.9953$

即  $x$  处的温度仍然等于初始温度。

故,  $x \geq 4\sqrt{a\tau}$  时在  $\tau$  时刻前可以看作半无限大物体。

◆ 从时间上来说:

$\tau < \frac{x^2}{16a}$  时  $x$  处的温度可以认为仍然是  $t_0$ ,  $\frac{x^2}{16a}$  称为惰性时间



## § 3.4 半无限大物体的非稳态导热

### 二、半无限大物体非稳态导热的数学描写及求解

#### 3. 结果讨论

◆ 表面上的吸热量或放热量

$$q_w = \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}}$$

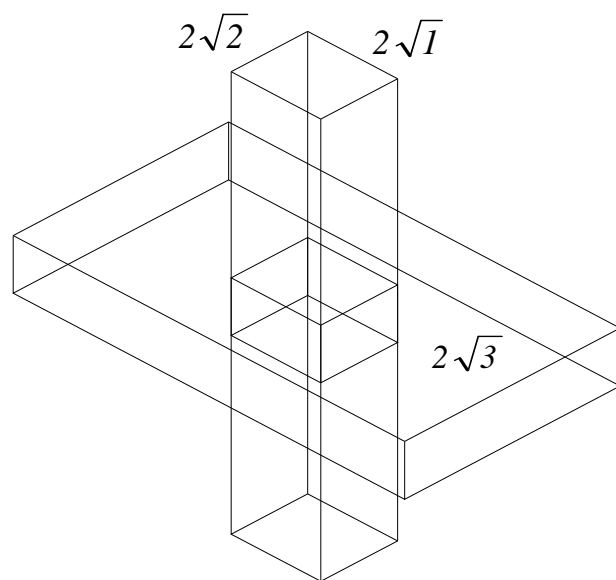
$$Q = A \int_0^\tau q_w dz = 2A \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sqrt{\rho c \lambda} \cdot (t_w - t_0)$$

