第九章　多元函数微分法及其应用

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集　n维空间
二、多元函数的概念
三、多元函数的极限
四、多元函数的连续性

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

一、平面点集　n维空间

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质P的点的集合，称为平面点集,记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{具有性质}P\}.$$

例如，平面上以原点为中心、r为半径的圆内所有点的集合是

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}，\text{或}C=\{P\mid |OP|<r\}.$$

其中P表示坐标为(x,y)的点，$|OP|$表示点P到原点O的距离

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

2. 邻域

点集$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$,称为点 P_0 的δ邻域.

例如,在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}\text{（圆邻域）}$$

说明：若不需要强调邻域半径δ,也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域，因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

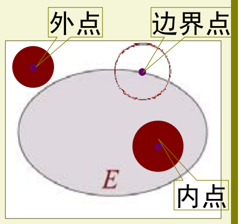
平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

3. 内点 外点 边界点

•内点：如果存在点P的某一邻域$U(P)$，使得$U(P)\subset E$，则称P为E的内点；



•外点：如果存在点P的某个邻域$U(P)$，使得$U(P)\cap E=\varnothing$，则称P为E的外点；

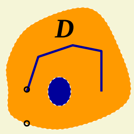
•边界点：如果点P的任一邻域内既有属于E的点，也有不属于E的点，则称P点为E的边界点.

聚点 如果对于任意给定的$\delta>0$，点 P 的去心邻域$\overset{\circ}{U}(P,\delta)$内总有$E$中的点，则称$P$是$E$的聚点.

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

4. 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界，记作∂E；
- 若点集 $E\supset\partial E$，则称 E 为闭集；
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连，则称 D 是连通的；
- 连通的开集称为开区域，简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

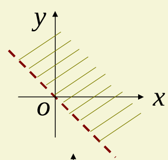


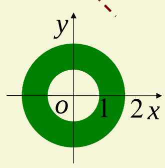
山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

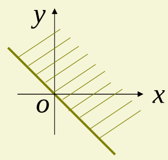
例如，在平面上

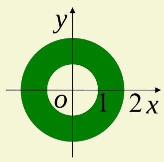
♣ $\{(x,y)\mid x+y>0\}$
♣ $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$
开区域

♣ $\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$
♣ $\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$
闭区域





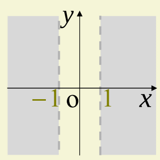




山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

♣ 整个平面是最大的开域，也是最大的闭域；

♣ 点集$\{(x,y)\mid |x|>1\}$是开集，但非区域.



- 对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\leq K$，则称 D 为**有界域**，否则称为**无界域**.

5. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**，记作 R^n，即

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R}\times\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R}$$
$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为空间中的一个**点**，数 x_k 称为该点的第 k 个**坐标**。

当所有坐标 $x_k = 0$ 时，称该元素为 R^n 中的零元，记作 O。

R^n 中的点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与点 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的**距离**记作 $\rho(x, y)$ 或 $\|x - y\|$，规定为

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

R^n 中的点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与零元 O 的距离为

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

当 $n = 1, 2, 3$ 时，$\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

R^n 中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x - a\| \to 0$ 记作 $x \to a$.

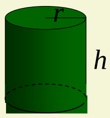
R^n 中点 a 的 **δ 邻域**为

$$U(a, \delta) = \{x \mid x \in \mathrm{R}^n, \rho(x, a) < \delta\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

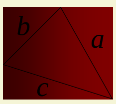


$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r, h) \mid r > 0, h > 0\}$$

- 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \quad (R\text{为常数}), \quad \{(V, T) \mid V > 0, T > T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\{(a, b, c) \mid a > 0, b > 0, c > 0, a + b > c\}$$

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathrm{R}^n$，映射 $f: D \mapsto \mathrm{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**。

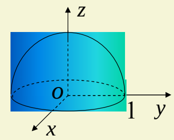
特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$$

当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$$

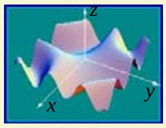
例如，二元函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



定义域为**圆域** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

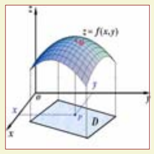
图形为中心在原点的上半球面.

又如，$z = \sin(xy)$，$(x, y) \in \mathrm{R}^2$



说明: 二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 的图形一般为空间曲面 Σ.

三元函数 $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$



定义域为**单位闭球**

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

图形为 R^4 空间中的超曲面.

三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P \in D \subset \mathrm{R}^n$，$P_0$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$，都有 $|f(P) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad (\text{也称为 } n \text{ 重极限})$$

当 $n = 2$ 时，记 $\rho = |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho \to 0} f(x, y) = A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

例1. 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \ne 0)$

求证：$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

证: $\because \left|(x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2} - 0\right| \le x^2 + y^2 \quad \overset{\text{要证}}{< \varepsilon}$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon}$，当 $0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时，总有

$$|f(x, y) - 0| \le x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$

注 (1)二重极限存在，是指 P 以任何方式趋于 P_0 时，函数都无限接近于 A.

(2)如果当 P 以两种不同方式趋于 P_0 时，函数趋于不同的值，则函数的极限不存在.

例2. 讨论函数 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 的极限.

解: 设 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$ 趋于点 $(0, 0)$，则有

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} + k^2 \cancel{x^2}} = \frac{k}{1 + k^2}$$

k 值不同极限不同！

故 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点极限不存在.

多元函数的极限运算法则

与一元函数的情况类似.

例3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}y=1\times2=2$.

- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ **不同.**

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在,推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=0$$

但由例2 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

四、 多元函数的连续性

定义3 . 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0\in D$, 如果存在

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续,否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点 .

如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists\,K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ; (最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M]$, $\exists\,Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$; (介值定理)

* (4) $f(P)$ 必在D 上一致连续 . (一致连续性定理)

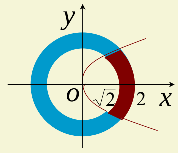
(证明略)

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac12$

例5. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases}|3-x^2-y^2|\le1\\ x-y^2>0\end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases}2\le x^2+y^2\le4\\ x>y^2\end{cases}$



内容小结

1. 区域
   - 邻域 : $U(P_0,\delta)$, $\mathring{U}(P_0,\delta)$
   - 区域 —— 连通的开集
   - $\mathbb{R}^n$ 空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$P\in D\subset\mathbb{R}^n$

常用 $\begin{cases}\text{二元函数 (图形一般为空间曲面)}\\ \text{三元函数}\end{cases}$

---

3. 多元函数的极限

$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|PP_0|<\delta$ 时, 有 $|f(P)-A|<\varepsilon$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理 ; 最值定理 ; 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

作业：p-62习题9-1

5 (2), (4), (6)

6 (2), (3), (5), (6)

7（1）

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数．

例如, 三元函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z)=?$$

$$f_z(x,y,z)=?$$

(请自己写出)

第二节 偏导数

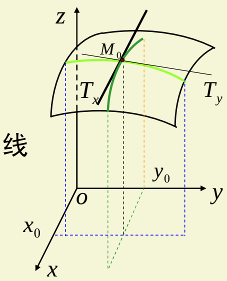
一、偏导数的定义及其计算法

二、高阶偏导数

二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$ 在点M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

定义1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $z_x\big|_{(x_0,y_0)}$; $f_x(x_0,y_0)$; $f_1'(x_0,y_0)$.

注意: $\displaystyle f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$

注意: 函数在某点各偏导数都存在,

但在该点**不一定连续**.

例如, $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

显然 $f_x(0,0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\right|_{x=0}=0$

$f_y(0,0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\right|_{y=0}=0$

在上节已证 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$并不连续!

