

颗粒材料的组构 - 应力关系与等效应力法

董彤^{1,2}, 孔亮², 郑颖人¹, 王兴², 刘云³

(1. 陆军勤务学院 岩土力学与地质环境保护重庆市重点实验室, 重庆 401331; 2. 青岛理工大学 理学院, 山东 青岛 266033;
3. 重庆工业职业技术学院, 重庆 401120)

摘要: 对已有各向异性本构模型的建模思想进行系统地回顾, 指出组构方向性的刻画大都归结为组构 - 应力坐标变换问题。对于各向异性材料而言, 沿不同方向的土骨架的有效承载面积不同, 总应力需要以各组分实际承载面积为权重进行分配。通过引入变换张量, 提出等效应力张量, 使之可以综合地描述颗粒材料的各向异性水平、材料内部真实应力的方向以及组构 - 应力的方向关系。将颗粒材料的宏观各向异性视为细观尺度上各向异性应力作用在各向同性材料上的结果, 以等效应力张量描述细观尺度上的各向异性应力, 以已有本构模型来刻画等效各向同性材料的力学特性, 提出对现有的各向同性破坏准则与本构模型进行“各向异性化”改造的一般性方法——等效应力法。以 SMP 准则为例进行“各向异性化”改造, 通过与已有试验结果对比, 验证了这种“各向异性化”改造的合理性和有效性。

关键词: 土力学; 各向异性; 等效应力张量; 组构张量; 应力方向; 等效应力法

中图分类号: TU 431

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2018)07 - 1741 - 07

The fabric-stress relationship and the equivalent stress method of granular materials

DONG Tong^{1,2}, KONG Liang², ZHENG Yingren¹, WANG Xing², LIU Yun³

(1. *Chongqing Key Laboratory of Geomechanics and Geoenvironmental Protection, Army Logistics University of PLA, Chongqing 401311, China*; 2. *School of Sciences, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266033, China*;
3. *Chongqing Industry Polytechnic College, Chongqing 401120, China*)

Abstract: The methods in establishing the existing anisotropic constitutive models are reviewed systematically. It is pointed out that the description of the fabric direction should be attributed to the coordinate transformation of fabric and stress. For anisotropic materials, the total stress needs to be allocated according to the actual bearing area of each component, because the effective bearing areas of soil skeleton in different directions are different. Therefore, by introducing the transformation matrix, the equivalent stress tensor is proposed to describe the anisotropy of granular materials, the true stress inside the material and the relationship between the fabric direction and the stress direction. Therefore, the material anisotropy in macro-scale can be regarded as the result of the application of anisotropic stress on an equivalent isotropic material in micro-scale. The equivalent stress tensor is used to describe the anisotropic stress and the existing isotropic model is used to describe the mechanical property

收稿日期: 2017 - 12 - 19; **修回日期:** 2018 - 05 - 03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572165, 51778311); 重庆市教委科学技术研究项(KJ1730413)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11572165 and 51778311) and Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission(Grant No. KJ1730413)

作者简介: 董彤(1990 -), 男, 2011年毕业于后勤工程学院土木工程专业, 现为博士研究生, 主要从事岩土本构关系方面的研究工作。E-mail: dt0706@126.com。通讯作者: 孔亮(1969 -), 男, 现任教授、博士生导师, 主要从事岩土本构模型与海洋岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: qdkongliang@163.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.1623

of the equivalent isotropic material. A general method of transforming the existing isotropic failure criterion and constitutive model into anisotropic ones, named “Equivalent Stress Method”, is put forward from the perspective of stress. Finally, the SMP criterion is transformed into anisotropic one as an example. The comparison with the existing experimental results proves the rationality and validity of the anisotropic transformation.

Key words: soil mechanics; anisotropy; equivalent stress tensor; fabric tensor; stress direction; equivalent stress method

1 引言

由大量离散颗粒组成的颗粒物质在一定条件下具有时空有序结构^[1]。与液体和固体等一般材料体系不同,在细观尺度上,颗粒材料沿各个方向的物理结构与力学结构均存在差异,导致材料的力学性质具有显著的方向依赖性,对于由不规则颗粒组成的岩土材料而言,该现象尤为显著^[2-3]。

