第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.4 标准分解式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.4 目的与要求(续)

- 掌握因式分解定理的存在性与唯一性的证明方法;
- 熟练利用标准分解式解决相关问题;
- 理解重因式的概念与判定方法.

不可约多项式_定义

- **定义1** 设 $f(x)\in F[x]$, 且 $\deg f(x)\geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 F 上可约多项式, 否则称为 F 上不可约多项式.
- **注1** $f(x)$在F上可约$\Leftrightarrow$ $f(x)$等于F上两个非零常数的乘积.
- **注2** F上不可约多项式$f(x)$的因式只能是F上非零常数c及$c\,f(x)$. 一次多项式必不可约.
- **注3**多项式的可约不可约 *与数域 F 有关吗？*

不可约多项式_性质1

- 命题1 设$f(x)$, $p(x)$是F上多项式, 且$p(x)$ 是F上不可约多项式, 则

  或者$(p(x), f(x)) = 1$ 或者$p(x)|f(x)$.

- 命题2 设$f(x)$, $g(x)$ $p(x)$是F上多项式, $p(x)$ 是F上不可约多项式, 且$p(x)|\ f(x)\ g(x)$, 则

  或者$p(x)|\ f(x)$或者$p(x)|g(x)$.

- 注1命题中$p(x)$不可约是重要的.
- 注2命题2中不可约多项式$p(x)$若既不整除$f(x)$, 也不整除$g(x)$, 则$p(x)$不整除$f(x)g(x)$.

不可约多项式_性质2

- 命题1的逆命题 设$p(x)\in F[x]$, $\deg p(x)>0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x)\in F[x]$, 或者 $(f(x),p(x))=1$ 或者$p(x)|f(x)$, 则$p(x)$在F上不可约.
- 命题2的逆命题设 $p(x)\in F[x]$, $\deg p(x)>0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x)$, $g(x)\in F[x]$, 如果 $p(x)|f(x)g(x)$ 必有 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$, 则 $p(x)$是F上不可约多项式(作业).
- 注 通过$p(x)$与F上任一个多项式或任意两个多项式的关系可判定$p(x)$在F上是否不可约.

不可约多项式_性质3

- **推论1** 设$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x) \in F[x]$, 且 $p(x)$是F上不可约多项式, 若

$$p(x) \mid f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_m(x),$$

则存在某i, $1 \leqslant i \leqslant m$, 使得

$$p(x) \mid f_i(x).$$

因式分解基本定理_1

- *多项式唯一分解定理* 设$f(x)\in F[x]$, 且$\deg f(x)\geqslant 1$, 则

  1) $f(x)=p_1(x)\,p_2(x)\ldots p_s(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是F上不可约多项式($i=1, 2, \ldots, s$);

  2) 若$f(x)=p_1(x)\,p_2(x)\ldots p_s(x)=q_1(x)\,q_2(x)\ldots q_t(x)$
  其中 $p_i(x)$, $q_j(x)$在F上不可约($i=1, 2, \ldots, s$; $j=1, 2, \ldots, t$), 则必有$s=t$且经过适当调换因式顺序后, $p_i(x)$与$q_i(x)$相伴($i=1, 2, \ldots, s$).

- 多项式的*标准分解式* 设$\deg f(x)\geqslant 1$, 则

$$f(x)=cp_1^{e_1}(x)\,p_2^{e_2}(x)\ldots p_m^{e_m}(x)$$

其中$p_i(x)$是首一的两两互素不可约多项式, $e_i\geqslant 1$($i=1, 2, \ldots, m$).

例子

- 例2 分别求多项式 $f(x)=6(x^8-4x^4+4)$ 分别在Q、R和C上的多项式的标准分解式.

