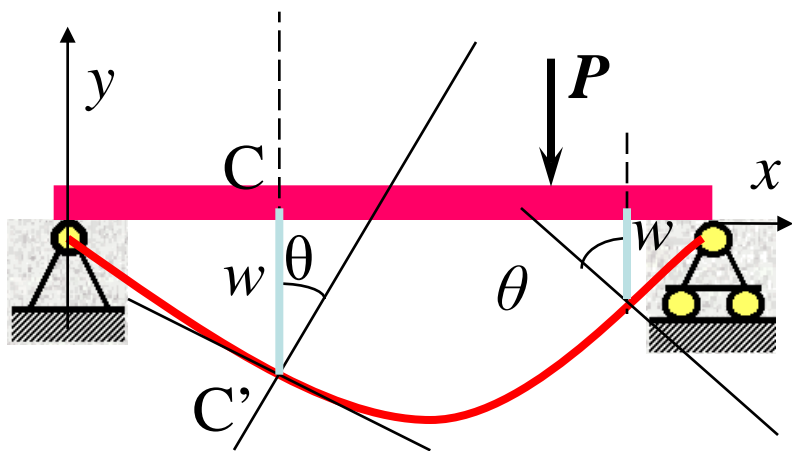


16. 梁的挠曲线近似微分方程



一、度量梁弯曲变形的两个基本位移量

1. 挠度：横截面形心沿垂直于轴线方向的线位移。用 w 表示。
与 y 同向为正，反之为负。小变形下，略去水平位移。



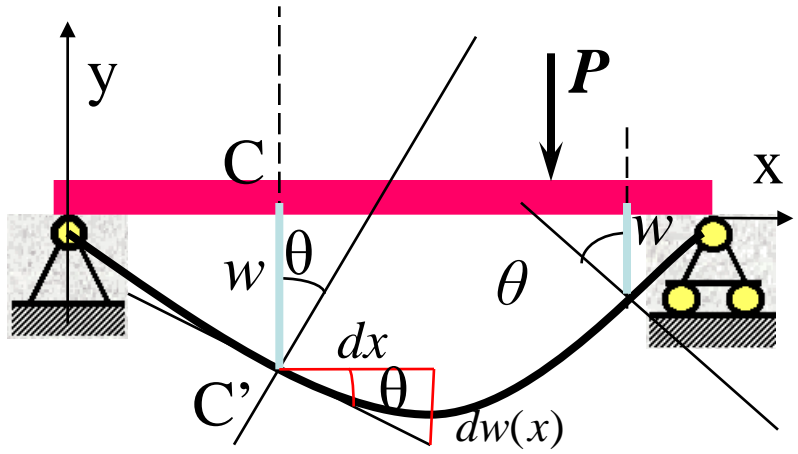
2. 转角：横截面绕其中性轴转动的角度。用 θ 表示，**逆时针转动为正，反之为负。**

二、挠曲线：变形后，轴线变为光滑的弹性曲线，该曲线称为挠曲线。

挠曲线方程为： $w = w(x)$



二、挠曲线：变形后，轴线变为光滑的弹性曲线，该曲线称为挠曲线。



挠曲线方程为： $w = w(x)$

转角是截面位置的连续函数，称为转角方程

$$\theta = \theta(x)$$

三、转角与挠曲线的关系：小变形

$$\tan \theta = \frac{dw(x)}{dx} = w' \approx \theta(x) \quad \theta = \arctan\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)$$



