第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.4 标准分解式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.4 目的与要求(续)

- 掌握因式分解定理的存在性与唯一性的证明方法;
- 熟练利用标准分解式解决相关问题;
- 理解重因式的概念与判定方法.

因式分解基本定理_1

- 多项式的标准分解式 设$\deg f(x) \geqslant 1$, 则

$$f(x) = cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\dots p_m^{e_m}(x)$$

其中$p_i(x)$是首一的两两互素不可约多项式, $e_i \geqslant 1 (i = 1, 2, \dots, m)$.

重因式_1

- 定义2 不可约多项式$p(x)$称为$f(x)$的k重因式($k>1$), 如果 $p^k(x) \mid f(x)$ 并且 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$.

重因式_2

- 定理2 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的$k(>1)$重因式, 则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式;反之未必.
- 推论1 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$ 的k重因式$\Leftrightarrow p(x)$是$(f(x), f'(x))$的$k-1$重因式.
- 推论2 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式, 则$p(x)$是$f(x), f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$的因式, 但不是$f^{(k)}(x)$的因式.
- 推论3 $p(x)$是不可约多项式, 则$p(x)$是$f(x)$的重因式$\Leftrightarrow$ $p(x)$是$f(x)$和 $f'(x)$ 的公因式.

重因式_3

- **定理1** 设 $f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\dots p_m^{e_m}(x)$, 其中 $p_i(x)$是首一的两两互素不可约多项式, $e_i \geqslant 1$ $(i=1, 2, \dots, m)$. 则

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\dots p_m^{e_m-1}(x).$$

- **注** $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x)\dots p_m(x).$

重因式_2

- <u>推论</u> $f(x)$无重因式$\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$.
- <u>注1</u> 判断$f(x)$是否有重因式无需进行因式分解;
- <u>注2</u> $p(x)$是否可约与数域有关.

  $p(x)$是否是$f(x)$的重因式与数域有关;

  但$f(x)$是否有重因式与数域无关.

例子

- 例5：设 $f(x)g(x)\neq 0$. 证明:存在自然数N, 使得当$n_1, n_2 > N$ 时, 总成立

$$(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x)).$$

- 例6：设 $f(x), g(x)\in F[x]$, 证明 $(f(x), g(x))\neq 1$ 的充要条件是存在F上不可约多项式 $p(x)$, 使得

$$p(x)\mid f(x)+g(x), p(x)\mid f(x)g(x).$$

小结

✓重因式

✓有无重因式的判定

下节

☞ 多项式函数

☞ 复系数和实系数多项式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

做 吧

复习、做小结

- 学习哪些概念，概念间有何关系和注意点？
- 哪些是重点、哪些是难点？
- 主要计算问题
  - 带余除法、辗转相除法、中国剩余定理等
- 主要证明方法
  - 如整除、多项式相等（唯一性）、
  - 最大公因式、互素、
  - 可约、重因式、有无重因式等

- §5.2 习题4 $x^d-1 \mid x^n-1 \Leftrightarrow d \mid n$.
- 选作1: 设$f(x)=x^m-1$, $g(x)=x^n-1$. 求证 $(f(x), g(x))= x^d-1$, 其中d是m和n的最大公因数.
- §5.3 习题6 $(f(x), g(x))=1$, 则$(f(x)\, g(x), f(x)+g(x))=1$.
- 复习1, 5, 7
- 补充2: 求次数最低的$g(x)$, 使得$g(x)$除以x^2+1后余式为$x+1$, 且$g(x)$除以x^3+x^2+1后余式为$2x^2+2$.
- 补充3: $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$在$F$上可约, 其中$a_na_0\neq 0$, 证明$g(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$在$F$上也可约.
- 补充4:设a, b, c两两互异, 分别用$(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$除$f(x)$的余式是r, s, t. 求用$(x-a)(x-b)(x-c)$除$f(x)$的余式.
- 选做2: $f(x)$, $g(x)$全不为零. 若$f(x)g(x)+ f(x)+g(x) = q(x)$是不可约多项式, 则$(f(x), g(x))=1$.