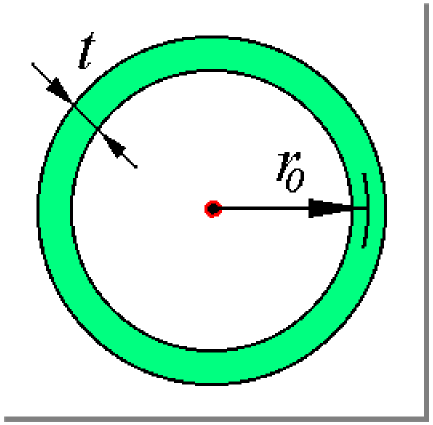
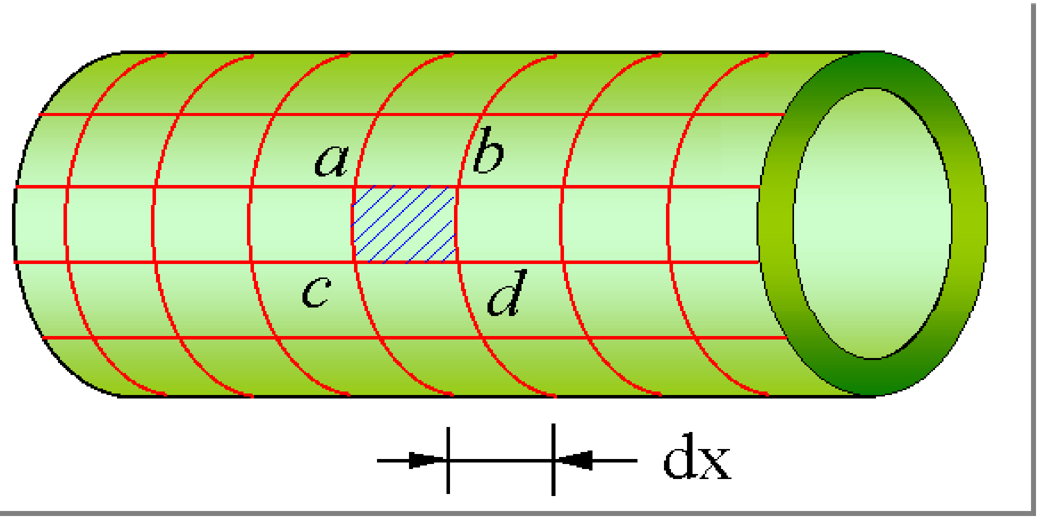
12. 剪应力互等定理