为了模拟各向异性颗粒材料的力学特性,常规方法是借助各向异性参数,实现对现有各向同性本构模型各向异性修正。S. Pietruszczak 和 Z. Mroz^[4]将应力矢量在各向异性主轴上进行投影,提出了一个能考虑应力加载方向各向异性参数。在此基础上,P. V. Lade 等^[5-7]建立了可以描述材料各向异性行为的本构模型。从组构张量和应力张量的联合不变量的角度,X. S. Li 和 Y. F. Dafalias^[8]定义了一个标量性质的各向异性参数以描述材料的各向异性和应力的方向性。随后,X. S. Li 等^[9-16]相继确立了各向异性岩土材料的屈服准则、状态参数、孔隙比以及本构模型。尽管上述方法较好地反映了材料的各向异性力学行为,但在建立各向异性本构模型的过程中,仍将组构张量与应力方向归纳为一个标量化的各向异性参数,以修正基于平均应力原理建立的本构模型,虽然预测结果与试验数据较为吻合,但在此过程中难免需要额外地引入人为的假定。

与上述方法不同,Y. Tobita 等^[17-20]先后采用变换应力的方式建立了各向异性本构模型。考虑到新的应力变量的提出必须有严格的理论基础,T. Dong 和 L. Kong^[21]基于岩土公理化理论体系,从平衡方程出发计算得到了骨架的真实应力。本文在此基础上,对组构的方向性进行了系统地剖析,探讨各向异性颗粒材料的骨架真实应力。通过变换应力的方法,尝试提出一种可以将现有土体各向同性破坏准则和本构模型进行“各向异性化”改造的一般性方法并进行验证。

2 组构张量

2.1 组构张量

颗粒材料的力学性质与细观尺度上微结构单元的排布密切相关。为了方便地从细观尺度上研究颗粒材料的各向异性,本文以三维空间的表征体元(representative elemental volume, 简记为 REV)为研究对象,基于细观结构矢量 \mathbf{n} 的统计值来定义一个张量,称为组构张量,以定量地描述各向异性材料细观结构的分布与排列。组构张量 \mathbf{F} 的基本形式满足:

$$F_{ij} = \int_V E(\mathbf{n}) n_i n_j dV \quad (1)$$

式中: V 为 REV 的体积; \mathbf{n} 为细观研究对象的方向矢量, $E(\mathbf{n})$ 为矢量 \mathbf{n} 的分布函数。

由张量分析可知,对于二阶组构张量,必然存在一组正交标准化基 $\hat{e}_i (i=1, 2, 3)$,使得组构张量 \mathbf{F} 可以化为对角型标准形,与这组基对应的坐标系即为主组构坐标系。

土体在形成过程中,受重力等外部作用的影响,不规则颗粒按一定规律进行排列,形成若干沉积面,平行于沉积面的各个平面内力学特性相近,在垂直于沉积面的方向则具有轴对称,即呈现出横观各向同性^[22]。此时, \mathbf{F} 可以表述为其主组构的形式^[2],即

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3+\Delta} \begin{bmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: Δ 为组构参数,描述了颗粒各向异性程度。当 $\Delta=0$ 时,组构张量的主对角元素相同,表明材料沿各个方向的性质相同,即各向同性;当 $\Delta=\pm 1$ 时,材料的各向异性程度最大。

2.2 组构的方向性

由于细观颗粒和组构张量均具有方向性,因此,在描述材料沿各个方向的各向异性特征时,参考坐标系的选取至关重要。根据处理方法和理论基础,将客户组构方向性的代表性研究成果分类并汇总于表 1。如表 1 所示,从组构的定义出发,将颗粒材

表 1 组构方向性的处理方法一览表

Table 1 List of methods for the directionality of fabric of geomaterials

方法	理论基础	代表方程	代表性成果	
组构对物理坐标的分解	颗粒对物理坐标分解	$F_{ij} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\theta + b_n \sin k\theta) \right] d\theta$	M. Oda ^[2]	
	高阶张量展开	$F = F_m (1 + \Omega_{ij} e_i e_j + \Omega_{ijkl} e_i e_j e_k e_l + \dots)$	B. Muhunthan 等 ^[23-24]	
组构与应力的方向关系	组构在应力方向投影	$\eta = \sum F_i \frac{\text{tr}(\eta_i \sigma^2)}{\text{tr} \sigma^2}$	P. V. Lade 等 ^[5-7, 10]	
	组构 - 应力联合不变量	$A = \frac{s_{ij} d_{ij}}{\sqrt{s_{mn} s_{mn}} \sqrt{d_{pq} d_{pq}}}$	X. S. Li 等 ^[8-9, 11-16, 25]	
骨架真实应力	颗粒接触应力	细观力学	$\tilde{\sigma} = L(F^{-1})\sigma$	C. S. Chang 等 ^[19, 26-28]
		与张量分析相结合	$\tilde{\sigma}_{ij} = (\sigma_{ik} F_{kj}^{-1} + F_{ik}^{-1} \sigma_{kj}) / 6$	Y. Tobita 等 ^[17-18, 20-21]