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数, 也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),\ f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x,y),\ f_2'(x,y)$$

例1. 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点$(1,2)$ 处的偏导数.

解法1: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

$\therefore \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2\cdot1+3\cdot2=8$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=3\cdot1+2\cdot2=7$

解法2: $z\big|_{y=2}=x^2+6x+4$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=(2x+6)\big|_{x=1}=8$

$z\big|_{x=1}=1+3y+y^2$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=(3+2y)\big|_{y=2}=7$

例2. 设 $z = x^y\ (x>0,\ 且\ x\neq 1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证: $\because\ \frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

$$\therefore\ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=x^y+x^y=2z$$

例3. 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数 . (P65 例4)

解: $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

例4. 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$ (R 为常数)，

求证: $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$

证: $p=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$

$$V=\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$$

$$T=\frac{pV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$$

$$\therefore\ \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

说明: 此例表明，偏导数记号是一个整体记号，不能看作分子与分母的商！

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

二、高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$在域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数 . 按求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如, $z=f(x,y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z=f(x,y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

例5. 求函数 $z=e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2e^{x+2y}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=2e^{x+2y}$$

注意:此处 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，但这一结论并不总成立.

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

例如, $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(0,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1\\ f_{yx}(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\end{aligned}\right\}\text{二者不等}$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

例6. 证明函数 $u=\frac{1}{r},\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯

方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^3}\cdot x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

利用对称性，有 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\boxed{x^2+y^2+z^2})}{r^5}=0$$

$$\boxed{=r^2}$$

山东农业大学 高等数学 主讲人：苏本堂

定理. 若 $f_{xy}(x,y)$和 $f_{yx}(x,y)$都在点(x_0,y_0)连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)\qquad \text{(证明略)}$$

本定理对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如, 对三元函数 $u=f(x,y,z)$，当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时，有

$$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)$$

$$=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数，而初等函数在其定义区域内是连续的，故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

定理. 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

证: 令 $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)$
$\qquad -f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$

令 $\phi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$

$\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$

则
$$\begin{aligned}F(\Delta x,\Delta y)&=\phi(x_0+\Delta x)-\phi(x_0)\\&=\phi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x \qquad (0<\theta_1<1)\\&=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x\\&=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (0<\theta_1,\theta_2<1)\end{aligned}$$

第三节 全 微 分

一、全微分的定义

二*、全微分在近似计算中的应用

同样

$$\begin{aligned}F(\Delta x,\Delta y)&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)\\&\quad -f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)\\&=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)\\&=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y\\&\qquad (0<\theta_3,\theta_4<1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)$$

因 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，故令 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 得 $\quad f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

一、全微分的定义

1.偏增量与偏微分

根据一元函数微分学中增量与微分的关系，有

$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)\approx f_x(x, y)\Delta x$,

$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)\approx f_y(x, y)\Delta y$,

$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$ ——函数 $f(x, y)$ 对 x 的偏增量

$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$——函数 $f(x, y)$ 对 y 的偏增量

$f_x(x, y)\Delta x$ ——函数 $f(x, y)$ 对 x 的偏微分

$f_y(x, y)\Delta y$ ——函数 $f(x, y)$ 对 y 的偏微分

全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$.

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论
   - 定义; 记号; 几何意义
   - 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
   - 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关
2. 偏导数的计算方法
   - 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases}\text{先代后求}\\\text{先求后代}\\\text{利用定义}\end{cases}$
   - 求高阶偏导数的方法 ——— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

2.全微分的定义

如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$

可表示为 $\quad \Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\ (\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,)$,

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记作 dz，即

$dz=A\Delta x+B\Delta y$.

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分.

作业：p-69习题9-2

1（4），（6），（8）； 3; 5;

6（3）； 8; 9（2）

由微分定义：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\rho\to 0}[(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho)]=0$$

得 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$$

即 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x, y) 可微 $\Longrightarrow$ 函数在该点连续

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微

定理1(必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) **可微**，
则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在,且有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，令 $\Delta y=0$,
得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, 因此有 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

注: 定理1 的逆定理不成立 . 即:

偏导数存在函数 不一定可微 !

反例: 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 (0,0) 不可微 .

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$
在点 (x,y) 连续, 则函数在该点**可微分**.

证: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]$
$\quad+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]$

$=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y$

$\boxed{(0<\theta_1,\theta_2<1)}$

$=[f_x(x,y)+\alpha]\Delta x+[f_y(x,y)+\beta]\Delta y$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0\right)$$

$\Delta z=\cdots$

$=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0\right)$$

注意到 $\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha|+|\beta|$, 故有

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\rho)$$

所以函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微.

推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.
例如, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$du=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx}_{\text{记作 }d_x u}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}dy}_{d_y u}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}dz}_{d_z u}$$

$d_x u, d_y u, d_z u$称为**偏微分**. 故有下述叠加原理

$$du=d_x u+d_y u+d_z u$$

例1. 计算函数 $z=e^{xy}$在点 (2,1) 处的全微分.

解: $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2$, $\quad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$

$$\therefore\quad dz\Big|_{(2,1)}=e^2dx+2e^2dy=e^2(dx+2dy)$$

例2. 计算函数 $u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解: $du=1\cdot dx+(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz})dy+ye^{yz}dz$

*二、全微分在数值计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z=\underbrace{f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y}_{dz}+o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

内容小结

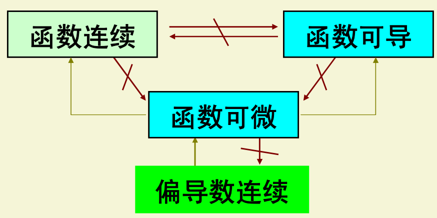
1. 微分定义: ($z=f(x,y)$)

$$\Delta z=\underline{f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y}+o(\rho)$$

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

2. 重要关系:



作业：p-75习题9-3

1 (3) , (4) ; 3 ; 5

第四节 多元复合函数的求导法则

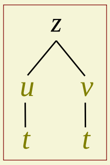
一、多元复合函数求导的链式法则

二、多元复合函数的全微分

一、多元复合函数求导的链式法则

定理. 若函数 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 在点 t 可导, $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处偏导连续, 则复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 在点 t 可导, 且有链式法则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$



证: 设 t 取增量 $\triangle t$, 则相应中间变量有增量 $\triangle u$, $\triangle v$,

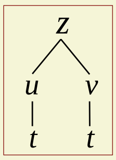
$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}\quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)$$

令 $\Delta t\to 0$, 则有 $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{du}{dt},\qquad \frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\to 0$$



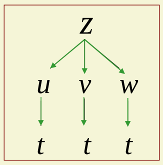
($\triangle t<0$ 时,根式前加“–”号)

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}}$$ **(全导数公式)**

推广: 设下面所涉及的函数都可微 .