薄壁圆筒： 壁厚 $t \le \dfrac{1}{10} r_0$ （r_0：为平均半径）



一、实验：



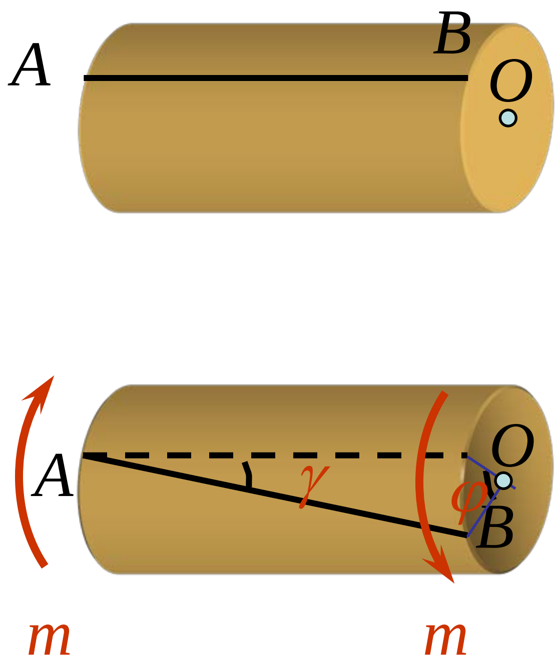
1.实验前：

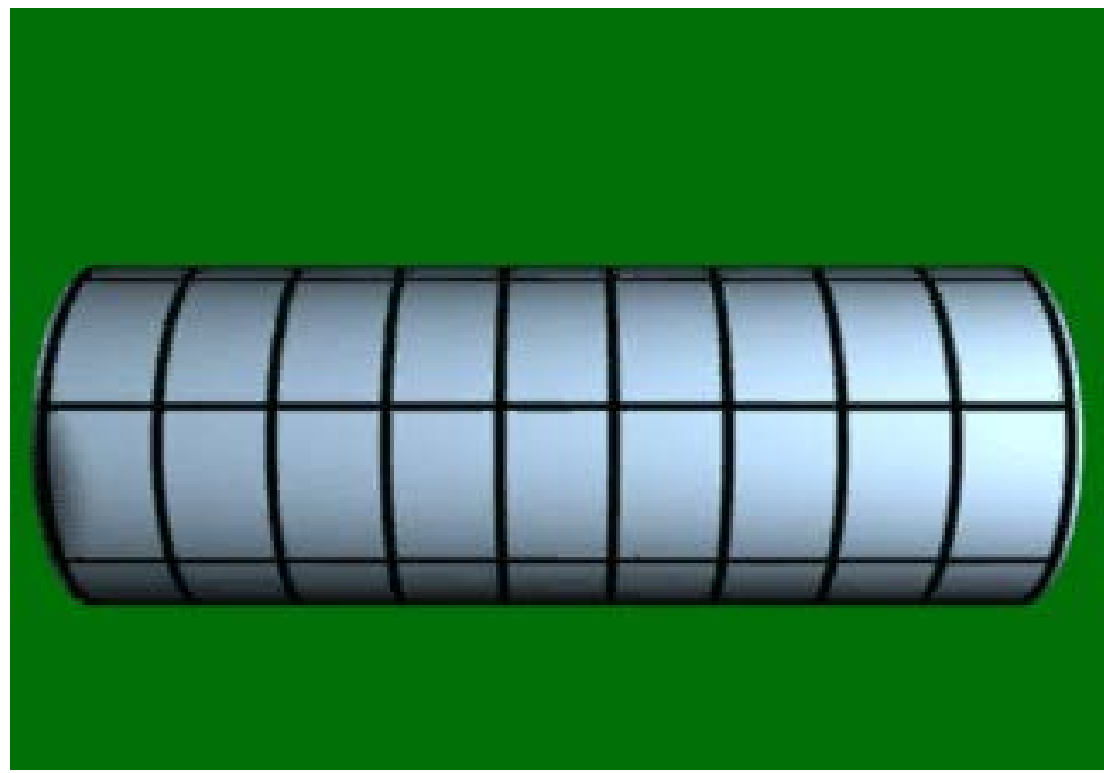
①绘纵向线，圆周线；

②施加一对外力偶 m。

扭转角（φ）： 任意两截面绕轴线转动而发生的相对转角。

剪应变（γ）： 直角的改变量。

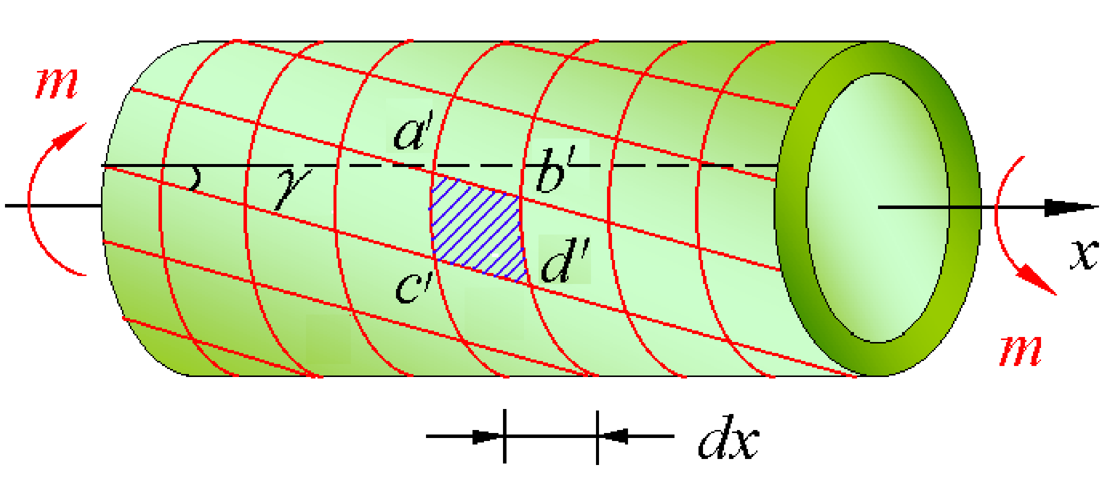




2.实验后：

①圆周线不变；

②纵向线变成斜直线。