注：θ 为细观研究对象的矢量方向，E(θ) (0 ≤ θ ≤ 2π) 为沿 θ 方向的颗粒长轴的分布函数；k 为组构张量的阶数；F_m 为组构的平均值；η₀ 为 η 的平均值，Ω_{ij} 描述了 η 在空间中的分布特征；s_{ij} = σ_{ij} - pδ_{ij}，d_{ij} = F_{ij} - F_{kk}δ_{ij}/3，分别为偏应力张量和偏组构张量，δ_{ij} 为克罗内克张量；L 为与组构张量有关的物理量。

料细观结构矢量对物理坐标进行分解，根据沿不同方向分量的大小修正模型参数，继而得到能反映土体各向异性的本构模型。借助细观成像技术，M. Oda^[2]在细观尺度上对矢量 **n** 分解后再求统计量。基于张量运算的性质，组构张量可以直接写成迹为 0 的对称张量 Ω_{ij}，Ω_{ijkl} … 的线性方程的形式。

由于应力也具有方向性，为了综合考虑应力加载方向与材料自身各向异性水平之间的关系，S. Pietruszczak 和 Z. Mroz^[4]将组构张量在主应力方向上进行投影，得到与各向异性相关的参数 η。从张量角度，X. S. Li 和 Y. F. Dafalias^[8]提出了组构 - 应力联合不变量，在此基础上，Z. Gao 等^[11]定义了一个标准化的各向异性参数 A。

由此可见，组构方向性的问题大都可以归结为组构 - 参考坐标间的坐标变换问题。坐标变换在数学上需要借助弦函数进行描述，进而决定了参数 η、参数 A 以及各组构分量的大小随参考坐标系的变化始终满足弦函数形式。

2.3 骨架真实应力

在外部荷载作用下，材料内部形成连续的力链与力传递网络。对于颗粒材料，通常假设细观颗粒为刚体或弹性体，颗粒间力学性质相同^[2, 14, 19]。有效应力原理认为，任意平面上受到的总应力 σ_{ij} 可分为有效应力 σ' 和孔隙水压力 u 两部分，其间关系总是满足：

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + u\delta_{ij} \quad (3)$$

实际上，式(3)暗含了如下关系：

$$f = \sigma S = \sigma' S + uS \quad (4)$$

式中：f 为外部荷载，S 为研究截面的面积。

如式(4)所示，尽管将有效应力定义为颗粒骨架所传递的应力，但有效应力原理仍将有效应力和孔压视为均匀作用在应力单元上的应力。事实上，骨架的真实应力应以骨架的面积为权重进行分配。对于各向异性材料而言，沿不同方向的土骨架的有效承载面积不同，总应力需要以实际承载面积为权重进行分配：

$$f_{ij} = \sigma_{ii} S_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} S_{ij} + uS\delta_{ij} \quad (5)$$

式中：σ̃ 为骨架真实应力，S_{ij} 为研究截面上骨架的实际承载面积。

由此可见，式(3)所表示的有效应力为虚拟的应力，是对骨架真实应力均质化、标量化的结果。而式(5)所示的骨架真实应力考虑了颗粒骨架的截面积与分布，是基于张量的观点所定义的应力。

为了便于表述，采用接触面矢量来定义组构张量，并对其进行无量纲化处理，有

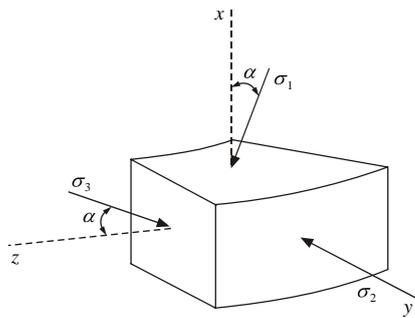
$$3F_{ij} = S_{ij} S^{-1} \quad (6)$$

那么，由式(4)~(6)有

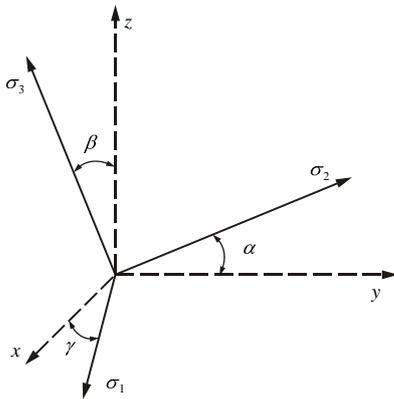
$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ii} F_{ij}^{-1} / 3 \quad (7)$$