1) 中间变量多于两个的情形. 例如, $z=f(u,v,w)$, $u=\varphi(t), v=\psi(t), w=\omega(t)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}$$
$$=f_1'\varphi'+f_2'\psi'+f_3'\omega'$$

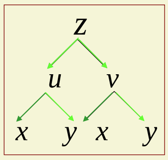


2) 中间变量是多元函数的情形.例如,

$z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\varphi_1'+f_2'\psi_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\varphi_2'+f_2'\psi_2'$$

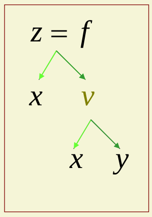


又如, $z=f(x,v)$, $v=\psi(x,y)$

当它们都具有可微条件时, 有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}=\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+f_2'\psi_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_2'\psi_2'$$



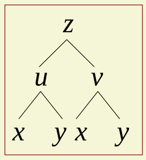
注意: 这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不同,

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 表示固定 y 对 x 求导, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示固定 v 对 x 求导

口诀 : 分段用乘, 分叉用加, 单路全导, 叉路偏导

例1. 设 $z=e^u\sin v$, $u=xy$, $v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

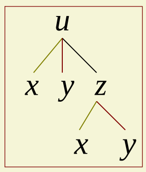
解:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1$$
$$=e^{xy}[y\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$



$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1$$
$$=e^{xy}[x\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

例2. $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, $z=x^2\sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

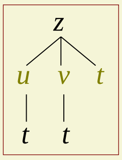
解:
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=2xe^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$$
$$=2x(1+2x^2\sin^2 y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}$$



$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$=2ye^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y$$
$$=2(y+x^4\sin y\cos y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}$$

例3. 设 $z=uv+\sin t$, $u=e^t$, $v=\cos t$, 求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解: $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$=ve^t-u\sin t+\cos t$$
$$=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t$$



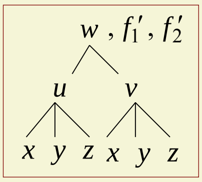
注意：多元抽象复合函数求导在偏微分方程变形与验证解的问题中经常遇到，下列例题有助于掌握这方面问题的求导技巧与常用导数符号.

二、多元复合函数的全微分

设函数 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 都可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$
$$=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

可见无论 u, v 是自变量还是中间变量，其全微分表达形式都一样，这性质叫做**全微分形式不变性.**

例4. 设 $w=f(x+y+z,xyz)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.



解: 令 $u=x+y+z$, $v=xyz$, 则
$$w=f(u,v)$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot yz$$
$$=f_1'(x+y+z,xyz)+yz\,f_2'(x+y+z,xyz)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot xy+y\,f_2'+yz[\,f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot xy]$$
$$=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2z\,f_{22}''+y\,f_2'$$

例 5. 利用全微分形式不变性再解例1.

解: $$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(e^u\sin v)$$
$$=e^u\sin v\,\mathrm{d}u+e^u\cos v\,\mathrm{d}v$$
$$=e^{xy}[\sin(x+y)\,\mathrm{d}(xy)+\cos(x+y)\,\mathrm{d}(x+y)]$$
$$=e^{xy}[\sin(x+y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\cos(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)]$$
$$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x$$
$$+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}[y\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}[x\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)]$$

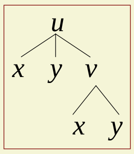
练习 1. 设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$ 求偏导数。
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y}f_1'$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{z}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}f_2'$$

内容小结

1. 复合函数求导的链式法则

   "分段用乘，分叉用加，单路全导，叉路偏导"

   例如, $u=f(x,y,v)$, $v=\varphi(x,y)$,
   $$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\varphi_1';\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+f_3'\cdot\varphi_2'$$



2. 全微分形式不变性

   对 $z=f(u,v)$, 不论 u, v 是自变量还是因变量,
   $$\mathrm{d}z=f_u(u,v)\mathrm{d}u+f_v(u,v)\mathrm{d}v$$

练习2 设 $z=f(u,x,y)$, $u=xe^y$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^y+f_2'$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y\cdot f_1'+xe^{2y}\cdot f_{11}''+e^y\cdot f_{13}''$$
$$+xe^y\cdot f_{21}''+f_{23}''$$

作业：p-82习题9-4

2; 4; 6; 9; 10; 11; 12(4)

第五节隐函数的求导方法

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

二、方程组的情形

例1 验证方程$x^2+y^2-1=0$在点(0, 1)的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$, 并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值.

解 设$F(x, y)=x^2+y^2-1$,则

$$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F(0, 1)=0,\ F_y(0, 1)=2\neq 0.$$

由隐函数存在定理, 方程$x^2+y^2-1=0$在点(0, 1)的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数、当$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{1}{y^3},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1.$$

本节讨论：

1) 方程在什么条件下才能确定隐函数 .

例如, 方程 $x^2+\sqrt{y}+C=0$

当 $C<0$ 时, 能确定隐函数;

当 $C>0$ 时, 不能确定隐函数;

2) 在方程能确定隐函数时, 研究其连续性、可微性及求导方法问题 .

例2. 已知方程 $\sin y+e^x-xy-1=0$ 在点(0,0)某邻域确定一个单值可导隐函数 $y=f(x)$, 求

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$$

解: 令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy-1$, 则

$$F_x=e^x-y,\ F_y=\cos y-x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y}{\cos y-x}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\left.\frac{e^x-y}{\cos y-x}\right|_{x=0,\,y=0}=-1$$

一、一个方程所确定的隐函数及其导数

定理1. 设函数 $F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内满足

① 具有连续的偏导数;

② $F(x_0,y_0)=0$;

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的**某邻域内**可唯一确定一个单值连续函数 $y=f(x)$, 满足条件$y_0=f(x_0)$, 并有连续导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}\quad \text{(隐函数求导公式)}$$

定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-y}{\cos y-x}\right)\Big|_{x=0,\ y=0,\ y'=-1}$$

$$=-\left.\frac{(e^x-y')(\cos y-x)-(e^x-y)(-\sin y\cdot y'-1)}{(\cos y-x)^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=0\\ y'=-1}}$$

$$=-3$$

设 $y=f(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 , 则

$$F(x,f(x))\equiv 0$$

两边对 x 求导

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0$$

在(x_0,y_0)的某邻域内 $F_y\neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

定理2 . 若函数 $F(x,y,z)$满足:

① 在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域内具有**连续偏导数** ,

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $z=f(x,y)$,满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$$

两边对 x 求偏导

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$$

在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内 $F_z\neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $\displaystyle\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

例3. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1 利用隐函数求导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

再对 x 求导

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

解法2 利用公式

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $F_x=2x,\ F_z=2z-4$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2}=\frac{x}{2-z}$$

两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

例4. 设 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，已知方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$，求 $\mathrm{d}z$.

解 法1 利用偏导数公式设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 确定的隐函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'\cdot\frac{1}{z}}{F_1'\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

故 $\displaystyle \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$

解法2 微分法. 对方程两边求微分:

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$$

$$F_1'\cdot\mathrm{d}\left(\frac{x}{z}\right)+F_2'\cdot\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)=0$$

$$F_1'\cdot\left(\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\right)+F_2'\cdot\left(\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}\right)=0$$

$$\frac{xF_1'+yF_2'}{z^2}\mathrm{d}z=\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{z}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{z}{xF_1'+yF_2'}(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)$$

二、方程组所确定的隐函数组及其导数

在一定条件下方程组 $F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ 能确定一对二元函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

例如, 方程 $xu-yv=0$ 和 $yu+xv=1$ 可以确定两个二元函数

$$u=\frac{y}{x^2+y^2},\quad v=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

事实上,

$$xu-yv=0\Rightarrow v=\frac{x}{y}u\Rightarrow yu+x\cdot\frac{x}{y}u=1\Rightarrow u=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$v=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

能否根据原方程组求 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 的偏导数?

