第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

复习

- 字典排列法

  首项指数组$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, 其他项指数组$(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, 满足$i_1=j_1, \ldots, i_{k-1}=j_{k-1}, i_k > j_k$.

- 按字典排列法, 两多项式乘积的首项等于两多项式首项的乘积
- 消去律 若F上n元多项式$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, 则$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$.

复习

- 齐次排列法将多项式各次数相同的项放在一起, 按次数高低表示为若干个齐次多项式之和.

多元多项式_7

- 定义4 一个多项式称为k次齐次多项式, 如果它的每个单项式都是k次, 即

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

其中$i_1+i_2+\ldots+i_n=k$.

- 性质1 两个次数相同的齐次多项式之和若非零, 必为同次齐次多项式.
- 性质2 任意两个齐次多项式的乘积仍为齐次多项式. (作业)

多元多项式_8

- 定义5 齐次排列法将多项式各次数相同的项放在一起, 按次数高低表示为若干个齐次多项式之和.
- 注 一般的, 一个n元多项式的齐次排列法不唯一. 齐次排列法首项不唯一, 但首项的次数是该多项式的次数.

例子

- 例4 齐次排列法重排下列4元多项式:

  1) $3x_2^6x_3^3 + x_1^3x_2x_3^2 + 5x_2^3x_4^3 + 2x_1^3x_2x_3^4 + 6x_2^4x_4^2$

  2) $x_1^3x_2^2 + x_1^4$

- 例5 两个齐次多项式的乘积是齐次多项式, 反之亦然. (作业. 提示: 反证法)

例子

- 例 设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是F上n元多项式, 且$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\neq 0$. 若对一切使$g(a_1, a_2, \ldots, a_n)\neq 0$的$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, 均有

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$$

  则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$.

- 例* 设$A\in F^{n\times n}$, 证明:

$$\det A^* = (\det A)^{n-1}.$$

- 注 用此方法可将一些关于矩阵命题中要求某个矩阵可逆的条件去掉.

§5.9 目的与要求-1

- 正确理解对称多项式的基本定理;
- 掌握将对称多项式化为初等对称多项式的方法;

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

对称多项式_1

- 定义: 设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是F上n元多项式, 若对任意的$1 \leqslant i \neq j \leqslant n$均有:

$$f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$$

则称$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是F上n元对称多项式.

- 注1 对称多项式在未定元的任一置换下不变, 即若$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$是$(1, 2, \ldots, n)$的任一排列, 则

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$$

- 注2 对称多项式按字典排列的首项指数满足

$$i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_n.$$

例子

- 例1 判断下列3元多项式是否对称多项式?

  $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; $x_1^2+x_1x_2$; $x_1+x_2-x_1x_2$

- 例2

  写出含单项$x_1^2x_2$的项数最少的三元对称多项式;

  写出含单项$x_1^2x_2$的所有可能的三元三次对称多项式.

对称多项式_2

- 对称多项式性质:

对称多项式的和是对称多项式;
对称多项式的乘积是对称多项式;
对称多项式的多项式是对称多项式.

注: F上对称多项式全体构成F-代数.

对称多项式_3

- 初等对称多项式:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n$$

对称多项式_4

- 对称多项式基本定理:

  设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是数域F上的对称多项式, 则必存在F上唯一的一个多项式$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$使得

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

- 注: 证明是构造性的, 证明过程实际上给出求$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$的方法.

例子

- 例3 将$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2+ x_2^2)(x_1^2+ x_3^2)(x_2^2+ x_3^2)$表示成初等对称多项式的多项式.
- 例4 将$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 3x_1+3x_2$ 表示成初等对称多项式的多项式.
- 注 若对称多项式非齐次, 则表示为若干个齐次多项式之和, 再分别表示成初等对称多项式的多项式.

小结

✓初等对称多项式 σ_i

✓对称多项式基本定理

下节

☞幂和对称多项式 s_i

☞**Newton**公式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

做 吧

- 作业: § 5.9 1, 2

  补充1: 写出含单项$x_1^2x_2$的所有可能的三元三次对称多项式;

  补充2: 写出含单项$x_1^2x_2$的所有可能的三元三次齐次多项式.
- 挑战: 矩阵命题中, 哪些可去掉"可逆"条件? 请罗列, 并证之.