3.结论：①圆筒表面的各圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线作了相对转动。

②各纵向线均倾斜了同一微小角度 γ。

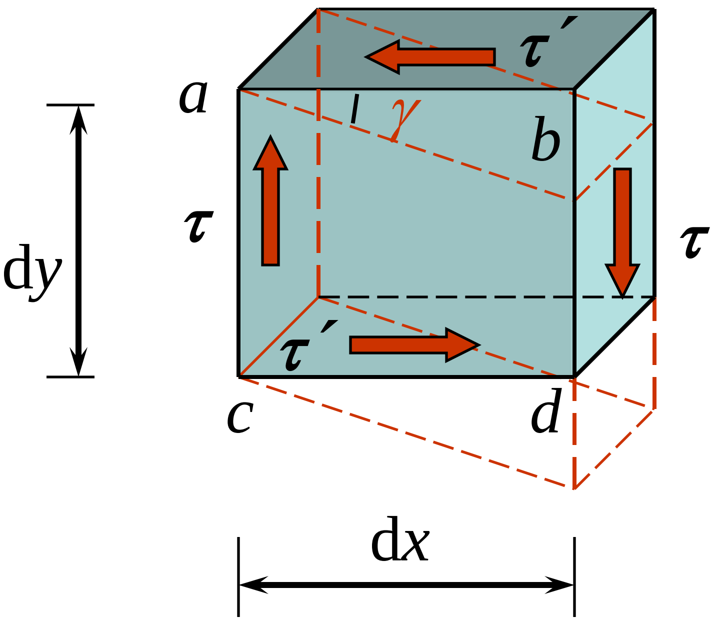
③所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。

以上结论也称为扭转平截面假设

微小矩形单元体如图所示：

①无正应力

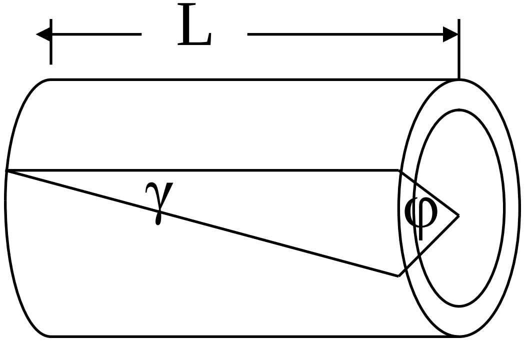
②横截面上各点处，只产生垂直于半径的均匀分布的剪应力τ，沿周向大小不变，方向与该截面的扭矩方向一致。