隐函数存在定理3 设 $F(x,y,u,v)$ $G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

且偏导数所组成的函数行列式（也称雅可比式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组

$F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内可唯一确定一组满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$ 的单值连续函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 且有偏导数公式:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}$$

(P34-P35)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

定理证明略. 仅推导偏导公式如下:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 有隐函数组 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，则

$$\begin{cases}F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0\\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0\end{cases}$$

两边对 x 求导得 $\begin{cases}F_x+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，在点P 的某邻域内

系数行列式 $J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$，故得

二元线性代数方程组解的公式

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

解：$x=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$

$$y=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例5. 设 $xu-yv=0,\ yu+xv=1$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解: 方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v\end{cases}$$

由题设 $J=\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$

故有 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix}-u & -y\\ -v & x\end{vmatrix}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix}x & -u\\ y & -v\end{vmatrix}=-\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}\end{cases}$

练习: 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

答案:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}\end{cases}$$

例6. 设函数 $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ 在点(u,v) 的某一邻域内有连续的偏导数，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

1) 证明函数组 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 在与点 (u,v) 对应的点 (x,y) 的某一邻域内唯一确定一组单值、连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$.

2) 求 $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 对 x,y 的偏导数.

解: 1) 令 $F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0$

$$G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0$$

则有 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$,

由定理 3 可知结论 1) 成立.

2) 求反函数的偏导数.

$$\begin{cases}x\equiv x(u(x,y),v(x,y))\\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y))\end{cases}\quad ①$$

①式两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad ②$$

注意 $J\neq 0$，从方程组②解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ 0 & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & 1\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同理，①式两边对 y 求导，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

例6. 设 $y=y(x),\ z=z(x)$ 是由方程 $z=x\,f(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. **(99考研)**

解 分别在各方程两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}z'=f+x\cdot f'\cdot(1+y')\\ F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-x\,f'\cdot y'+z'=f+x\,f'\\ F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-x\,f' & f+x\,f'\\ F_y & -F_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-x\,f' & 1\\ F_y & F_z\end{vmatrix}}=\frac{(f+x\,f')F_y-x\,f'\cdot F_x}{F_y+x\,f'\cdot F_z}$$

$$(F_y+x\,f'\cdot F_z\neq 0)$$

作业：*p*-89 习题9-5

2, 3，6， 7，8， 10(1); (2)

向量值函数的导数运算法则: (P91)

设 $\vec{u},\vec{v}$ 是可导向量值函数, $\vec{C}$ 是常向量, c 是任一常数, $\varphi(t)$ 是可导函数, 则

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{C}=\vec{O}$ (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\vec{u}(t)]=c\,\vec{u}'(t)$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\pm\vec{v}'(t)$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)\vec{u}(t)]=\varphi'(t)\vec{u}(t)+\varphi(t)\vec{u}'(t)$

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}[\varphi(t)]=\varphi'(t)\vec{u}'[\varphi(t)]$

第六节 多元函数微分学的几何应用

一、一元向量值函数及其导数

二、空间曲线的切线与法平面

三、曲面的切平面与法线

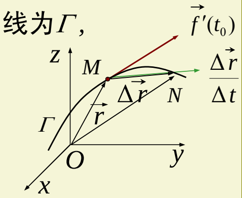
向量值函数导数的几何意义:

在 $\mathbf{R}^3$中, 设 $\vec{r}=\vec{f}(t), t\in D$ 的终端曲线为Γ,

$$\overrightarrow{OM}=\vec{f}(t_0),\quad \overrightarrow{ON}=\vec{f}(t_0+\Delta t)$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{f}'(t_0)$$



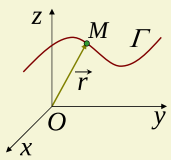
设 $\vec{f}'(t_0)\neq\vec{0}$, 则

$\vec{f}'(t_0)$ 表示终端曲线在t_0处的切向量, 其指向与t 的增长方向一致.

一、一元向量值函数及其导数

引例: 已知空间曲线 Γ 的参数方程:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t) \quad t\in[\alpha,\beta]\\ z=\omega(t)\end{cases}$$



记 $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

Γ的向量方程 $\vec{r}=\vec{f}(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$

此方程确定映射 $\vec{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^3$,称此映射为一元向量值函数.

对Γ上的动点M, 显然 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 即$\Gamma$是 $\vec{r}$ 的终点M的轨迹 , 此轨迹称为向量值函数的**终端曲线** .

要用向量值函数研究曲线的**连续性**和**光滑性**，就需要引进向量值函数的极限、连续和导数的概念.

向量值函数导数的物理意义:

设 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 表示质点沿光滑曲线运动的位置向量, 则有

速度向量: $\vec{v}(t)=\vec{f}'(t)$

加速度向量: $\vec{a}=\vec{v}'(t)=\vec{f}''(t)$

例1. 设 $\vec{f}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, 求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)$.

解: $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t)\,\vec{i}+(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t)\,\vec{j}+\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}t\,\vec{k}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\pi}{4}\vec{k}\quad(=\vec{f}(\tfrac{\pi}{4}))$$

定义: 给定数集 $D\subset\mathbf{R}$, 称映射$\vec{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为**一元向量值函数**（简称向量值函数）, 记为

$$\vec{r}=\vec{f}(t),\quad t\in D$$

定义域 因变量 自变量

向量值函数的极限、连续和导数都与各分量的极限、连续和导数密切相关, 因此下面仅以 $n=3$ 的情形为代表进行讨论.

严格定义见P90

设 $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)),\ t\in D$, 则

极限: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t))$

连续: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$

导数: $\vec{f}'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$ $\quad\boxed{\vec{f}'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}}$

例2. 设空间曲线Γ的向量方程为

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(t^2+1,4t-3,2t^2-6t),\quad t\in\mathbf{R}$$

求曲线Γ上对应于$t_0=2$ 的点处的单位切向量.

解: $\vec{f}'(t)=(2t,4,4t-6),\quad t\in\mathbf{R}$

$$\vec{f}'(2)=(4,4,2)$$

$$|\vec{f}'(2)|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$$

故所求单位切向量为 $\frac{\vec{f}'(2)}{|\vec{f}'(2)|}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

其方向与 t 的增长方向一致

另一与 t 的增长方向相反的单位切向量为$(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

例3. 一人悬挂在滑翔机上, 受快速上升气流影响作螺旋式上升, 其位置向量为 $\vec{r}=(3\cos t, 3\sin t, t^2)$, 求

(1) 滑翔机在任意时刻 t 的速度向量与加速度向量;

(2) 滑翔机在任意时刻 t 的速率;

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解: (1) $\vec{v}=\vec{r}\,'(t)=(-3\sin t, 3\cos t, 2t)$

$\vec{a}=\vec{v}\,'=(-3\cos t, -3\sin t, 2)$

(2) $|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{(-3\sin t)^2+(-3\cos t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9+4t^2}$

(3) 由 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 即 $9\sin t\cos t-9\cos t\sin t+4t=0$,

得 $t=0$, 即仅在开始时刻滑翔机的加速度与速度正交.

