第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.6 复系数和实系数多项式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.6 目的与要求

- 理解代数基本定理与复系数多项式标准分解式;
- 熟练掌握Viète定理;
- 熟练掌握实系数多项式的标准分解式;
- 学习一些解决实系数多项式问题的方法和技巧.

复习

- ✓ F上x的一元多项式的标准分解式

$$f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\dots p_m^{e_m}(x)$$

其中$p_i(x)$是两两互素首一的F上不可约多项式, e_i正整数.

- ✓ e_i的确定
- ➢ $p_i(x)$的确定

复系数多项式

- 代数学基本定理 每个C上次数大于0的多项式都在C上至少有一个根.
- 定理2 C上的一元n次多项式在C内恰有n个根(重根按重数计).
- 推论1 C上的不可约多项式都是一次的.
- C上非常数多项式的标准分解式:

$$f(x)=c(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\dots(x-a_m)^{e_m}$$

其中c为$f(x)$的首项系数, $a_i\in$C且两两互异, e_i正整数, $i=1,2,\dots,m$, $\sum_{i=1}^{m}e_i=n$.

韦达(Fransois Viète,1540-1603)

法国十六世纪最有影响的数学家之一

最重要的贡献是对代数学的推进

- ✓ 最早系统地引入代数符号，推进了方程论的发展。
- ✓ 创设了大量的代数符号，用字母代替未知数
- ✓ 指出了根与系数之间的关系
- ✓ 著有《分析方法入门》、《论方程的识别与订正》等多部著作

详情进入课程网站

gdjpkc.xmu.edu.cn→应用与实验→数学家简介

Viète定理_根与系数的关系

- **Viète定理** 设

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in F[x]$$

在F中有n个根 $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$,则

$$\sum_{1 \le i \le n} c_i = -a_{n-1},$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} c_i c_j = a_{n-2},$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} c_i c_j c_k = -a_{n-3},$$

$\ldots,$

$$c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^n a_0.$$

实系数多项式

- 引理1 设$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是实系数多项式. 若复数$a + bi$ ($b \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$)是$f(x)$在C上的根, 则$a - bi$也是$f(x)$在C上的根.
- 推论2 实数域上不可约多项式或为一次或为二次多项式ax^2+bx+c, 其中$b^2 - 4ac<0$.
- 定理4 R上非常数多项式的标准分解式:

$$f(x) = d(x-a_1)^{e_1}\cdots(x-a_m)^{e_m}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdots(x^2+b_rx+c_r)^{l_r}$$

其中a_i, b_j, $c_j \in \mathbf{R}$, e_i, l_j 正整数, $b_j^2 - 4c_j<0$, a_i两两互异, 且$x^2+b_jx+c_j$两两互素, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots, r$, $\sum_{i=1}^{m} e_i + 2\sum_{j=1}^{r} l_j = \deg f(x)$.

例子

- 例1 写出下列多项式根与系数的关系:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\ a_3\neq 0.$$

- 例2 求 $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$的所有复根.
- 例3* 设 $(x^2+x+1)|((x+1)^n-x^n-1)$, 求$n$.
- 例4设$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$的n个根$c_1, c_2, \ldots, c_n$两两互异, 且$c_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, 求C上以$\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2},\ldots,\frac{1}{c_n}$为根的多项式.

例子

- 例5 设$f(x)\in C[x]$. 若对于任意的$c\in R$, $f(c)\in R$. 求证$f(x)\in R[x]$.
- 例6 设$f(x)$是次数大于1的首一实系数多项式. 若$f(x)$ 无实根, 则存在实系数多项式 $g(x)$, $h(x)$, 使得
$$f(x)=g^2(x)+h^2(x),$$
其中
$$\deg g(x)>\deg h(x).$$

小结

- ✓ **C、R上不可约多项式**
- ✓ **C、R上标准分解式**
- ✓ **Viete定理**

下节

☞ 有理系数与整系数多项式（续）

做 吧

- **作业**: § **5.6 1, 2, 3, 4, 5;**
  复习题 **15;**
  补充: 设 x^3+3x^2+mx+n 的3个根成等差数列,
  $x^3-(m-2)x^2+(n-3)x+8$的3个根成等比. 求m, n.
  （注意不要遗漏复根情形）
- **思考**: § **5.6 2.**
- **选作:** 复习题**16**的逆命题成立吗?若成立, 请证明; 若不成立, 请举反例.
- **挑战:** 请给出实系数多项式$f(x)$没有实根的充要条件. 此命题还可以有哪些推广？