第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§5.7 有理系数和整系数多项式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.7 目的与要求-2

- 熟练应用**Eisenstein**判别法;
- 掌握整系数多项式的有理根与多项式的关系;
- 了解**Q**上多项式分解问题的一些技巧与方法.

整系数多项式_2

- 定义2: 设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式, 若a_n, a_{n-1}, …, a_0的最大公约数为1, 则称$f(x)$为本原多项式.

- Gauss引理: 两个本原多项式之积是本原多项式.

- 定理1: 整系数多项式$f(x)$在有理数域上可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在整数上可约.

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html

Eisenstein判别法

- **Eisenstein判别法:**

  设多项式

  $$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

  是整系数多项式, $a_n\neq 0$, $n\geqslant 1$, p是一个素数, 若 $p|a_i$, $0\leqslant i\leqslant n-1$. 但 p不整除 a_n, 且 p^2不整除 a_0, 则$f(x)$在有理数域上不可约.
- 注1 p为素数是重要的.
- 注2 p若不存在, 不能断定$f(x)$是否可约.

整系数多项式_5

- 回顾1: 设多项式$f(x)$是整系数多项式, $p(x)$是本原多项式. 若$f(x) = c\,p(x)$, 则c必为整数.
- 回顾2: 设多项式$p(x)$, $q(x)$都是本原多项式. 若$p(x) = cq(x)$, 则c必为1或−1.
- 定理2: 任一整系数多项式总可以表示为一个整数和若干个不可约的本原多项式的乘积, 且在不计因式的次序和符号的前提下, 这种分解是唯一的.

整系数多项式的根_1

- 定理4 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是整系数多项式, 则有理数$q/p$是$f(x)$的根的必要条件是 $p|a_n$, $q|a_0$, 其中p, q是互素的整数.
- 注 首一的整系数多项式的有理根必为整数, 且是a_0的因数.
- 例5 判断x^3+6x^2+9x+1是否有有理根?
- 例6 证明$f(x)=x^5-12x^3+36x+12$没有有理根.

整系数多项式的根_2

- 定理5 设整数c是整系数多项式$f(x)$的根, 则 $\dfrac{f(1)}{c-1}, \dfrac{f(-1)}{c+1}$ 都是整数.
- 注1 此法仅适用于整数根的判定, 一般有理根不适用.
- 注2 $\dfrac{f(1)}{c-1}, \dfrac{f(-1)}{c+1} \in \mathbf{Z}$仅是断定整数$c$是$f(x)$根的必要条件, 非充分条件. 如2非$x^2+2$的根.
- 例6 证明$f(x)=x^5-12x^3+36x+12$没有有理根.

例子

- 例7 求 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}$ 的有理根.

- 例8 设 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两不同的整数. 求证$f(x)$在Q上不可约.

- 11-12年 证明: $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+2$ 在Q上不可约, 其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为两两不同的偶数.

下列多项式中________在有理数域上可约.

(A) $f(x)=x^4-3x^2+12x+6$; (B) $f(x)=x^2+x+1$;

(C) $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$; (D) $f(x)=x^4+4$.

若$f(x)$是整系数多项式, 则下列说法正确的是________.

(A) $f(x)$有有理根的充要条件是$f(x)$在有理数域上可约;

(B) 若既约分数$\frac{q}{p}$是$f(x)$的根, 则q可整除$f(x)$的常数项;

(C) 若$\alpha\in\mathbb{Z}$, $\alpha\neq\pm1$且$\frac{f(1)}{\alpha-1}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ 均为整数, 则$f(\alpha)=0$;

(D) 若$f(x)$有重因式, 则$f(x)$在$\mathbb{Q}$上必有重根.

小结

✓**Q**上不可约多项式的判定与证明

✓有理系数多项式的有理根

下节

☞ 多元多项式

做 吧

- 作业: § 5.7 1，4.

  补充1: 证明x^p+px+1(p为奇素数)在Q上不可约.

  补充2:证明：$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+2$ 在Q上不可约, 其中 $a_1,a_2,...,a_n$为两两不同的偶数.

  重做: 设 x^3+3x^2+mx+n 的3个根成等差数列, $x^3-(m-2)x^2+(n-3)x+8$的3个根成等比.

  求m, n.（注意不要遗漏复根情形）

- 选做: $t\neq 1, f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)+t$在Q上是否一定可约. 若是请证明, 若否请举反例. (09-10)