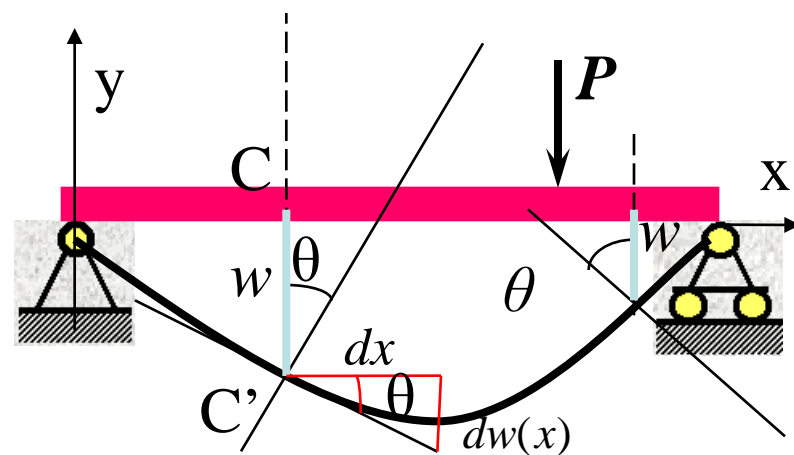
三、挠曲线近似微分方程

$$\frac{1}{\rho dS} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dS} = \frac{d(\arctg \frac{dw}{dx})}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dw)^2}}$$

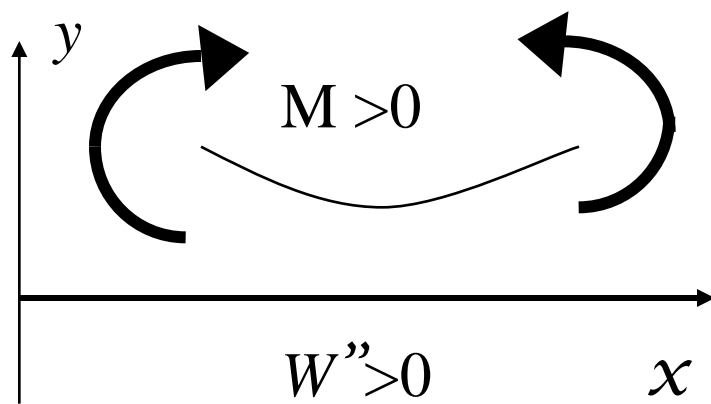
$$= \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{1 + (\frac{dw}{dx})^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1 + (\frac{dw}{dx})^2}}$$

$$\frac{dw}{dx} = \theta(x) = w' \quad \frac{d^2w}{dx^2} = w''$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{1 + w'^2} \cdot \frac{l}{\sqrt{1 + w'^2}} = \pm \frac{w''}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