二、空间曲线的切线与法平面

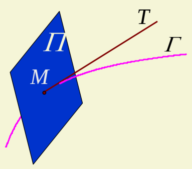
空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面.**

给定光滑曲线

$$\Gamma:\ \vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

则当 φ',ψ',ω' 不同时为 0时, Γ在点$M\,(x,y,z)$ 处的切向量及法平面的法向量均为

$$\vec{f}\,'(t)=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$$



利用 $\begin{cases}\text{点向式可建立曲线的切线方程}\\ \text{点法式可建立曲线的法平面方程}\end{cases}$

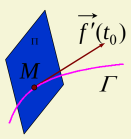
1. 曲线方程为参数方程的情况

给定光滑曲线 $\Gamma:\ x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$

设Γ上的点 $M(x_0,y_0,z_0)$对应 $t=t_0, \varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0, 则$\Gamma$在点$M$ 的导向量为

$$\vec{f}\,'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

因此曲线 Γ在点 M 处的



切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

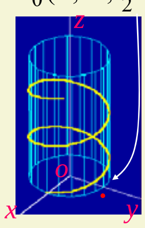
法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例4. 求圆柱螺旋线 $x=R\cos\varphi, y=R\sin\varphi, z=k\varphi$ 在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x'=-R\sin\varphi, y'=R\cos\varphi, z'=k$, 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\vec{T}=(-R,0,k)$, 故

$M_0(0,R,\frac{\pi}{2}k)$



切线方程 $\dfrac{x}{-R}=\dfrac{y-R}{0}=\dfrac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$

即 $\begin{cases}kx+Rz-\frac{\pi}{2}Rk=0\\ y-R=0\end{cases}$

法平面方程 $-Rx+k(z-\frac{\pi}{2}k)=0$

即 $Rx-kz+\frac{\pi}{2}k^2=0$

曲线$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$在$t=t_0$所对应的点M_0的切向量为$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$.

讨论:

1. 若曲线的方程为$y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, 则切向量$\boldsymbol{T}$=?

2. 若曲线的方程为$F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$, 则切向量$\boldsymbol{T}$=?

提示:

1. 曲线的参数方程可视为: $x=x$, $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, 切向量为$\boldsymbol{T}=(1, \varphi'(x), \psi'(x))$.

2. 两方程可确定两个隐函数: $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$. 切向量为$\boldsymbol{T}=(1, \varphi'(x), \psi'(x))$, 而$\varphi'(x)$, $\psi'(x)$要通过解方程组得到.

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases}y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x\\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1\end{cases}$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix}-x & z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_M, \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M\,(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

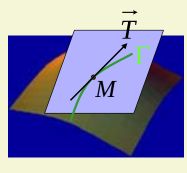
法平面方程 $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

二、曲面的切平面与法线

设 有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ **任意**引一条光滑曲线 $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$, 设 $t=t_0$ 对应点 M, 且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0 . 则 Γ 在点 M 的**切向量**为



$$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

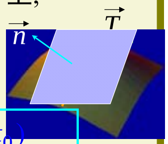
切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

下面证明: Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上. 此平面称为 Σ 在该点的**切平面**.

证: $\because \Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$ 在 Σ 上,

$\therefore\quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$

两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,



得
$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T}\perp\vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性, 表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上, 从而切平面存在.

例3. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\quad\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $\quad 2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $\quad x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}$

曲面 Σ 在点 M 的**法向量**

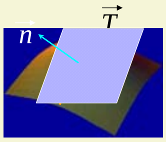
$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$\vec{n}_1=(y_0z_0,\,x_0z_0,\,x_0y_0)$, $\quad\vec{n}_2=(x_0,\,y_0,\,z_0)$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0y_0z_0}{x_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{y_0^2}=\frac{x_0y_0z_0}{z_0^2}$$

$\therefore\quad x_0^2=y_0^2=z_0^2$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\quad \sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

特别, 当光滑曲面Σ 的方程为显式 $z=f(x,y)$时, 令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点 (x,y,z), $F_x=f_x,\ F_y=f_y,\ F_z=-1$

故当函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时, 曲面 Σ 在点(x_0,y_0,z_0)有

切平面方程

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $\quad \dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

例5. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点$(1,1,1)$ 的切线与法平面.

解: 点 $(1,1,1)$ 处两曲面的法向量为

$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$

$\vec{n}_2=(2,-3,5)$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $\quad \dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $\quad 16x+9y-z-24=0$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角, 并假定法向量方向向上, 则γ 为锐角.

法向量 $\quad\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),\,-f_y(x_0,y_0),\,1)$

将 $f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)$分别记为 $f_x,\ f_y$, 则

法向量的**方向余弦:**

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

作业：*p*-100 习题9-6

3，4，5，8,10

第七节 方向导数与梯度

一、方向导数

二、梯度

一、方向导数

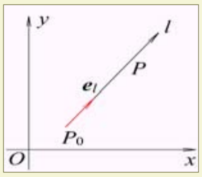
讨论函数$z=f(x,y)$ 在一点P沿某一方向的变化率问题.

设函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某一邻域$U(P_0)$内有定义, l是xOy平面上以$P_0(x_0, y_0)$为始点的一条射线, 与l同方向的单位向量为$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha, \cos\beta)$.

取$P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)\in U(P_0)$, 如果极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为函数$f(x, y)$在点P_0沿方向l的方向导数, 记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$.



方向导数的几何意义

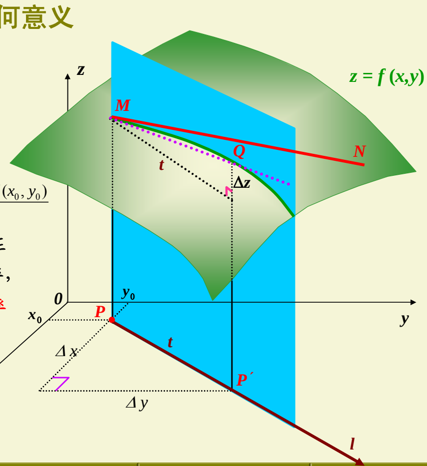
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\lim_{t\to 0}\frac{\Delta z}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(P')-f(P)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{t}$$

方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P$ 是曲面在点P处沿方向l的变化率,

即半切线 $\overline{MN}$ 的斜率



方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

方向导数就是函数$f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处沿方向l的变化率.

思考: 函数$f(x, y)$在点P沿x轴正向和负向, 沿y轴正向和负向的方向导数如何?

沿x轴正向时, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

沿x轴反向时, $\cos\alpha=-1$, $\cos\beta=0$ $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$

定理 如果函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$可微分, 那么函数在该点沿任一方向l ($\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha, \cos\beta)$)的方向导数都存在, 且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

证明:由于函数可微，则增量可表示为

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

但点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 在以(x_0,y_0)为始点的射线l上,故有

$\Delta x=t\cos\alpha$, $\Delta y=t\cos\beta$, $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=t$,所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

函数$f(x, y)$在点P_0沿方向l ($\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha, \cos\beta)$)的方向导数:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

例1 求函数$z=xe^{2y}$在点$P(1, 0)$处沿从点P到点$Q(2, -1)$的方向的方向导数.

解 $\overrightarrow{PQ}=(1, -1)$, 与 l 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

因为函数可微分, 且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2,$$

所以所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例2. 求函数 $z=3x^2y-y^2$ 在点$P(2, 3)$沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大方向的方向导数.

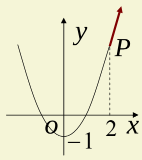
解:将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x=x \\ y=x^2-1 \end{cases}$$

它在点 P 的切向量为 $\left.(1, 2x)\right|_{x=2}=(1,4)$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\qquad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\left.\left[6xy\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+(3x^2-2y)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right]\right|_{(2,3)}=\frac{60}{\sqrt{17}}$$



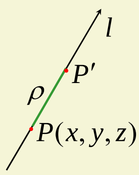
对于三元函数$f(x,y,z)$,类似的有

定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 存在下列极限:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}\overset{\text{记作}}{=}\frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}, \\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

则称 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的方向导数.



定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点**沿任意方向 l** 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 为 l 的方向角.

