DOI:10.13876/J. cnki. ydnse. 2017. 04. 084

n 次积分 C－余弦算子函数拓扑

毕　伟

(延安大学 学术期刊中心,陕西 延安 716000)

摘　要: 利用 n 次积分 C－余弦算子函数的概念,提出一个新的局部凸向量拓扑,并对其基本性质进行研究。

关键词: n 次积分 C－余弦算子函数;局部凸向量拓扑;生成元;n 次积分 C－余弦算子函数拓扑

中图分类号: O177.31　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004－602X(2017)04－0084－03

1　预备知识

设$(X,\|\cdot\|)$为 Banach 空间,$B(X)$表示 X 上的有界线性算子的全体,A 是 X 中的线性算子,$D(A)$,$R(\lambda^2,A)$,$\rho(A)$分别表示 A 的定义域、预解式以及预解集。

定义 1.1[1]　设 $n\in\mathbf{N}$,$C\in B(X)$是一个单射,称强连续算子族$\{S(t),t\geqslant0\}\subset B(X)$是$(X,\|\cdot\|)$上的 n 次积分 C－余弦算子函数,如果

(1)$CS(t)=S(t)C,t\geqslant0;S(0)=0$;

(2)$2S(t)S(s)x=\frac{1}{(n-1)!}\{(-1)^n\int_0^{|t-s|}(|t-s|-r)^{n-1}S(r)Cx\mathrm{d}r+(\int_0^{t+s}-\int_0^t-\int_0^s)(t+s-r)^{n-1}S(r)Cx\mathrm{d}r+\int_0^t(s-t+r)^{n-1}S(r)Cx\mathrm{d}r+\int_0^s(t-s+r)^{n-1}S(r)Cx\mathrm{d}r\}$。

又称$\{S(t),t\geqslant0\}$是非退化的,如果 $S(t)x=0$ $(t\geqslant0)$蕴涵 $x=0$。

非退化的 n 次积分 C－余弦算子函数$\{S(t),t\geqslant0\}$的无穷小生成元 A 定义如下:

$$D(A)=\{x\in X:\exists y\in X,\text{满足 }S(t)x-\frac{t^n}{n!}Cx=\int_0^t(t-s)S(s)y\mathrm{d}s,t\geqslant0\},Ax=y,$$

如果 $S(t)x-\frac{t^n}{n!}Cx=\int_0^t(t-s)S(s)y\mathrm{d}s,t\geqslant0$。

A 的 C 预解式满足下面关系:

$$\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx=\lambda^{1-n}(\lambda^2I-A)^{-1}Cx=\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\mathrm{d}t,x\in X,\lambda^2\in\rho_c(A),$$

其中$\rho_c(A)=\{\lambda^2:\lambda^2I-A$ 为单射且 $R(C)\subset R(\lambda^2I-A)\}$,$I$ 是 X 上的单位算子。

2　主要结果

$\forall\lambda>\omega$(常数 $\omega\geqslant0$),令 $P_\lambda(x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|$,$x\in X$,则利用 n 次积分 C－余弦算子函数预解式的定义,$\forall x,y\in X$ 及 $\lambda>\omega$ 有

(1)$P_\lambda(x)\geqslant0$;

(2)$P_\lambda(x+y)\leqslant P_\lambda(x)+P_\lambda(y)$;

(3)$P_\lambda(\alpha x)=\alpha P_\lambda(x),\alpha\geqslant0$。

事实上,$P_\lambda(x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|\geqslant0$;

$$P_\lambda(x+y)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)C(x+y)\|=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx+\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cy\|\leqslant\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|+\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cy\|=P_\lambda(x)+P_\lambda(y);$$

$$P_\lambda(\alpha x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)C(\alpha x)\|=\|\alpha\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|=\alpha\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|=\alpha P_\lambda(x)。$$

即 $P_\lambda(x)$是 X 上的一个半范数,从而由半范数

收稿日期: 2017－06－09

作者简介: 毕　伟(1986—),男,陕西米脂人,延安大学编辑。

族 $S=\{P_\lambda:\lambda>\omega\}$ 可以诱导出一个局部凸向量拓扑，记为 τ。

定义 2.1　由上述半范数族 $S=\{P_\lambda:\lambda>\omega\}$ 诱导出的 X 上的局部凸向量拓扑，称为 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑，相应的局部凸线性拓扑空间记为 (X,τ)。

引理 2.1[2]　设 E 是线性空间，A_1,B_1 是 E 上的两族半范数，那么由 A_1 确定的拓扑弱于由 B_1 确定的拓扑的充要条件是：对于每个 $q\in A_1$，必存在 $p_1,p_2,\cdots,p_m\in B_1$ 以及正数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得对一切 $x\in E$ 下式成立：

$$q(x)\leqslant c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+\cdots+c_mp_m(x)。$$

定理 2.1　X 上的 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑弱于由范数所诱导的局部凸向量拓扑。

证明　因为 $\forall\lambda>\omega$ 及 $x\in X$，有：

$$P_\lambda(x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|\leqslant$$
$$\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)C\|\cdot\|x\|,$$

再根据引理 2.1，得证。

定义 2.2　在一个局部凸线性拓扑空间 X 中，如果对任意的 Cauchy 序列 $\{x_n\}$，$\{\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_n\}$ $(\lambda>\omega)$ 都收敛，则称 X 是 n 次积分 C－余弦算子函数完备的。

