第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

复习

- **C上不可约因式只能是1次多项式**
- **C上非常数多项式的标准分解式:**

$$f(x)=c(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\ldots(x-a_m)^{e_m}$$

其中$a_i\in$ **C**且两两互异, e_i正整数, $1\leqslant i\leqslant m, \sum_{i=1}^{m} e_i=n.$

- **R上不可约因式只能是1次或2次多项式**
- **R上非常数多项式的标准分解式:**

$$f(x)=d(x-a_1)^{e_1}\cdots(x-a_m)^{e_m}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_rx+c_r)^{l_r}$$

其中$a_i, b_j, c_j\in$ **R**, e_i, l_j正整数, $b_j^2-4c_j<0$, a_i两两互异, 且$x^2+b_jx+c_j$两两互素, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots, r$, $\sum_{i=1}^{m} e_i+2\sum_{j=1}^{r} l_j=n.$

§5.7 有理系数和整系数多项式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§5.7 目的与要求-1

- 理解整系数多项式在Q上可约的关系;
- 熟练应用Eisenstein判别法;
- 了解Q上多项式分解问题的一些技巧与方法.

整系数多项式_1

- 定义1 设 $f(x)$是整系数多项式, $\deg f(x) \geqslant 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的整系数多项式之积, 即

$$f(x) = g(x)\, h(x),$$

其中$g(x)$, $h(x)$是整系数多项式, 且

$\deg g(x) < \deg f(x)$, $\deg h(x) < \deg f(x)$.

则称 $f(x)$在整数上可约, 否则$f(x)$在整数上不可约.

整系数多项式_2

- 定义2: 设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式, 若a_n, a_{n-1}, …, a_0的最大公约数为1, 则称$f(x)$为本原多项式.

- Gauss引理: 两个本原多项式之积是本原多项式.

整系数多项式_3

- 引理1: 设多项式$f(x)$是整系数多项式, $p(x)$是本原多项式. 若$f(x) = c\,p(x)$, 则c必为整数.
- 推论: 设多项式$p(x)$, $q(x)$都是本原多项式. 若$p(x) = cq(x)$, 则c必为1或−1.

整系数多项式_4

- 定理1: 整系数多项式$f(x)$在有理数域上可约 ⇔ $f(x)$在整数上可约.
- 注 有理系数多项式在有理数域上的可约问题可以转化为整系数多项式在整数上的可约问题.

例子

- 例 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1$, 其中 $a_1,a_2,...,a_n$ 为两两不同的整数. 求证$f(x)$在Q上不可约.

Eisenstein判别法

- **Eisenstein判别法:**

  设多项式

  $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

  是整系数多项式, $a_n\neq 0$, $n\geqslant 1$，p是一个素数, 若 $p|a_i$，$0\leqslant i\leqslant n-1$. 但 p不整除 a_n, 且 p^2不整除 a_0, 则$f(x)$在有理数域上不可约.
- 注1 p为素数是重要的.
- 注2 p若不存在, 不能断定$f(x)$是否可约.

例子

- 例1 对任意$n \geq 1$, $x^n - 2$在Q上不可约.
- 例2 证明当n为素数时, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$在Q上不可约.
- 例3 若p为素数, 证明$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$在Q上不可约.

小结

✓**Eisenstein定理含义与应用**

✓**Q上不可约多项式的判定与证明**

下节

☞ 有理系数多项式的有理根

做 吧

- 作业: § 5.7 2, 3.

  补充1: 对任意$n, m \geqslant 1$, 两两不同的素数$p_1, p_2, \ldots, p_m$, 证明$x^n - p_1 p_2 \ldots p_m$在Q上不可约.

  补充2: 证明x^3-5x+1在Q上不可约.

- 选作: 复习题17.

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004