例3. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解: $\vec{n}=(4x,6y,2z)|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$

同理得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$

$\therefore\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\dfrac{1}{14}(6\times2+8\times3-14\times1)=\dfrac{11}{7}$

二、梯度

设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，都可确定一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j},$$

这向量称为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**梯度**(gradient)，记作 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$，或者 $\nabla f(x_0,y_0)$ 即

$$gradf(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

其中 $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ 称为（二维）向量微分算子或Nabla算子，$\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，$\mathbf{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 l 同方向的单位向量，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

$$=\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{e}_l=|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)|\cdot\cos(\mathbf{grad}f(x_0,y_0),\hat{\ }\mathbf{e}_l).$$

可以看出方向导数就是梯度在射线 l 上的投影，当方向 l 与梯度的方向一致时，方向导数取得最大值. 所以沿梯度方向是函数 $f(x,y)$ 在这点增长最快的方向.

函数在一点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

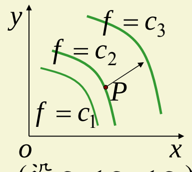
梯度的几何意义

对函数 $z=f(x,y)$，曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ z=C\end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 L^*: $f(x,y)=C$ 称为函数 f 的**等值线**. 举例

设 f_x, f_y 不同时为零，则 L^* 上点 P 处的法向量为

$$(f_x, f_y)|_P=\text{grad}\,f|_P$$

同样，对应函数 $u=f(x,y,z)$，有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$，当各偏导数不同时为零时，其上点 P 处的法向量为 $\text{grad}\,f|_P$.

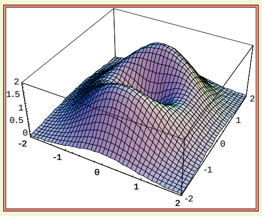


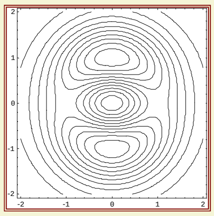
(设 $c_1<c_2<c_3$)

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

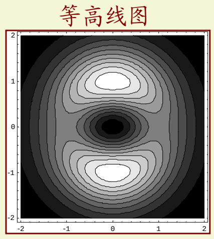
等高线图举例

$$z=(x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$




等高线图

这是利用数学软件Mathematica绘制的曲面及其等高线图，带阴影的等高线图中，亮度越大对应曲面上点的位置越高


带阴影的等高线图

例 4 求 $\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 这里 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$,

所以 $\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i}-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$.

例5 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求 $\mathbf{grad}\,f(1,-1,2)$.

解 $\mathbf{grad}\,f=(f_x, f_y, f_z)=(2x, 2y, 2z)$,

于是 $\mathbf{grad}\,f(1,-1,2)=(2,-2,4)$.

例6 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P_0(1,1)$ 求

(1) $f(x,y)$ 在 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数

(2) $f(x,y)$ 在 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数

(3) $f(x,y)$ 在 P_0 处变化率为零的方向。

解(1) $f(x,y)$ 在 P_0 处沿 $\nabla f(1,1)$ 方向增加最快。

$$\nabla f(1,1)=(x\vec{i}+y\vec{j})|_{(1,1)}=\vec{i}+\vec{j}$$

所求的方向 $\vec{n}=\dfrac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$,

方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial n}\right|_{(1,1)}=|\nabla f(1,1)|=\sqrt{2}$.

解(2) $f(x,y)$在P_0处沿 $-\nabla f(1,1)$ 方向减少最快。

所求的方向 $\vec{n}_1=-\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$

方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial n_1}\right|_{(1,1)}=-|\nabla f(1,1)|=-\sqrt{2}.$

(3) $f(x,y)$在P_0处沿垂直于 $\nabla f(1,1)$ 方向变化率为零。

所求的方向 $\vec{n}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$

或 $\vec{n}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$

作业：*p*-108 习题9-7

2，3，6，7，8

三 数量场与向量场

如果对于空间区域G内的任一点M, 都有一个确定的数量$f(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个数量场.

如果对于空间区域G内的任一点M, 都有一个确定的向量$\boldsymbol{F}(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个向量场.

一个数量场可用一个数量函数$f(M)$来确定.

一个向量场可用一个向量函数$\boldsymbol{F}(M)$来确定, 而

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$是点M的数量函数.

备用题 1. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad}u|_M=\underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$ (92考研)

解: $\operatorname{grad}u|_M=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x,y,z 具有轮换对称性

$$=\left.\left(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2}\right)\right|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}(1,2,-2)$$

三 数量场与向量场

如果对于空间区域G内的任一点M, 都有一个确定的数量$f(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个数量场.

如果对于空间区域G内的任一点M, 都有一个确定的向量$\boldsymbol{F}(M)$, 则称在这空间区域G内确定了一个向量场.

势与势场

向量函数$\mathbf{grad}f(M)$确定了一个向量场(梯度场), 它是由数量场$f(M)$产生的. 通常称函数$f(M)$为这个向量场的势, 而这个向量场又称为势场.

必须注意, 任意一个向量场不一定是势场, 因为它不一定是某个数量函数的梯度场.

2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点$A(1,0,1)$ 处沿点A指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{1/2}$. (96考研)

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

例 6 试求数量场 $\frac{m}{r}$ 所产生的梯度场, 其中常数 $m>0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为原点 O 与点 $M(x,y,z)$间的距离.

解 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{mx}{r^3},$

同理 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{my}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{mz}{r^3}.$

从而 $\mathbf{grad}\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right).$

记 $\boldsymbol{e}_r=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}$, 它是与 $\overrightarrow{OM}$ 同方向的单位向量, 则

$$\mathbf{grad}\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r.$$

第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值及最大值、最小值

二、条件极值 拉格朗日乘数法

一、多元函数的极值及最大值、最小值

定义 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义, 如果对于该邻域内任何异于(x_0, y_0)的点(x, y), 都有

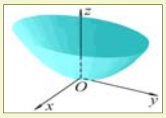
$$f(x, y)<f(x_0, y_0)\ (\text{或}f(x, y)>f(x_0, y_0)),$$

则称函数在点(x_0, y_0)有极大值(或极小值)$f(x_0, y_0)$.

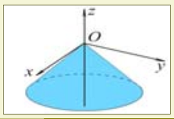
极大值、极小值统称为极值 ,使函数取得极值的点称为极值点.

例如 :

$z=3x^2+4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;



$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;



$z=xy$ 在点 (0,0) 无极值.

求函数$z=f(x,y)$极值的一般步骤:

第一步 解方程组 $f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$

求出实数解，得所有驻点.

第二步 对于每一个驻点(x_0, y_0),

求出二阶偏导数的值A、B 、C.

第三步 定出AC–B²的符号，再判定是否是极值.

定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f_x'(x_0,y_0)=0\,,\ f_y'(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值 , 故

$$z=f(x,y_0) \text{ 在 } x=x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z=f(x_0,y) \text{ 在 } y=y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

注 1. 使偏导数都为 0 的点称为驻点 .但驻点不一定是极值点.

如, $z=xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$

$\therefore f(1,0)=-5$为极小值;

2. 从几何上看, 这时如果曲面$z=f(x, y)$在极值点(x_0, y_0, z_0)处有切平面, 则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

成为平行于xOy坐标面的平面$z=z_0$.

类似地可推得, 如果三元函数$u=f(x, y, z)$在点(x_0, y_0, z_0)具有偏导数, 则它在点(x_0, y_0, z_0)具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0)=0,\ f_y(x_0, y_0, z_0)=0,\ f_z(x_0, y_0, z_0)=0.$$

在点(1,2) 处 $A=12, B=0, C=-6$

$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)$ 不是极值;

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=-12\times 6<0,\ \therefore f(-3,0)$不是极值;

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$

$\therefore f(-3,2)=31$为极大值.

