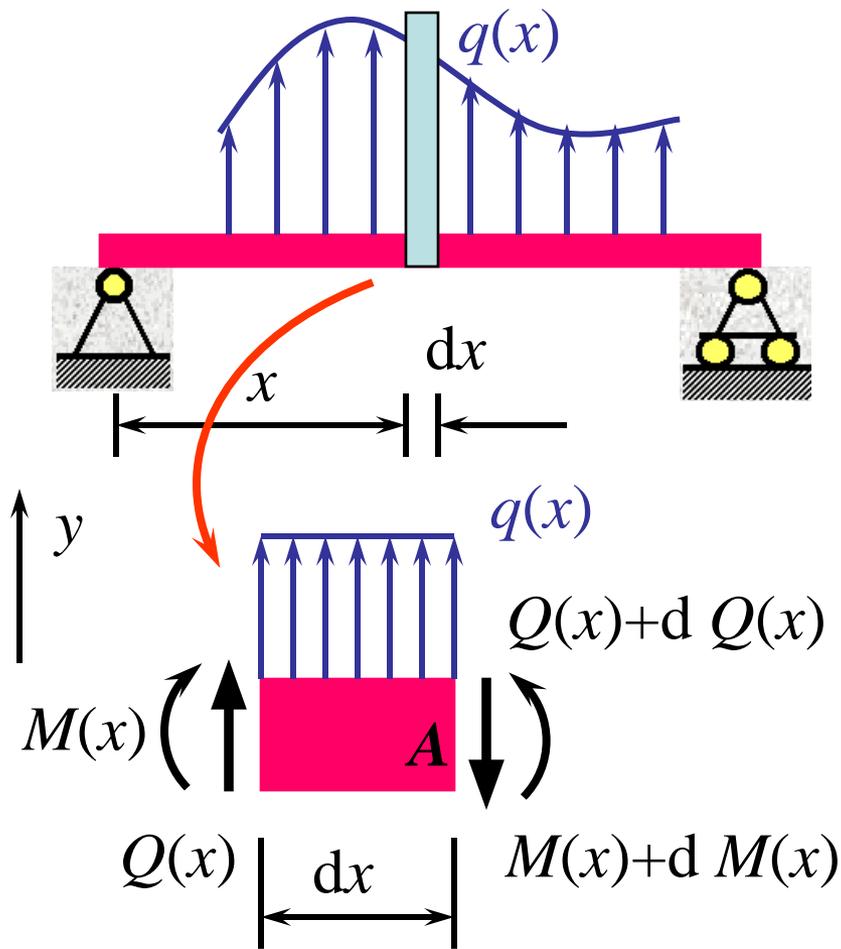


13.剪力、弯矩与分布荷载集度间的关系

一、剪力、弯矩与分布荷载间的微分关系



对 dx 段进行平衡分析，有：

$$\sum Y = 0$$

$$Q(x) + q(x)dx - [Q(x) + dQ(x)] = 0$$

$$q(x)dx = dQ(x)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$$

剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小。



$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) = c$$

讨论：特别地，当 $q=c$ ：

- 1、 $q=c>0$ ：均布载荷向上，则 Q 向右上方倾斜的直线
- 2、 $q=c=0$ ：没有均载荷，则 Q 为水平直线
- 3、 $q=c<0$ ：均布载荷向下，则 Q 向右下方倾斜的直线

