第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.9 目的与要求 (续)

- 掌握Newton公式, 能用于具体计算.

三. (12 分) 设 r_1, r_2, r_3 是 ax^3+bx^2+cx+d 的根, 求 3 次多项式 $f(x)$, 使得 $r_1(r_2+r_3)$, $r_2(r_1+r_3)$, $r_3(r_1+r_2)$ 为其根.

解 因为 r_1, r_2, r_3 是 ax^3+bx^2+cx+d 的根, 所以 $-\frac{b}{a}=r_1+r_2+r_3$, $\frac{c}{a}=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3$, $-\frac{d}{a}=r_1r_2r_3$. 设所求多项式为 $p(x^3+qx^2+rx+s)$, 因此, $-q=r_1(r_2+r_3)+r_2(r_1+r_3)+r_3(r_1+r_2)=2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)=\frac{c}{a}$, $r=r_1(r_2+r_3)r_2(r_1+r_3)+r_1(r_2+r_3)r_3(r_1+r_2)+r_2(r_1+r_3)r_3(r_1+r_2)$ 是对称齐次多项式, 首项为 $r_1^2r_2^2$, 指标组为 $(2,2,0)$, 在其后的指标组为 $(2,1,1)$, 故 $r=\sigma_2^2+u\sigma_1\sigma_3$, 计算得 $u=3$, 故 $r=\frac{c^2+3bd}{a^2}$. $-s=r_1(r_2+r_3)r_2(r_1+r_3)r_3(r_1+r_2)=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2=\frac{d}{a^3}(bc-ad)$. 故所求多项式为 $p(a^3x^3-a^2cx^2+(ac^2+3bd)x+(ad^2-bcd))$, 其中 p 为非零数.

Newton公式1

- 幂和对称多项式 $s_0 = n, s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \ldots$
- Newton公式

  当$k \le n$时

  $$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0;$$

  当$k > n$时 $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0.$
- 引理 设

  $$f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

  则

  $$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \ldots + s_{k-1} x + s_k) f(x) + g(x)$$

  其中$\deg g(x) < \deg f(x)$.

Newton公式2

- 定理:

设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是数域F上的对称多项式,则必存在F上唯一的一个多项式$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$使得

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

例子

- 例6 设n=3, 请将s_1, s_2, s_3, s_4表示为初等对称多项式的多项式.
- 例7 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 4 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4 \end{cases}$$

- 例8 求一元n次多项式, 使得$s_1=s_2=\ldots=s_{n-1}=0$.

原图 320 × 240

rank=10

rank=30

rank=50

特征值特征向量

- 图像处理、人脸识别
- **Google搜索引擎PageRank**
- 文本聚类、数据挖掘
- 物理，材料，力学等方面（应力、应变张量）
- …

小结

✓Newton公式

下章

☞特征值和特征向量

– 建议复习:齐次线性方程组解、矩阵的秩

– 系统复习: 线性空间、线性映射理论

做 吧

- 作业: § 5.9 3, 4($n \geqslant 6$), 6, 7.
- 选做题: § 5.9 5