因此，如式(7)所示的组构 - 应力关系刻画了材料内应力的分布，表 1 还列举了部分基于不同的理论所得到的等效应力张量的表达。为了同描述平均应力的有效应力张量进行区分，将这种包含了材料各向异性信息的应力张量称为等效应力张量 (Equivalent stress tensor)，记作 σ̃。

需要注意的是，式(7)仅在 σ 与 F 基矢相同时成立。然而在实际建模过程中，普遍采用主应力张量与主组构张量，二者往往不共基矢。如图 1(a)所示，



(a) 扭剪试验中绕 y 轴的基旋转



(b) 三次基旋转

图 1 三维基旋转示意图

Fig.1 Basic rotations in 3 dimensional space

在扭剪试验中，试样通常沿垂直方向发生沉降，即主组构空间与物理空间重合，而大、小主应力轴绕中主应力方向旋转 α 角，此时，需要将主组构张量通过坐标变换张量 \mathbf{M} 进行坐标变换，其矩阵形式为

$$\mathbf{M}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

如图 1(b)所示，更为一般的情况是应力主坐标与组构主坐标之间存在三次基旋转，绕 x 轴与 z 轴旋转 β 角与 γ 角的基旋转坐标变换张量分别为

$$\mathbf{M}_z(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (10)$$

由此可得

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_y(\alpha)\mathbf{M}_z(\beta)\mathbf{M}_x(\gamma) \quad (11)$$

式(11)表述了三维空间中应力与组构不共基矢时的坐标变换张量。通过坐标变换张量 \mathbf{M} 将主组构张量转换到主应力空间，继而得到三维空间中等效应力张量的一般形式：

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{im}M_{nl}F_{mn}^{-1}\sigma_{lj} / 3 \quad (12)$$

对于各向同性材料，组构张量满足 $F_1 = F_2 = F_3 = 1/3$ ，此时等效应力可以退化为有效应力。对于主应力张量与主组构张量共基矢时， $M_{ij} = \delta_{ij}$ ，此时式(12)可以退化为式(7)；对于各向同性材料， $F_1 = F_2 = F_3 = 1/3$ ，式(12)所定义的等效应力则等同于有效应力。

3 各向异性本构模型的建模理论

3.1 修正模量法

为了描述材料的各向异性力学特性，传统的方法是从宏观角度出发，在已有各向同性本构关系的基础上，通过试验和理论刻画材料的各向异性柔度张量(如各向异性胡克定律)，其建模思想可以概括为

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl}\sigma_{kl} = \mathbf{C}_{ijkl}(\mathbf{C}^0, \mathbf{F})\sigma_{kl} \quad (13)$$

式中： \mathbf{C} 为各向异性柔度张量， \mathbf{C}^0 为各向同性柔度张量。

因此，建模的关键在于：通过定义不同形式的标量化各向异性参数，以修正材料的弹塑性模量、屈服准则、流动法则等，进而对已有各向同性柔度张量进行各向异性刻画^[15-15]。

3.2 等效应力法

有效应力原理表明，土的变形与强度特性取决于有效应力。对于各向异性材料而言，等效应力取代有效应力以刻画骨架的真实应力。此外，细观力学和离散元数值分析的基本思想表明：对于各向异性材料而言，尽管颗粒的接触与排布使得材料沿不同方向的有效承载面积不同，但颗粒间相互作用依然与各向同性材料一致，所满足的力学规律并没有因颗粒形状和排布的各向异性而发生本质的变化^[14, 19]。因此，颗粒材料在宏观尺度上所表现出的各向异性可以等效为各向异性应力作用在各向同性的骨架(理想颗粒)上的结果。

式(13)中柔度张量 \mathbf{C}^0 定义了有效应力作用下颗粒骨架的力学性质。对于各向异性材料，颗粒骨架的力学性质仍可以通过 \mathbf{C}^0 进行描述，只是作用在颗粒骨架上的内应力变成了等效应力。因此，等效应力法建模的基本思想可以概括为