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0\,,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)\,,B=f_{xy}(x_0,y_0)\,,C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当$AC-B^2>0$时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$时, 不能确定 , 需另行讨论.

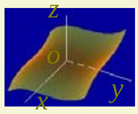
证明见 第九节.

例2.讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点 , 并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值



可能为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ 0 \end{cases}$, 因此 $z(0,0)$ 不是极值.

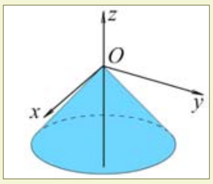
当 $x^2+y^2\ne 0$时, $z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$为极小值.

注

不是驻点也可能是极值点.

例如, 函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处有极大值, 但(0, 0)不是函数的驻点.



因此, 在考虑函数的极值问题时, 除了考虑函数的驻点外, 如果有偏导数不存在的点, 那么对这些点也应当考虑.

多元函数的最值

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

最值应用问题

依据

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{函数 } f \text{ 在闭域上连续}\\ \Downarrow \\ \text{函数 } f \text{ 在闭域上可达到最值}\end{array}}$$

最值可疑点 $\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点P 时,

$f(P)$ 为极小**(大)** 值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小**(大)** 值

例3 某厂要用铁板做成一个体积为8m³的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取多少时, 才能使用料最省.

解 设水箱的长为x m, 宽为y m, 则所用材料的面积为

$$A=2(xy+y\cdot\frac{8}{xy}+x\cdot\frac{8}{xy})=2(xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y})\ (x>0,\ y>0).$$

令 $A_x=2(y-\frac{8}{x^2})=0$, $A_y=2(x-\frac{8}{y^2})=0$, 得 $x=2, y=2$.

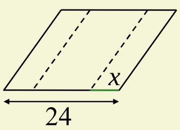
根据题意可知, 水箱所用材料面积的最小值一定存在, 并在开区域$D=\{(x, y)|x>0, y>0\}$内取得. 又因为函数在D内只有一个驻点(2, 2), 所以此驻点一定是A的最小值点.

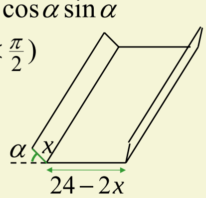
因此当水箱的长、宽、高各为2m时,水箱所用的材料最省.

例4. 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

解: 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α, 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2})$$





$$\boxed{\begin{array}{c}A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha\\ (D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2})\end{array}}$$

令 $\begin{cases}A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0\\ A_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$

$\Big\downarrow\ \sin\alpha\neq0,\ x\neq0$

$$\begin{cases}12-2x+x\cos\alpha=0\\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$$

解得: $\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ$, $x=8\,(\text{cm})$

由题意知,最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

二、条件极值 拉格朗日乘数法

极值问题 $\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制}\\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外, 还有其它条件限制}\end{cases}$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

转化 $\Big\downarrow$ 从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2 拉格朗日乘数法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述，设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$, 则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题，故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases}f_x+\lambda\varphi_x=0\\ f_y+\lambda\varphi_y=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$

引入辅助函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

则极值点满足: $\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0\\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0\\ F_\lambda=\varphi=0\end{cases}$

辅助函数F 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$下的极值.

设 $F = f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y = f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z = f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi=0 \\ F_{\lambda_1}=\psi=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

作拉格朗日函数

$$L(x,p,c)=(p-c)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\mu(c-c_0+k\ln x)$$

令
$$L_x=(p-c)+\lambda+k\frac{\mu}{x}=0 \quad ③$$
$$L_p=x+\lambda aMe^{-ap}=0 \quad ④$$
$$L_c=-x+\mu=0 \quad ⑤$$

将①代入④得 $\lambda=-\frac{1}{a}$, 由⑤得 $\frac{\mu}{x}=1$

将以上结果及①, ②代入③, 得
$$p-c_0+k(\ln M-ap)-\frac{1}{a}+k=0$$

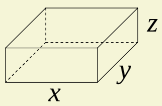
解得 $\quad p=p^*=\dfrac{c_0-k\ln M+\frac{1}{a}-k}{1-ak}$

因问题本身最优价格必定存在, 故此 p^* 即为所求.

例5. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

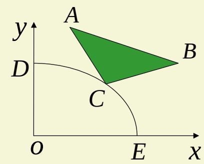
解: 设 x, y, z 分别表示长、宽、高, 则问题为求$x, y,$ z 使在条件 $xyz=V_0$ 下水箱表面积 $S=2(xz+yz)+xy$ 最小.

令 $F=2(xz+yz)+xy+\lambda(xyz-V_0)$



解方程组
$$\begin{cases} F_x = 2z+y+\lambda yz=0 \\ F_y = 2z+x+\lambda xz=0 \\ F_z = 2(x+y)+\lambda xy=0 \\ F_\lambda = xyz-V_0=0 \end{cases}$$

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (x>0, y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y),

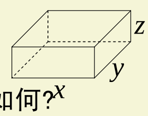
则 $\quad S_\triangle=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

得唯一驻点 $x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda=\frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时, 所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x=y=z=\sqrt[3]{V_0}$

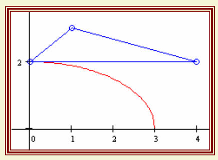
2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F=2(xz+yz)+2\,xy+\lambda(xyz-V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组
$$\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$$



得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx1.646$

而$S_D=2$, $S_C=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

例6. 设某电视机厂生产一台电视机的成本为c, 每台电电视机的销售价格为p, 销售量为x, 假设该厂的生产处于平衡状态, 即生产量等于销售量. 根据市场预测, x 与p 满足关系:

$$x=Me^{-ap} \quad (M>0,\ a>0) \qquad ①$$

其中M是最大市场需求量, a是价格系数. 又据对生产环节的分析, 预测每台电视机的生产成本满足:

$$c=c_0-k\ln x \quad (k>0,\ x>1) \qquad ②$$

其中c_0是生产一台电视机的成本, k是规模系数. 问应如何确定每台电视机的售价 p, 才能使该厂获得最大利润?

解: 生产x台获得利润 $\quad u=(p-c)x$

问题化为在条件①, ②下求$u=(p-c)x$ 的最大值点.

作业: **p-118 习题9-8**

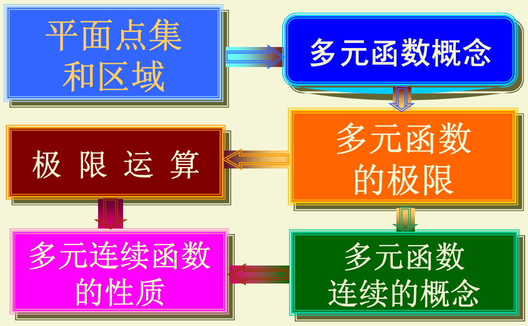
2, 3, 4, 7, 8, 9

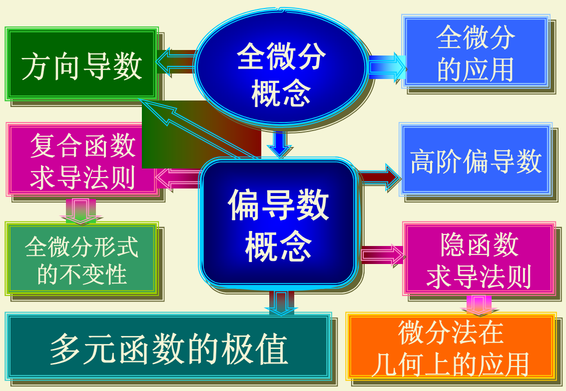
第九章 习题课

主要内容

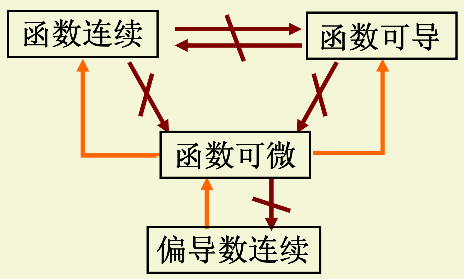
典型例题

一、主要内容





多元函数连续、可导、可微的关系



二、典型例题

例1. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在。

解：令 $y=kx$，原式 $=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k}=0$

沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$ 时

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1$$

二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在。

例2 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\quad (r>0)$

则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $r\to 0$.

$$0\le\left|\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{r^2|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|}{r}$$

$$=r|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|\ \le 2r,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

例3. 证明：
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0) 处连续且偏导数存在，但不可微 .