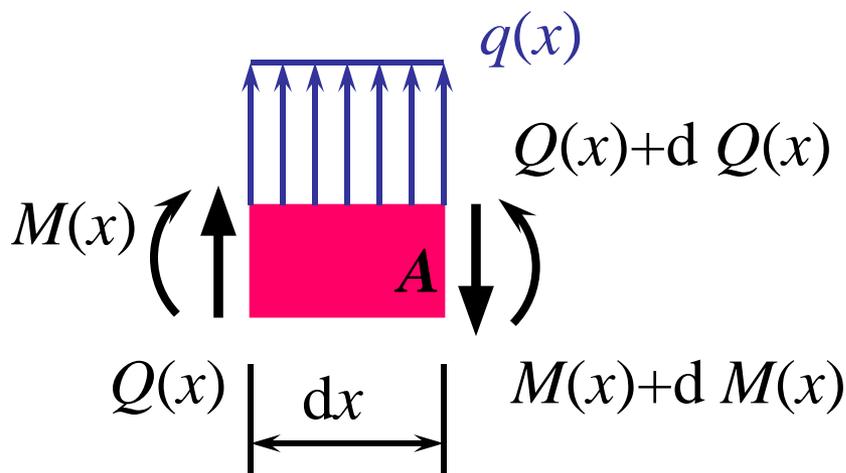


$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0 ,$$

$$Q(x)dx + \frac{1}{2}q(x)(dx)^2 + M(x) - [M(x) + dM(x)] = 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小。



弯矩与荷载集度的关系是：

$$\frac{dM^2(x)}{dx^2} = q(x)$$



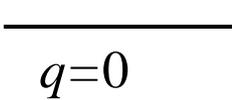
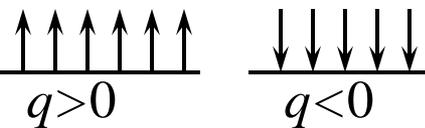
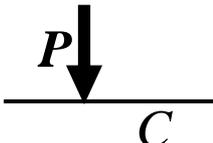
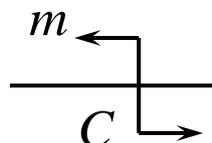
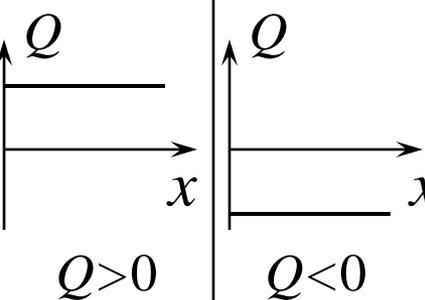
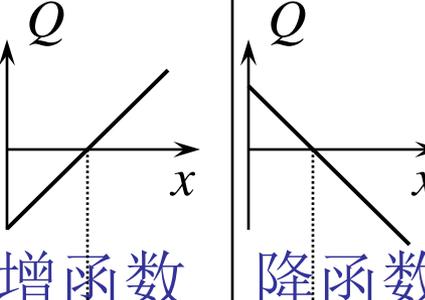
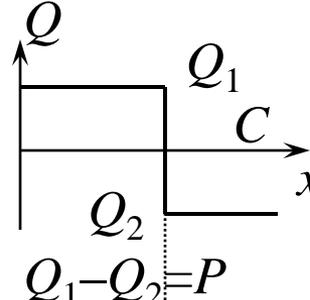
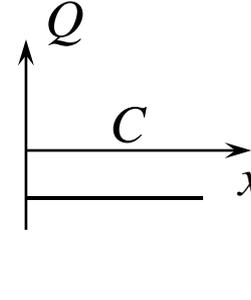
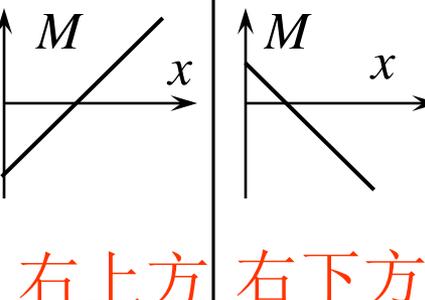
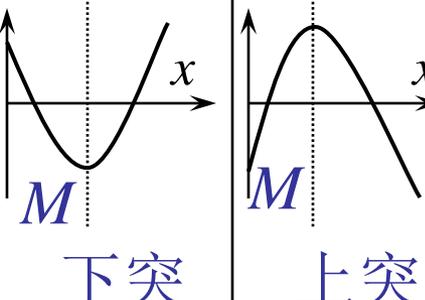
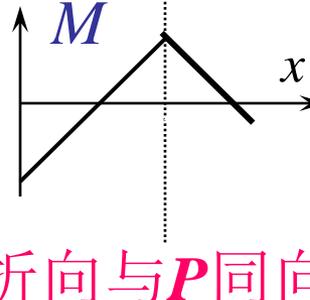
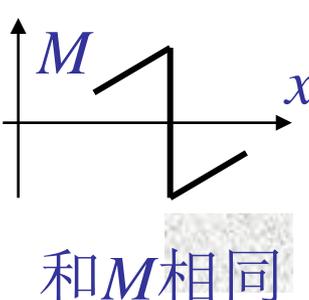
$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) = c$$