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl}^0 \tilde{\sigma}_{kl}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{C}_{ijkl}^0 \tilde{\sigma}_{kl} \quad (14)$$

尽管 \mathbf{C}^0 为各向同性柔度张量，但等效应力张量包含了组构大小、应力大小以及组构 - 应力的方向

关系，即通过变换应力的方式，将材料的各向异性信息吸收于等效应力张量中，因而可以很好地描述材料的各向异性力学行为。

综上所述，等效应力法以等效应力张量作为材料细观与宏观力学行为的纽带，对各向异性材料的物理 - 力学模型进行合理地简化，在不额外地修正材料基本力学规律的情况下，实现对各向同性材料的本构模型进行“各向异性化”改造，进而可以描述材料的各向异性力学特征。

4 应用举例

董 彤等^[29]对非线性模型进行了各向异性化改造，较好地预测了土的应力 - 应变关系。本文以 SMP 准则为例进一步验证等效应力法对强度准则改造的可行性与精确性。

4.1 等效 SMP 准则

采用等效应力张量将无黏性土的 SMP 准则中的有效应力进行替换，得到等效 SMP 准则(简记为 ESMP 准则)：

$$F(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - 9\tilde{I}_3}{9\tilde{I}_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \tilde{\varphi} \quad (15)$$

式中： $\tilde{\varphi}$ 为各向同性颗粒骨架的内摩擦角； \tilde{I}_1 ， \tilde{I}_2 和 \tilde{I}_3 分别为等效应力的第一、第二和第三不变量，且满足：

$$\tilde{I}_1 = tr(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 \quad (16)$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} [tr(\tilde{\sigma})^2 - tr(\tilde{\sigma}^2)] = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3 + \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_1 \quad (17)$$

$$\tilde{I}_3 = \det(\tilde{\sigma}_{ij}) = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3 \quad (18)$$

由此可见，等效应力法建立各向异性本构模型的关键在于测定材料的组构张量。然而，在建模过程中，很难通过式(1)的形式将细观结构矢量进行严格的观测并统计^[21]。尽管通过拟合试验数据可以得到组构参数，但这样会弱化所建模型的理论基础。更方便可靠的途径是根据实际需要赋予组构张量以恰当的宏观物理意义，并通过试验间接测定组构张量的具体取值。

对于横观各向同性材料而言，各向异性参数 Δ 和骨架的内摩擦角 $\tilde{\varphi}$ 均可以通过如图 2 所示水平与竖直试样的三轴试验测得。

对于水平试样， $\alpha = 0^\circ$ ，变换张量 $M_{ij} = \delta_{ij}$ ，因此：

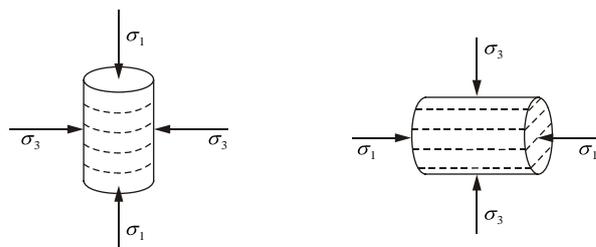


图 2 水平与竖直试样三轴试验示意图
Fig.2 Triaxial tests on horizontal and vertical specimen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \tilde{\sigma}_1 F_1 \\ \sigma_2 &= \tilde{\sigma}_2 F_2 \\ \sigma_3 &= \tilde{\sigma}_3 F_3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

为了便于书写，记 k 为第一和第三主应力比，下标“0”与“90”意味着该参数为 $\alpha = 0^\circ$ 与 $\alpha = 90^\circ$ 条件下测得，满足：

$$k_0 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_{\alpha=0^\circ} = \frac{\tilde{\sigma}_1 F_1}{\tilde{\sigma}_3 F_3} = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} \quad (20)$$

对于竖直试样， $\alpha = 90^\circ$ ，有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \tilde{\sigma}_1 F_3 \\ \sigma_2 &= \tilde{\sigma}_2 F_2 \\ \sigma_3 &= \tilde{\sigma}_3 F_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$k_{90} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_{\alpha=90^\circ} = \frac{\tilde{\sigma}_1 F_3}{\tilde{\sigma}_3 F_1} = \frac{1 + \sin \varphi_{90}}{1 - \sin \varphi_{90}} \quad (22)$$

