第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.3 目的与要求(续)

- 掌握中国剩余定理的思想方法.

复习

- 若 $f(x)\mid g(x), f(x)\mid h(x)$，则对 $\forall u(x), v(x)$
  $$f(x)\mid g(x)u(x)+h(x)v(x)$$
- $(f(x), g(x)) = (f(x)-g(x)h(x), g(x))$
- $d(x)=(f(x),g(x)) \Leftrightarrow d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$
  且 $\exists u(x), v(x), s.t.\ d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$
- $(f(x), g(x))=1$
  $\Leftrightarrow \exists u(x), v(x), s.t.\ u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$
- $f_1(x)\mid g(x), f_2(x)\mid g(x), (f_1(x), f_2(x))=1$
  $\Rightarrow f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$
- $(f(x), g(x))=1, f(x)\mid g(x)h(x) \Rightarrow f(x)\mid h(x)$
- $(f_1(x), g(x))=1, (f_2(x), g(x))=1$
  $\Rightarrow (f_1(x)f_2(x), g(x))=1$

- S满足: S除以3 余2　　$S=3u+2$

　　S除以5 余3　　$S=5v+3$

　　S除以7 余2　　$S=7w+2$

- 分析: $S=2T_1+3T_2+2T_3$ 其中

  T_1除以3, 余1; T_1被5, 7整除:

  $$T_1=3p_1+1=5\times 7q_1$$

  T_2除以5, 余1; T_2被3, 7整除:

  $$T_2=5p_2+1=3\times 7q_2$$

  T_3除以7, 余1; T_3被3, 5整除:

  $$T_3=7p_3+1=3\times 5q_3$$

- $S=2T_1+3T_2+2T_3-3\times 5\times 7\times q$

中国剩余定理

- 引理2 设 $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_m(x)$是数域$F$上两两互素的多项式,证明对于每个$i$, $i=1,2,\ldots,m$,存在多项式$f_i(x)$,使得对 $i, j=1,2,\ldots,m$,且 $i\neq j$ 都有

$$f_i(x)=l_i(x)p_i(x)+1,\ f_i(x)=h_{ij}(x)p_j(x).$$

- 中国剩余定理设 $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_m(x)\in F[x]$ 两两互素, $g_1(x), g_2(x),\ldots, g_m(x)\in F[x]$, $\deg g_i(x)<\deg p_i(x)$,则存在F上多项式$g(x)$, $q_i(x)(i=1,2,\ldots,m)$使得

$$\deg g(x)<\sum_{i=1}^{m}\deg p_i(x),$$

及$g(x)=p_i(x)q_i(x)+g_i(x)$.且这样的$g(x)$是唯一的.

例子

例6 设 $f(x)$除以 x^2+1, x^2+2 的余式分别为 $4x+4,$ 和$4x+8.$ 求 $f(x)$除以$(x^2+1)(x^2+2)$ 的余式.

step 1. 利用 x^2+1, x^2+2 互素, 求 $f_1(x), f_2(x)$使得 $f_1(x)$除以 x^2+1余式为1, 且被 x^2+2整除; $f_2(x)$除以 x^2+2余式为1, 且被 x^2+1 整除;

step 2. 则

$$f(x)=(4x+4)f_1(x)+(4x+8)f_2(x)+g(x)(x^2+1)(x^2+2)$$

为所有满足条件的多项式, 其中$g(x)$为任意多项式;

step 3. 求$f(x)$ 除以 $(x^2+1)(x^2+2)$ 的余式.

最小公倍式_定义

- 定义4: 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, 若 $m(x) \in F[x]$ 使得

  1) $f(x) \mid m(x)$ 且 $g(x) \mid m(x)$;

  2) 若 $f(x) \mid l(x)$ 且 $g(x) \mid l(x)$, 则 $m(x) \mid l(x)$

  则称 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式 **l.c.m. (least common multiple).** 首一最小公倍式记作 $[f(x), g(x)]$.

  $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ 的首一最小公倍式记为 $[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]$.

§5.4 标准分解式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.4 目的与要求

- 熟练掌握不可约多项式的基本性质;

不可约多项式_定义

- 定义1 设 $f(x)\in F[x]$, 且 $\deg f(x)\geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 F 上可约多项式, 否则称为 F 上不可约多项式.
- 注1 多项式的可约不可约 *与数域 F 有关吗?*
- 注2 F 上不可约多项式 $f(x)$ 的因式只能是 F 上非零常数 c 及 $c\,f(x)$. 一次多项式必不可约.
- 注3 多项式分为: 可约多项式, 不可约多项式, 零次多项式和零多项式.

例子

- 例1 :设$f(x)\in F[x]$, $0\neq a\in F$.

  令$g(x)=f(x+a)$. 证明$f(x)$在F上可约$\Leftrightarrow g(x)$在F上可约.

不可约多项式_性质1

- 命题1 设$f(x)$, $p(x)$是F上多项式, 且$p(x)$ 是F上不可约多项式, 则

$$\text{或者}(p(x), f(x)) = 1 \text{ 或者} p(x)|f(x).$$

- 命题2 设$f(x)$, $g(x)$ $p(x)$是F上多项式, $p(x)$ 是F上不可约多项式, 且$p(x)|\ f(x)\ g(x)$, 则

$$\text{或者} p(x)|\ f(x) \text{或者} p(x)|g(x).$$

- 注1命题中$p(x)$不可约是重要的.
- 注2命题2中不可约多项式$p(x)$若既不整除$f(x)$, 也不整除$g(x)$, 则$p(x)$不整除$f(x)g(x)$.

不可约多项式_性质2

- 命题1的逆命题 设$p(x)\in F[x]$, $\deg p(x)>0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x)\in F[x]$, 或者 $(f(x),p(x))=1$ 或者$p(x)\mid f(x)$, 则$p(x)$在F上不可约.
- 命题2的逆命题设 $p(x)\in F[x]$, $\deg p(x)>0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x)$, $g(x)\in F[x]$, 如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 必有 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$, 则 $p(x)$是F上不可约多项式(作业).
- 注 通过$p(x)$与F上任一个多项式或任意两个多项式的关系可判定$p(x)$在F上是否不可约.

小结

✓中国剩余定理

✓可约、不可约

下节

☞ 因式分解基本定理、标准分解式

☞ 重因式

作业

- 作业: §5.4 习题1, 2.

  补充1: 求$f(x)$, 使得$(x^2+1)|(f(x)+1)$且$(x^3+x^2+1)|f(x)$;
  求次数最低的$g(x)$使得$g(x)$除以x^2+1后余式为$x+1$,
  且$g(x)$除以x^3+x^2+1后余式为$2x^2+2$.

  补充2: $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$在$F$上可约, 其中
  $a_na_0\neq 0$, 证明$g(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$在$F$上也可约.

- 选做: $f(x)$, $g(x)$全不为零. 若

$$f(x)g(x)+f(x)+g(x)=q(x)$$

  是不可约多项式, 则$(f(x), g(x))=1$.