定理 2.2　局部凸线性拓扑空间 (X,τ) 是 n 次积分 C－余弦算子函数完备的。

证明　设 $\{x_n\}$ 是 (X,τ) 中的任意 Cauchy 序列，那么对于任意连续半范数 $q(x)$ 及 $\varepsilon>0$，集合 $U=\{x:q(x)<\varepsilon\}$ 构成零的一个邻域，从而必存在自然数 N，使得当 $n,m>N$ 时，有 $(x_n-x_m)\in U$，即 $q(x_n-x_m)<\varepsilon$，特别地，$\forall P_\lambda(x)\in S$ 有：

$$P_\lambda(x_n-x_m)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)C(x_n-x_m)\|=$$
$$\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_n-\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_m\|=$$
$$\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x_n\mathrm{d}t-\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x_m\mathrm{d}t\right\|<\varepsilon。$$

可知 $\{\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_n\}$ $(\lambda>\omega)$ 是 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 序列，从而 $\{\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_n\}$ $(\lambda>\omega)$ 必收敛。再由定理 2.1 可得 $\{\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx_n\}$ $(\lambda>\omega)$ 也是 (X,τ) 中的收敛列，即 (X,τ) 是 n 次积分 C－余弦算子函数完备的。

定理 2.3　设 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 是非退化的 n 次积分 C－余弦算子函数，则 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 诱导出的 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑 τ 是分离的。

证明　因为 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 是非退化的，即若 $\forall t$ 有 $S(t)x=0$，那么必有 $x=0$，所以 $\forall x\neq0$ 有：

$$\sup_{\alpha>\omega}P_\alpha(x)=\sup_{\alpha>\omega}\|\lambda^{1-n}R(\alpha^2,A)Cx\|>0。$$

从而 $\forall x\neq y$，即 $x-y\neq0$，必存在一个 $\alpha\in(\omega,+\infty)$ 使得 $P_\alpha(x)=3d>0$，令 $V=\{x:P_\alpha(x)\leqslant1\}$，则 x 的邻域 $x+\mathrm{d}V$ 与 y 的邻域 $y+\mathrm{d}V$ 互不相交，即 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑 τ 是分离的。

定理 2.4　设 $\lambda,\mu>\omega$ 且 $\lambda^2,\mu^2\in\rho(A)$，则由半范数 $P_\lambda(x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|$ 诱导出的 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑与由半范数 $P_\mu(x)=\|\lambda^{1-n}R(\mu^2,A)Cx\|$ 诱导出的 n 次积分 C－余弦算子函数拓扑等价。

证明　因为根据预解方程的定义，$\forall\lambda^2,\mu^2\in\rho(A)$ 有：

$$R(\mu^2,A)-R(\lambda^2,A)=$$
$$(\lambda^2-\mu^2)R(\mu^2,A)R(\lambda^2,A)。$$

则 $\forall x\in X$ 有：

$$P_\lambda(x)=\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|=$$
$$\|\lambda^{1-n}R(\mu^2,A)[I-(\mu^2-\lambda^2)R(\mu^2,A)]^{-1}Cx\|\leqslant$$
$$\|[I-(\mu^2-\lambda^2)R(\mu^2,A)]^{-1}\|\cdot\|\lambda^{1-n}R(\mu^2,A)Cx\|=$$
$$\|[I-(\mu^2-\lambda^2)R(\mu^2,A)]^{-1}\|\cdot P_\mu(x)。$$

同理，根据预解方程，$\forall\lambda^2,\mu^2\in\rho(A)$ 有：

$$R(\lambda^2,A)-R(\mu^2,A)=$$
$$(\mu^2-\lambda^2)R(\lambda^2,A)R(\mu^2,A)。$$

则 $\forall x\in X$ 有：

$$P_\mu(x)=\|\lambda^{1-n}R(\mu^2,A)Cx\|=$$
$$\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)[I-(\lambda^2-\mu^2)R(\lambda^2,A)]^{-1}Cx\|\leqslant$$
$$\|[I-(\lambda^2-\mu^2)R(\lambda^2,A)]^{-1}\|\cdot\|\lambda^{1-n}R(\lambda^2,A)Cx\|=$$
$$\|[I-(\lambda^2-\mu^2)R(\lambda^2,A)]^{-1}\|\cdot P_\lambda(x)。$$

再根据引理 2.1，定理得证。

参考文献：

[1] Shaw S Y, Li Y C. On n－times integrated C－cosine functions[J]. Evolution Equation, 1994, 4(3): 393－406.

[2] 夏道行，杨亚力．线性拓扑空间引论[M]．上海：上海科学技术出版社，1986.

［责任编辑　贺小林］

n – Times Integrated *C* – cosine Operator Functions Topological

BI WEI

(Academic Journal Center of Yan an University, Yan an 716000, China)

Abstract: By using the concept of n – times integrated C – cosine operator functions, a new locally convex vector topological was introduced, and some propositions of it were given.

Key words: n – times integrated C – cosine operator functions; locally convex vector topological; generator; n – times integrated C – cosine operator functions topological

(上接第 83 页)

Influence of Rainfall Infiltration on Shear Strength of Loess in Yan′an Area

ZHANG XIONG[1], LIU Yong-xing[2], LIU Qing-yuan[1]

(1. College of Architectural Engineering, Yan′an University, Yan′an 716000, China;
2. Infrastructure Management Department, Yan′an University, Yan′an 716000, China)

Abstract: The soil in Yan′an area for collapsible loess, when the occurrence of heavy rainfall, prone to landslides, collapse, cave collapse and other disasters, constitute a huge security risks. Through outdoor experiment, studied the variation of infiltration depth with the infiltration time in different rainfall conditions, and the changes of water content with depth; by indoor direct shear test on the influence of water content and dry density on the cohesion and internal friction angle. The results show that the rainfall has a great influence on the shallow soil water content, and has little influence on the deep soil, the infiltration depth increases with the increase of infiltration time; the shear strength of loess decreases with the increase of water content, and the faster the dry density decreases.

Key words: rainfall infiltration; infiltration depth; cohesion; internal friction angle; water content