相似地，记颗粒骨架的第一和第三主应力比 \tilde{k} 为

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_3} = \frac{1 + \sin \tilde{\varphi}}{1 - \sin \tilde{\varphi}} \quad (23)$$

联立式(2)，(20)，(22)，(23)可得

$$\frac{F_1}{F_3} = \sqrt{\frac{k_0}{k_{90}}} \quad (24)$$

最终可以通过试验测定 φ_0 和 φ_{90} 来计算得到组构参数 Δ 和骨架的内摩擦角 $\tilde{\varphi}$ 。二者分别满足：

$$\Delta = \frac{1 - \sqrt{k_0 / k_{90}}}{1 + \sqrt{k_0 / k_{90}}} \quad (25)$$

$$\tilde{\varphi} = \arcsin \frac{\tilde{k} - 1}{\tilde{k} + 1} \quad (26)$$

4.2 试验验证

A. V. Abelev 和 P. V. Lade^[30]采用 Santa Monica 海滩密砂，在不同应力罗德角 θ_σ 下，进行了一系列的真三轴试验，试验结果见图 3。通过竖直试样的三轴压缩($\theta_\sigma = 0^\circ$ ， $b = 0$)与水平试样的三轴压缩($\theta_\sigma = 120^\circ$ ， $b = 1$)试验所测内摩擦角求解参数 Δ 与 $\tilde{\varphi}$ 。需要注意的是，如图 3(b)所示， $\theta_\sigma = 0^\circ$ 时所测

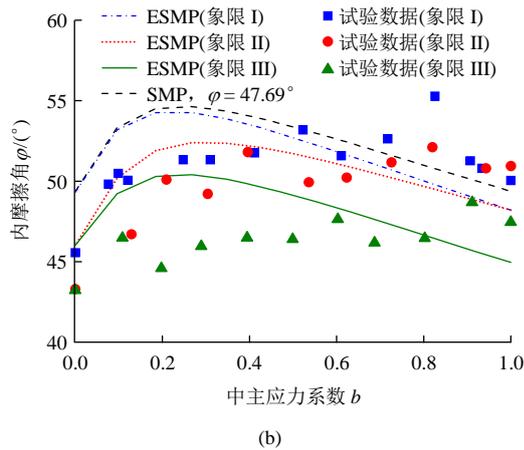
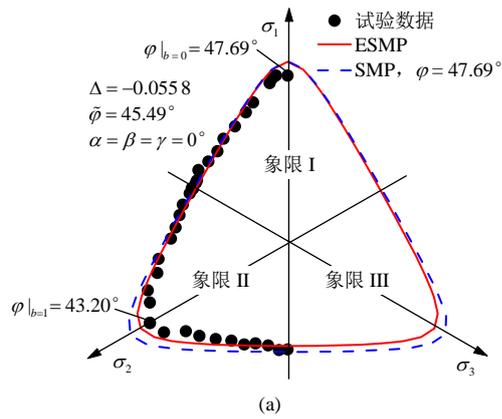


图3 真三轴试验验证

Fig.3 Verification with the true triaxial tests

得的内摩擦角明显低于其他象限 I 中的内摩擦角，因此，采用象限 I 中的前 2 个内摩擦角的平均值将 $\phi|_{b=0}$ 修正为 47.69° 。

P. V. Lade 等^[31]进行了一系列的定轴剪切试验，研究了大主应力方向角 α 与中主应力系数 b 对 Nevada 砂强度的影响。 $\alpha = 0^\circ$ ， $b = 0$ 条件下所测内摩擦角 $\phi_{0,0} = 41.20^\circ$ 以及 $\alpha = 90^\circ$ ， $b = 0$ 条件下所测内摩擦角 $\phi_{90,0} = 33.20^\circ$ 计算所得 ESMP 模型参数分别为 $\Delta = -0.088$ ， $\tilde{\phi} = 37.31^\circ$ 。