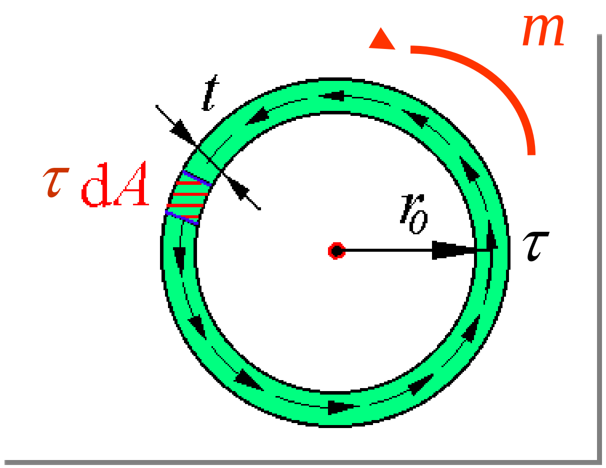


4. φ与γ的关系：

$$\gamma \cdot L = \varphi \cdot R$$

$$\therefore \quad \gamma = \varphi \cdot R/L$$



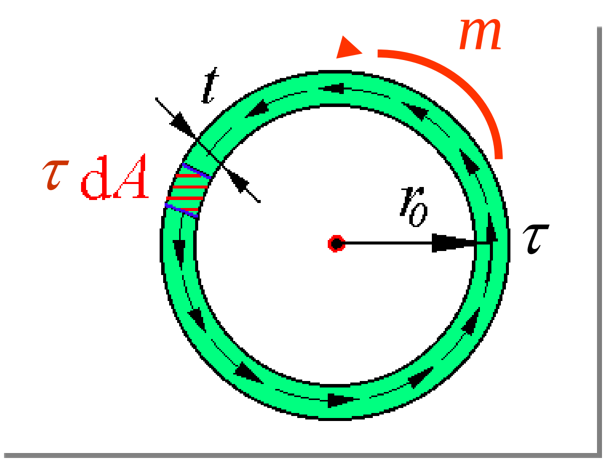


二、薄壁圆筒剪应力τ大小：

$$\int_A \tau \cdot dA \cdot r_0 = T$$

$$\therefore \quad \tau \cdot r_0 \cdot \int_A dA = \tau \cdot r_0 \cdot 2\pi r_0 \cdot t = T$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 t} = \frac{T}{2A_0 t}$$