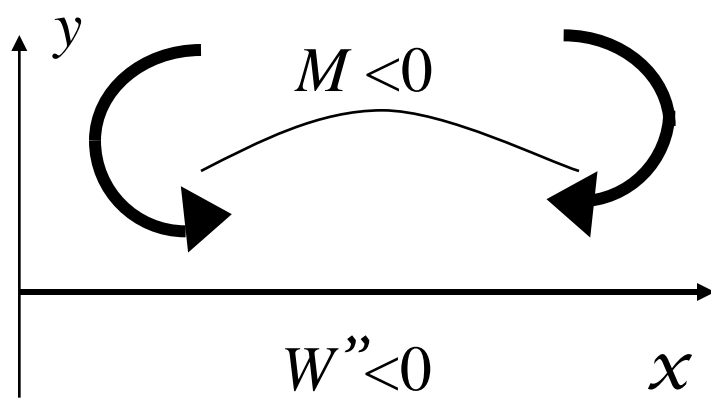


注意到 $w'^2 = \theta^2$ 为高阶小量 \therefore 小变形时: $\frac{1}{\rho} \approx \pm w''$



$$\frac{l}{\rho} \approx \pm w''$$

$$\text{又: } \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$



$$\therefore w''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

以上微分方程忽略了剪力的影响，且略去高阶微量，称为**挠曲线近似微分方程**。



对于等截面直梁，挠曲线近似微分方程可写成如下形式：

$$I_Z E w''(x) = M(x)$$

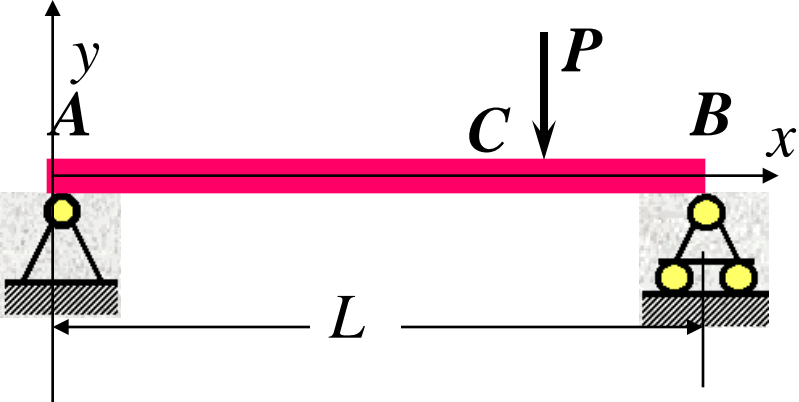
四、求解挠曲线方程（弹性曲线）

1. 微分方程的积分

$$EI_Z w''(x) = M(x)$$

$$EI_Z w'(x) = EI_Z \theta(x) = \int M(x) dx + C$$

$$EI_Z w(x) = \int \left[\int M(x) dx \right] dx + Cx + D$$



2. 位移边界条件

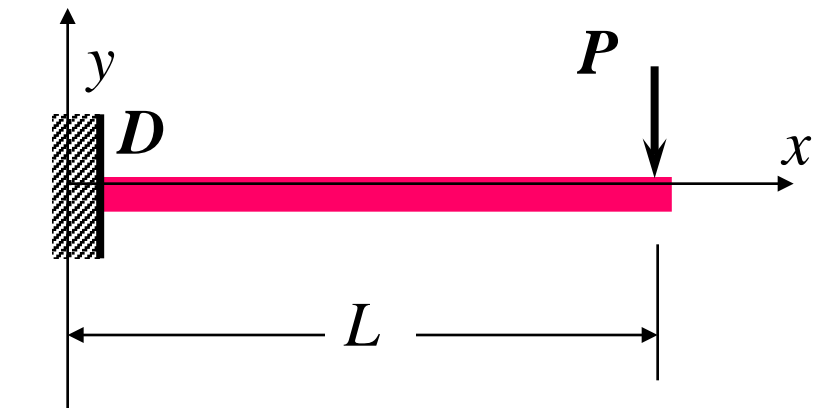


① 各种约束相应的位移边界条件:

固定铰链支座和辊轴支座

$$x = 0 \quad w_A = 0$$

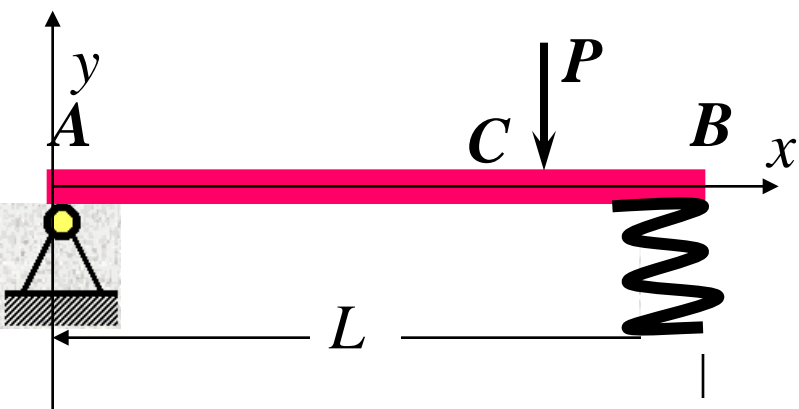
$$x = L \quad w_B = 0$$



平面固定端约束

$$x = 0 \quad w_D = 0$$

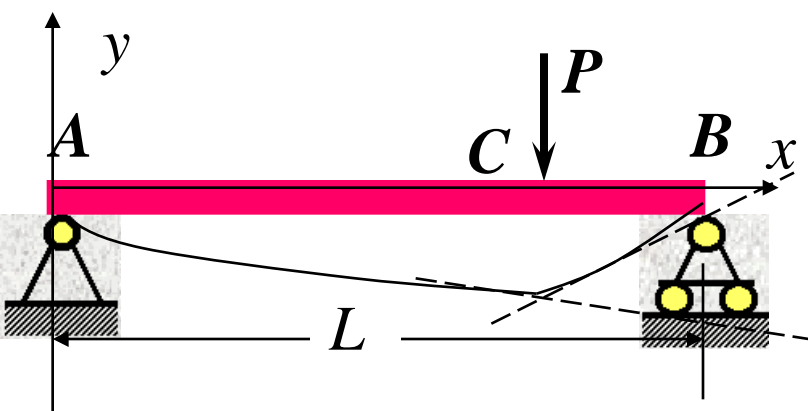
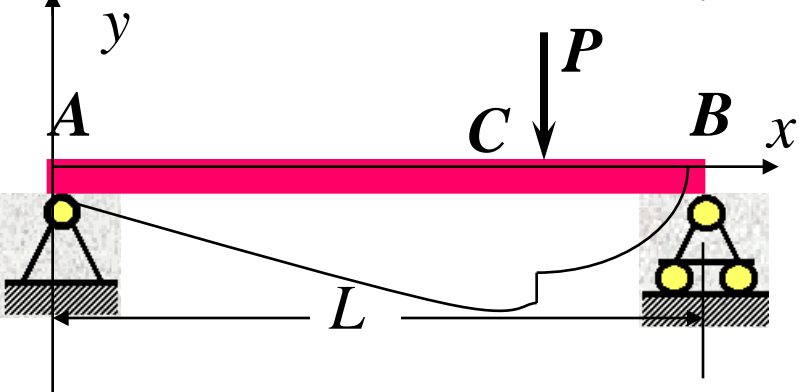
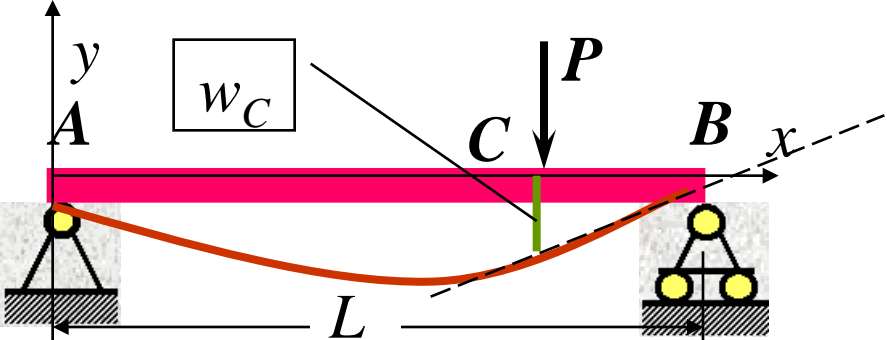
$$x = 0 \quad \theta_D = 0$$



弹性地基

$$x = 0 \quad w_A = 0$$

$$x = L \quad w_B = -\lambda = -\frac{N_B}{C}$$



② 挠曲线连续条件:

挠曲线函数左右极限存在且相等
即:

$$w_{C左} = w_{C右}$$

同一截面挠度的唯一性

③ 挠曲线光滑条件:

$$\theta_{C左} = \theta_{C右}$$

挠曲线有连续的一阶导函数,
即: 转角方程也是连续函数,
挠曲线上没有尖点。



讨论:

- ①适用于小变形情况下、线弹性材料、细长构件的平面弯曲。
- ②可应用于求解承受各种载荷的等截面或变截面梁的位移、转角。
- ③积分常数由挠曲线变形的几何相容条件（边界条件、连续光滑条件）确定。
- ④优点：使用范围广，直接求出较精确； 缺点：计算较繁。