讨论：特别地，当 $q=c$ ：

- 1、 $q=c>0$ ：均布载荷向上，则 M 开口向上的二次抛物线
- 2、 $q=c=0$ ：没有均载荷，则 M 为直线
- 3、 $q=c<0$ ：均布载荷向下，则 M 开口向下的二次抛物线



二、剪力、弯矩与外力间的微分关系

外力	无外力段		均布载荷段		集中力	集中力偶
Q 图特征	 $q=0$		 $q>0$ $q<0$		 P C	 m C
	<p>水平直线</p>  $Q>0$ $Q<0$		<p>斜直线</p>  增函数 降函数		<p>自左向右突变</p>  Q_1 Q_2 C $Q_1 - Q_2 = P$	<p>无变化</p>  C
M 图特征	<p>斜直线</p>  右上方 右下方		<p>曲线</p>  M M 下突 上突		<p>自左向右折角</p>  M C 折向与P同向	<p>自左向右突变</p>  M C 和M相同



二、剪力、弯矩与分布荷载间的积分关系

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$$

$$\int_{\text{左}}^{\text{右}} dQ = \int_{\text{左}}^{\text{右}} q(x) dx$$

$$Q_{\text{右}} = Q_{\text{左}} + \int_{\text{左}}^{\text{右}} q(x) dx$$

从左到右考察某区间：

右端的剪力等于左端的剪力加上分布荷载集沿该区间的一次积分。

说明：

- 1、一次积分的几何意义是面积的计算
- 2、 $q(x)$ 向下，则该面积为负；反之为正



$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

$$\int_{\text{左}}^{\text{右}} dM = \int_{\text{左}}^{\text{右}} Q(x) dx$$

$$M_{\text{右}} = M_{\text{左}} + \int_{\text{左}}^{\text{右}} Q(x) dx$$

从左到右考察某区间：

右端的弯矩等于左端的弯矩加上剪力沿该区间的一次积分。

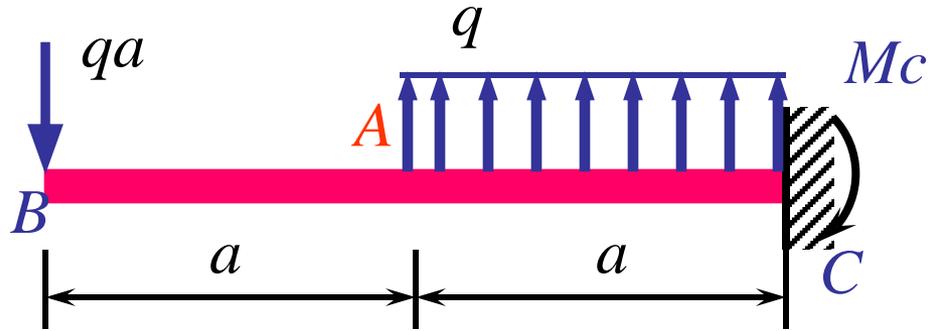
说明：

- 1、一次积分的几何意义是面积的计算
- 2、 $Q(x)$ ，在水平线上方则该面积为正；反之为负



微积分关系作图法：

- 1、由平衡方程计算约束反力。
- 2、以集中力、集中力偶和分布载荷的起讫点为界，将梁分为若干区间。
- 3、从左到右，在有集中力或集中力偶作用的分界点，使剪力图和弯矩图产生相应的突变。
- 4、从左到右，在每个开区间内按微分关系对曲线作定性分析；按积分关系对曲线作定量分析并绘制剪力图和弯矩图。
- 5、若开区间内有分布载荷，且有剪力为零的点，则将该点为界，再作一次细分。



$$M_C = \frac{3}{2} qa^2$$