因式分解基本定理_2

- 例3 设 $f(x)=p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x)\ldots p_m^{a_m}(x)$

  $g(x)=p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x)\ldots p_m^{b_m}(x)$

  $a_i\geqslant 0$, $b_i\geqslant 0$, $a_i+b_i>0$ ($i=1, 2, \ldots, m$), $p_i(x)$是首一的两两互素不可约多项式, 则

$1.\ f(x)g(x)=p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x)\ldots p_m^{c_m}(x), c_i=a_i+b_i, i=1,2,\ldots,m;$

$2.\ (f(x),g(x))=p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x)\ldots p_m^{d_m}(x), d_i=\min\{a_i,b_i\}, i=1,2,\ldots,m;$

$3.\ [f(x),g(x)]=p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\ldots p_m^{e_m}(x), e_i=\max\{a_i,b_i\}, i=1,2,\ldots,m;$

$4.\ [f(x),g(x)](f(x),g(x))=f(x)g(x);$

$5.\ f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow a_i\leq b_i, i=1,2,\ldots,m.$

重因式_1

- 定义2 不可约多项式$p(x)$称为$f(x)$的k重因式($k>1$), 如果 $p^k(x)\mid f(x)$ 并且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.
- 注 不可约多项式$p(x)$为$f(x)$的k重因式

$$\Leftrightarrow f(x)=p^k(x)h(x),(p(x),h(x))=1$$

- 例4 分别在R和C上叙述$p(x)=x^2+1$是否是$f(x)=(x^4-1)^3$的重因式. 若是, 是几重因式; 若不是,为什么?

重因式_2

- 多项式的导数

  设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

  $$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

  则

- $(f(x)+ g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x)$
- $(f^m(x))' = mf^{m-1}(x)\, f'(x)$.

重因式_3

- 定理1 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的$k(>1)$重因式, 则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.
- 注 逆命题成立么?
- 推论1 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$ 的k重因式⇔$p(x)$是$(f(x), f'(x))$的$k-1$重因式.
- 推论2 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式, 则$p(x)$是$f(x), f'(x),\ldots, f^{(k-1)}(x)$的因式, 但不是$f^{(k)}(x)$的因式.
- 推论3 $p(x)$是不可约多项式, 则$p(x)$是$f(x)$的重因式⇔ $p(x)$是$f(x)$和 $f'(x)$ 的公因式.

重因式_3

- **定理2** 设 $f(x)=cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\dots p_m^{e_m}(x)$, 其中$p_i(x)$是首一的两两互素不可约多项式, $e_i \geqslant 1$ $(i=1, 2, \dots, m)$. 则

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{e_1-1}(x)p_2^{e_2-1}(x)\dots p_m^{e_m-1}(x).$$

- **注1** $f(x)=(f(x), f'(x))f_1(x)$, 则$f_1(x)$ 无重因式且 $f_1(x)=cp_1(x)p_2(x)\dots p_m(x)$, 即 $f_1(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.
- **注2** $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x)\dots p_m(x).$

重因式_5

- **推论** $f(x)$无重因式$\Leftrightarrow$ $(f(x), f'(x)) = 1$.
- **注1** 判断$f(x)$是否有重因式无需进行因式分解;
- **注2** $p(x)$是否可约与数域有关.

  $p(x)$是否是$f(x)$的重因式与数域有关;

  但$f(x)$是否有重因式与数域无关.

例子

- 例5：设 $f(x)g(x)\neq 0$.证明:存在自然数N, 使得当n_1, $n_2>N$ 时, 总成立
$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x)).$$
- 例6：设 $f(x),g(x)\in F[x]$, 证明 $(f(x),g(x))\neq 1$ 的充要条件是存在F上不可约多项式 $p(x)$, 使得
$$p(x)\mid f(x)+g(x),\ p(x)\mid f(x)g(x).$$

小结

✓因式分解基本定理、标准分解式

✓重因式

✓有无重因式的判定

下节

☞ 习题课

做 吧

- 作业: §5.4 习题3, 5, 6; 复习7, 8, 9.
- 思考: §5.4 习题4