提示: 利用 $2xy\le x^2+y^2$，知

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$$

故 f 在 (0,0) 连续;

又因 $f(x,0)=f(0,y)=0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

而 $\quad \Delta f|_{(0,0)}=\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$

当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，

$$\frac{\Delta f|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$$

$$\not\to 0$$

所以 f 在点(0,0)不可微！

例4 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$, (f 具有二阶连续偏导数),

求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'x+f_2'\frac{1}{x})=x^4 f_1'+x^2 f_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})$$

$$=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+xf_{22}'',$$

例4 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$, (f 具有二阶连续偏导数),

求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

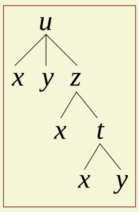
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1'+x^2 f_2')$$

$$=4x^3 f_1'+x^4[f_{11}''y+f_{12}''(-\frac{y}{x^2})]+2xf_2'$$

$$+x^2[f_{21}''y+f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''.$$

例5. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, 且 $z=x^2\sin t$, $t=\ln(x+y)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.



解: $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot(2x\sin t+x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y})$

$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+f_3'\cdot(\ x^2\cos t\cdot\frac{1}{x+y})$

例6 设 $u=f(x,y,z)$, $\varphi(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$,

(f,φ 具有一阶连续偏导数), 且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$, 显然 $\frac{dy}{dx}=\cos x$,

求 $\frac{dz}{dx}$, 对 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两边求 x 的导数,得

$$\varphi_1'\cdot2x+\varphi_2'\cdot e^y\frac{dy}{dx}+\varphi_3'\frac{dz}{dx}=0,$$

于是可得, $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cdot\cos x\varphi_2')$,

故 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\cos x\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cdot\cos x\varphi_2')\frac{\partial f}{\partial z}$.

例7. 设 $z=xf(x+y)$, $F(x,y,z)=0$, 其中 f 与 F 分别具有一阶导数或偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$. (99 考研)

解 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+xf'\cdot(1+\frac{dy}{dx})\\ F_1'+F_2'\frac{dy}{dx}+F_3'\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf'\\ F_2'\frac{dy}{dx}+F_3'\frac{dz}{dx}=-F_1'\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-xf' & f+xf'\\ F_2' & -F_1'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-xf' & 1\\ F_2' & F_3'\end{vmatrix}}=\frac{xF_1'f'-xF_2'f'-fF_2'}{-xf'F_3'-F_2'}$$

$(xf'F_3'+F_2'\neq0)$

练习题

1. 设函数 f 二阶连续可微, 求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=xf(\frac{y^2}{x})$

(2) $z=f(x+\frac{y^2}{x})$

(3) $z=f(x,\frac{y^2}{x})$

解答提示:

(1) $z=xf(\frac{y^2}{x})$: $\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(\frac{y^2}{x})\cdot\frac{2y}{x}=2yf'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf''\cdot(-\frac{y^2}{x^2})=-\frac{2y^3}{x^2}f''$$

(2) $z=f(x+\frac{y^2}{x})$: $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{2y}{x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^2}f'+\frac{2y}{x}f''\cdot(1-\frac{y^2}{x^2})$$

$$=-\frac{2y}{x^2}f'+\frac{2y}{x}(1-\frac{y^2}{x^2})f''$$

(3) $z=f(x,\frac{y^2}{x})$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^2}f_2'+\frac{2y}{x}(\ f_{21}''-\frac{y^2}{x^2}f_{22}'')$$

例8 求 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿点的向径 r_0 的方向导数，问 a,b,c 具有什么关系时此方向导数等于梯度的 模?

解 $\because\quad r_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad |r_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{|r_0|},\quad \cos\beta=\frac{y_0}{|r_0|},\quad \cos\gamma=\frac{z_0}{|r_0|}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\frac{x_0}{|r_0|}+\frac{2y_0}{b^2}\frac{y_0}{|r_0|}+\frac{2z_0}{c^2}\frac{z_0}{|r_0|}=\frac{2}{|r_0|}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的梯度为

$$gradu|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M i+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M j+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M k$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}i+\frac{2y_0}{b^2}j+\frac{2z_0}{c^2}k,$$

$$|gradu|_M=2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}},$$

当 $a=b=c$ 时， $\because\quad |gradu|_M=\frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M=\frac{\frac{2}{a^2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M=|gradu|_M,$$

故当 a,b,c 相等时,此方向导数等于梯度的 模.

例9. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解: 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x+y-2z-2=0$ 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt6}|x+y-2z-2|$$

问题归结为

$$\begin{cases}\text{目标函数:}\ (x+y-2z-2)^2\ \ (\min)\\ \text{约束条件:}\ \ x^2+y^2-z=0\end{cases}$$

作拉氏函数

$$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$$

$$\boxed{F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)}$$

$$\text{令}\begin{cases}F'_x=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0\\ F'_y=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0\\ F'_z=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0\\ z=x^2+y^2\end{cases}$$

解此方程组得唯一驻点 $x=\frac14,\ y=\frac14,\ z=\frac18.$

由实际意义最小值存在，故

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt6}\left|\frac14+\frac14-\frac14-2\right|=\frac{7}{4\sqrt6}$$

例10. 在第一卦限作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使其在三坐标轴上的截距的平方和最小,并求切点.

解: 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$,

则切平面的法向量为

$$\vec n=(F_x,F_y,F_z)\Big|_M=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程

$$\frac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$

切平面在三坐标轴上的截距为 $\frac{a^2}{x_0},\ \frac{b^2}{y_0},\ \frac{c^2}{z_0}$

问题归结为求 $s=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2$

在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F=(\frac{a^2}{x})^2+(\frac{b^2}{y})^2+(\frac{c^2}{z})^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0)$$

令

$$\begin{cases}F_x=-2(\frac{a^2}{x})\frac{a^2}{x^2}+2\lambda\frac{x}{a^2}=0\\ F_y=-2(\frac{b^2}{y})\frac{b^2}{y^2}+2\lambda\frac{y}{b^2}=0\\ F_z=-2(\frac{c^2}{z})\frac{c^2}{z^2}+2\lambda\frac{z}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}\longrightarrow\ \text{唯一驻点}\begin{cases}x=\frac{a\sqrt a}{\sqrt{a+b+c}}\\ y=\frac{b\sqrt b}{\sqrt{a+b+c}}\\ z=\frac{c\sqrt c}{\sqrt{a+b+c}}\end{cases}$$

由实际意义可知 $M\left(\frac{a\sqrt a}{\sqrt{a+b+c}},\frac{b\sqrt b}{\sqrt{a+b+c}},\frac{c\sqrt c}{\sqrt{a+b+c}}\right)$ 为所求切点 .

作业：*p*-129 总习题九

5，6，9，11,13，15，17