◆ 对有限大小的物体，半无限大的概念一般只适用与非导热的初始阶段，当物体表面的热扰动已深入物体内部时需要用前面各节点方法

## § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

### 一、典型的二维、三维几何形状

#### 1. 无限长方柱体

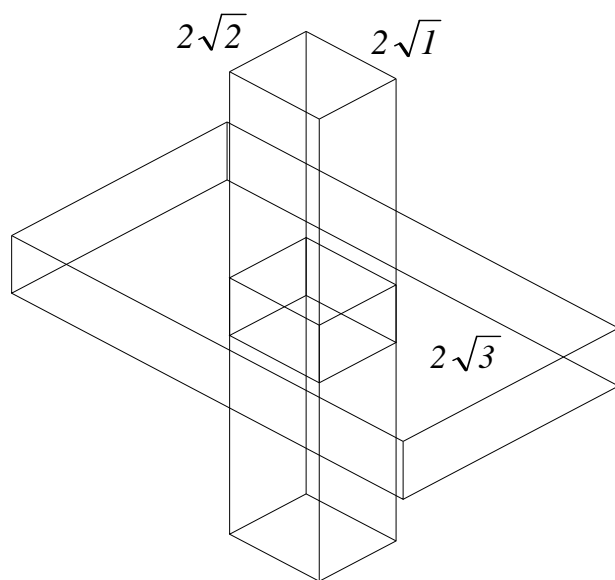


两个无限大平板相互垂直切割而成

## § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

### 一、典型的二维、三维几何形状

#### 2. 短方柱体

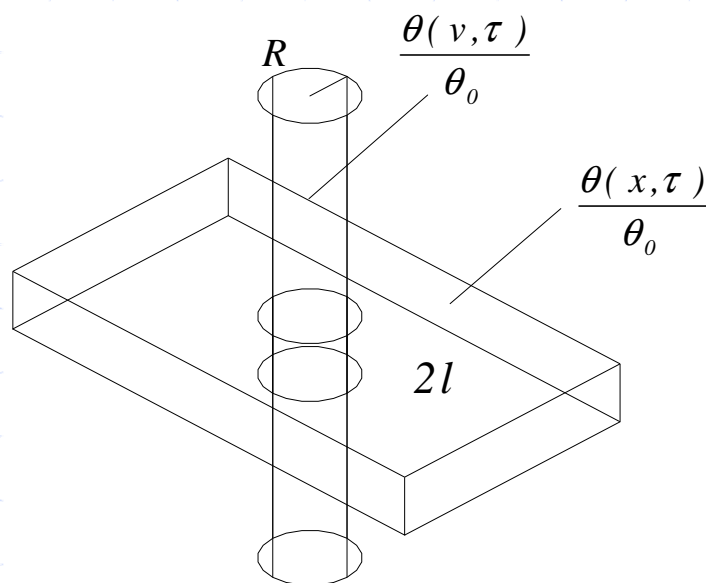


三个无限大平板相互垂直切割而成

## § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

### 一、典型的二维、三维几何形状

#### 3. 短园柱体



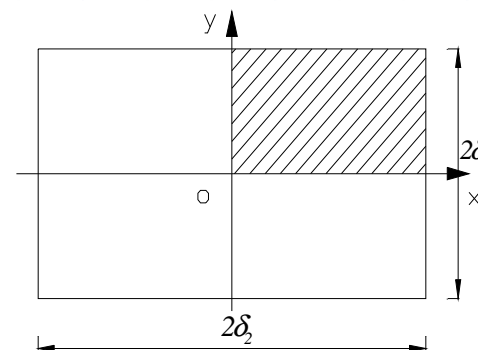
一个无限大平板和长圆柱相互垂直切割而成

# § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

## 二、长方柱体的非稳态导热的求解

考察一无限长方柱体 (其截面为的长方形)

引入  $\Theta = \frac{t(x, y, \tau) - t_f}{t_0 - t_f} = \frac{\theta}{\theta_0}$



$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right)$$

$$\tau = 0 \quad \Theta = 1$$

$$x = \delta_1 \quad h\Theta(\delta_1, y, \tau) = -\lambda \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial x}$$

$$y = \delta_2 \quad h\Theta(x, \delta_2, \tau) = -\lambda \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial y}$$

$$x = 0 \quad \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad y = 0 \quad \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

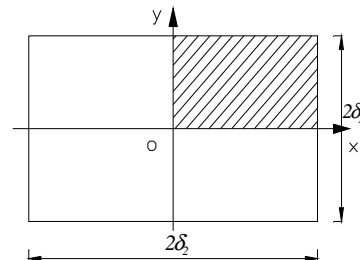
方程的解

$$\Theta(x, y, \tau) = \Theta(x, \tau) \cdot \Theta(y, \tau)$$



## § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

### 二、长方柱体的非稳态导热的求解



证明:  $\Theta(x, y, \tau) = \Theta(x, \tau) \cdot \Theta(y, \tau)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta_x}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} \\ \tau = 0 \quad \Theta_x(x, 0) = 1 \\ x = 0 \quad \frac{\partial \Theta(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ x = \delta_2 \quad -\lambda \frac{\partial \Theta(x, \tau)}{\partial x} = h\Theta(\delta, \tau) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta_y}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \\ \tau = 0 \quad \Theta_y(y, 0) = 1 \\ y = 0 \quad \frac{\partial \Theta(y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \\ y = \delta_2 \quad -\lambda \frac{\partial \Theta(y, \tau)}{\partial y} = h\Theta(\delta_2, \tau) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial (\Theta_x \cdot \Theta_y)}{\partial \tau} = \Theta_y \frac{\partial (\Theta_x)}{\partial \tau} + \Theta_x \frac{\partial (\Theta_y)}{\partial \tau} = \Theta_y \left( a \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} \right) + \Theta_x \left( a \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \right) \\ &= a \left( \Theta_y \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} + \Theta_x \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \right) = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$



## § 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

### 二、长方柱体的非稳态导热的求解

结论:

无限长方柱体导热微分方程的解是相应二个一维问题的解的乘积。

### 三、多维非稳态导热的乘积解法

对于长方柱体、短方柱体、短圆柱体等二维、三维的非稳态导热问题，都可以用相应二个或三个一维问题的解的乘积来表示其温度分布。

适用范围:

- (1) 一侧绝热，另一侧三类
- (2) 两侧均为一类
- (3) 初始温度分布必须为常数



# 作业

- ◆ 集中参数法分析(152页):3-8、3-13、3-14
- ◆ 一维非稳态导热 (154页) : 3-23
- ◆ 一维圆柱 (155页) : 3-34
- ◆ 半无限大物体 (157) : 3-50
- ◆ 多维非稳态导热 (158页) : 3-57