图 3 与 4 分别给出了 SMP 准则和 ESMP 准则

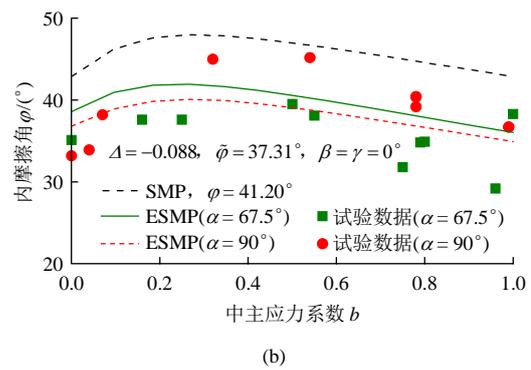
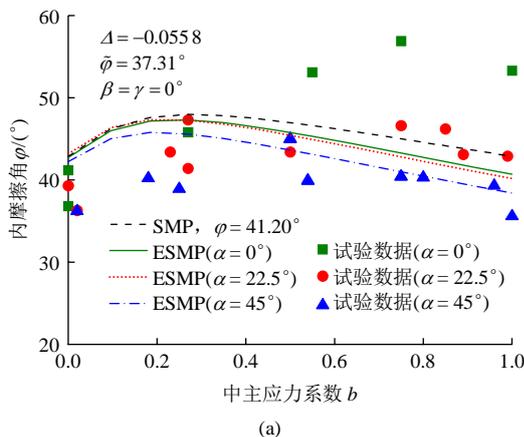


图4 定轴剪切试验验证

Fig.4 Verification with shear test of fixed direction of σ_1

对真三轴试验和定轴剪切试验中试样强度的预测结果，与试验数据对比表明，忽略 SMP 准则在描述中主应力对内摩擦角的影响时存在的不足，采用等效应力法所建立的 ESMP 准则可以综合反映 3 个主应力的大小与方向对各向异性材料强度的影响。

5 结论

(1) 组构具有方向性，可以以物理坐标和应力坐标为参考进行刻画。组构方向性的问题大都可以归结为组构 - 参考坐标间的坐标变换问题，因而，组构大小随参考坐标系的变化始终满足弦函数形式。

(2) 有效应力为虚拟的应力，是对骨架真实应力均质化、标量化的结果，因而无法刻画各向异性材料的骨架应力。各向异性材料沿不同方向的土骨架的有效承载面积不同，总应力需要以各组分实际承载面积为权重进行分配。在骨架真实应力基础上提出了等效应力张量，可以综合地描述颗粒材料的各向异性水平、材料内部骨架应力的大小以及组构 - 应力的方向关系。

(3) 材料在宏观尺度上的各向异性可以视为在细观尺度上各向异性应力作用在各向同性材料上的结果。以等效应力张量描述材料内部的各向异性应力、以现有各向同性本构模型来刻画颗粒骨架的力学特性，从应力的新角度，提出了对现有的各向同性破坏准则与本构模型进行“各向异性化”改造的一般性方法——等效应力法。

(4) 以 SMP 准则为例进行各向异性化改造，建立了等效 SMP 准则。对于横观各向同性材料，新准则仅增加 2 个参数，且均可通过少量常规三轴试验测得。与已有试验结果对比表明，新准则可以综合地反映主应力的大小与方向对各向异性材料强度的

影响。

参考文献(References):