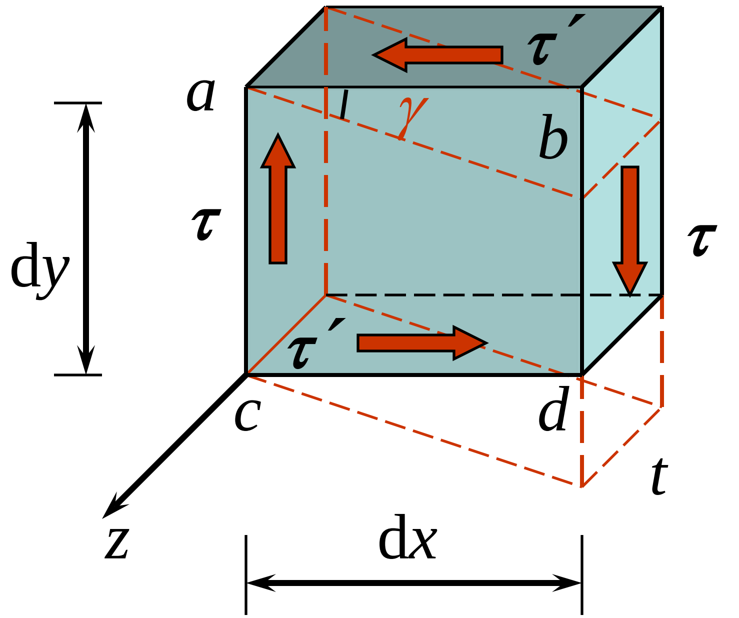
A_0：平均半径所作圆的面积。

三、剪应力互等定理：

$$\sum m_z = 0$$

$$(\tau \cdot t \cdot dy)dx = (\tau' \cdot t \cdot dx)dy$$

故 $\qquad \tau = \tau'$

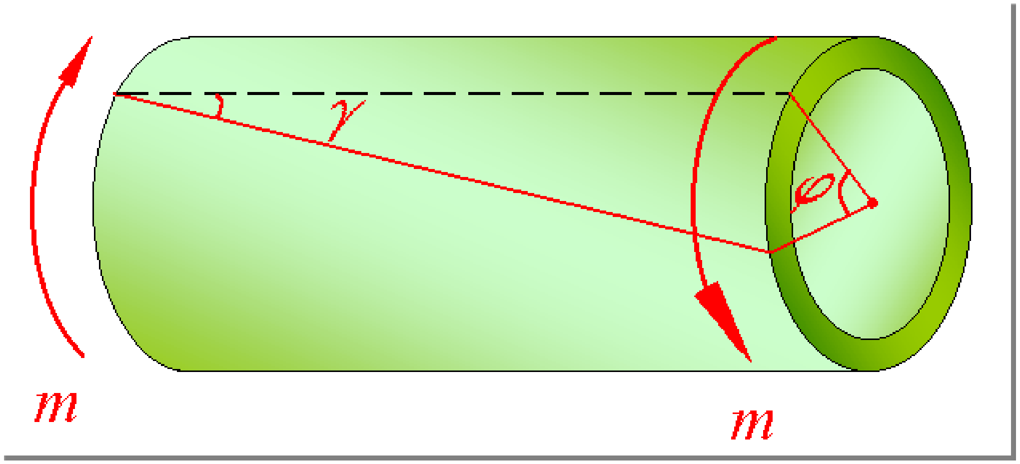


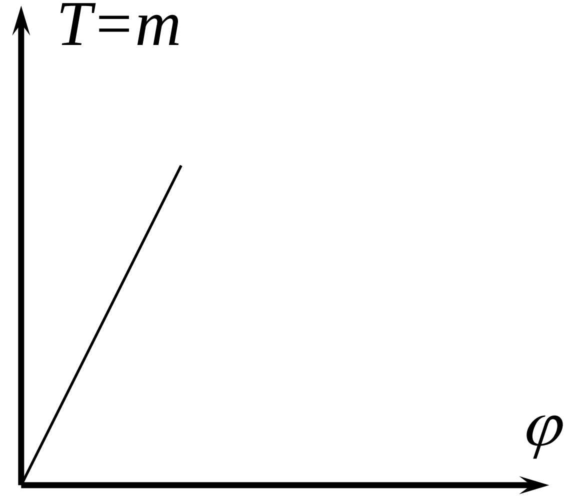
上式称为**剪应力互等定理**。

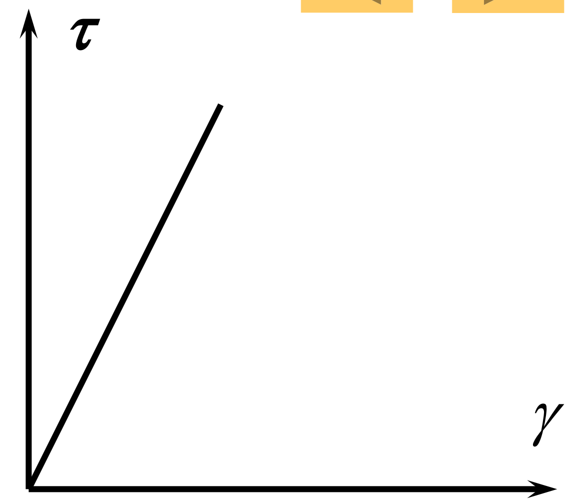
该定理表明：**在单元体相互垂直的两个平面上，剪应力必然成对出现，且数值相等，两者都垂直于两平面的交线，其方向则共同指向或共同背离该交线。**

单元体的四个侧面上只有剪应力而无正应力作用，这种应力状态称为纯剪切应力状态。

四、剪切虎克定律：







$$T \propto \varphi$$

$$(\tau \cdot 2A_0 t) \quad (\gamma \cdot L/R)$$

$$\tau \propto \gamma$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

剪切虎克定律：当剪应力不超过材料的剪切比例极限时（$\tau \leq \tau_p$），剪应力与剪应变成正比关系。

$$\tau = G \cdot \gamma$$

式中：G是材料的一个弹性常数，称为剪切弹性模量，因γ 无量纲，故G的量纲与τ相同，不同材料的G值可通过实验确定，钢材的G值约为$80GPa$。

剪切弹性模量、弹性模量和泊松比是表明材料弹性性质的三个常数。对各向同性材料，这三个弹性常数之间存在下列关系（推导详见后面章节）：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

可见，在三个弹性常数中，只要知道任意两个，第三个量就可以推算出来。