- [1] 孙其诚, 程晓辉, 季顺迎, 等. 岩土类颗粒物质宏 - 细观力学研究进展[J]. 力学进展, 2011, 41(3): 351 - 371.(SUN Qicheng, CHENG Xiaohui, JI Shunying, et al. Advances in the micro-macro mechanics of granular soil materials[J]. Advances in Mechanics, 2011, 41(3): 351 - 371.(in Chinese))
- [2] ODA M. Mechanics of granular materials: an introduction[M]. Netherlands: A. A Balkema, 1999: 2 - 39.
- [3] 董 彤, 郑颖人, 孔 亮, 等. 考虑主应力方向的土体非线性弹性模型[J]. 岩土力学, 2017, 38(5): 1 373 - 1 378.(DONG Tong, ZHENG Yingren, KONG Liang, et al. Strength criterion and slipping plane of anisotropic sand considering the direction of the major principal stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(5): 1 373 - 1 378.(in Chinese))
- [4] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor[J]. Computers and Geotechnics, 2000, 26(2): 105 - 112.
- [5] LADE P V. Failure criterion for cross-anisotropic soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(1): 117 - 124.
- [6] 黄茂松. 土体稳定与承载特性的分析方法[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(1): 1 - 34.(HUANG Maosong. Analysis methods for stability and bearing capacity of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(1): 1 - 34.(in Chinese))
- [7] KONG Y, ZHAO J, YAO Y. A failure criterion for cross-anisotropic soils considering microstructure[J]. Acta Geotechnica, 2013, 8(6): 665 - 673.
- [8] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, 128(10): 868 - 880.
- [9] LI X S, DAFALIAS Y F. Anisotropic critical state theory: role of fabric[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, 138(3): 263 - 275.
- [10] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(11): 1 319 - 1 333.
- [11] GAO Z, ZHAO J, YAO Y. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(22/23): 3 166 - 3 185.
- [12] YAO Y P, KONG Y X. Extended UH model: three-dimensional unified hardening model for anisotropic clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, 138(7): 853 - 866.
- [13] ZHAO J, GUO N. Rotational resistance and shear-induced anisotropy in granular media[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014, 27(1): 1 - 14.
- [14] 李学丰, 孔 亮, 袁 琪, 等. 宏细观结合各向异性砂土的变形特性模拟[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2016, 44(2): 173 - 179.(LI Xuefeng, KONG Liang, YUAN Qi, et al. Deformation analysis of anisotropic sand using the method of macro-meso incorporation[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2016, 44(2): 173 - 179.(in Chinese))
- [15] 曹 威, 王 睿, 张建民. 横观各向同性砂土的强度准则[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(11): 2 026 - 2 032.(CAO Wei, WANG Rui, ZHANG Jianmin. New strength criterion for sand with cross-anisotropy[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(11): 2 026 - 2 032.(in Chinese))
- [16] 董 彤, 郑颖人, 孔 亮, 等. 考虑主应力轴方向的土体各向异性强度准则与滑动面研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(4): 736 - 742.(DONG Tong, ZHENG Yingren, KONG Liang, et al. Mechanical mechanism of the non-coaxiality of geomaterials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(4): 736 - 742.(in Chinese))
- [17] TOBITA Y. Fabric tensors in constitutive equations for granular materials[J]. Soils and Foundations, 1989, 29(4): 91 - 104.
- [18] ODA M. Inherent and induced anisotropy in plasticity theory of granular soils[J]. Mechanics of Materials, 1993, 16(1): 35 - 45.
- [19] CHANG C S, LIU Y. Stress and fabric in granular material[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2013, 3(2): 10 - 15.
- [20] YAO Y, TIAN Y, GAO Z. Anisotropic UH model for soils based on a simple transformed stress method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, 41(1): 54 - 78.
- [21] DONG T, KONG L. Equivalent stress tensor and anisotropic failure criterion of soils[C]// International Conference on Transportation Infrastructure and Materials. Lancaster Pennsylvania: DEStech Publication, Inc, U S A., 2017: 644 - 652.
- [22] 姚仰平, 孔玉侠. 横观各向同性土强度与破坏准则的研究[J]. 水利学报, 2012, 42(1): 43 - 50.(YAO Yangping, KONG Yuxia. Study on strength and failure criterion of cross-anisotropic soil[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, 42(1): 43 - 50.(in Chinese))
- [23] MUHUNTHAN B, CHAMEAU J L, MASAD E. Fabric Effects on the Yield Behavior of Soils[J]. Soils and Foundations, 1996, 36(3): 85 - 97.
- [24] LI X, YU H S. Tensorial characterisation of directional data in micromechanics[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48(14/15): 2 167 - 2 176.
- [25] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(11): 1 319 - 1 333.
- [26] BATHURST R J, ROTHENBURG L. Observations on stress-force-fabric relationships in idealized granular materials[J]. Mechanics of Materials, 1990, 9(1): 65 - 80.
- [27] EMERIAULT F, CHANG C S. Interparticle forces and displacements in Granular Materials[J]. Computers and Geotechnics, 1997, 20(3/4): 223 - 244.
- [28] 李建红, 沈珠江. 结构性土的微观破损机理研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(8): 1 525 - 1 532.(LI Jianhong, SHEN Zhujiang. Study on mechanism of micro-failure of structured soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(8): 1 525 - 1 532.(in Chinese))
- [29] 董 彤, 孔 亮, 郑颖人, 等. 考虑岩土材料各向异性与应力方向性的等效非线性模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(2): 506 - 512.(DONG Tong, KONG Liang, ZHENG Yingren, et al. Equivalent nonlinear model considering the anisotropy and the stress directionality of geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(2): 506 - 512.(in Chinese))
- [30] ABELEV A V, LADE P V. Effects of cross anisotropy on three-dimensional behavior of sand. I: stress-strain behavior and shear banding[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 129(2): 160 - 165.
- [31] LADE P V, RODRIGUEZ N M, DYCK E J V. Effects of principal stress directions on 3d failure conditions in cross-anisotropic sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, 140(2): 04013001.