第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.2 整除

§5.2 目的与要求_2

- 掌握整除的内容和证明方法;
- 掌握带余除法的内容和证明方法;
- 熟练掌握用带余除法解答有关整除问题.

复习

- 定义1: 设 $f(x), g(x) \in F[x]$. 若存在 $h(x) \in F[x]$. 使得 $f(x) = g(x)\, h(x)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, 或 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除, 或 $g(x)$ 整除 $f(x)$. 记为 $g(x)|f(x)$. 否则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$, 记为 $g(x)\nmid f(x)$.

(3) 互伴性: $f(x) \mid g(x),\, g(x) \mid f(x)$, 则存在 $0 \neq c \in F$, 使 $f(x) = cg(x)$;

(4) $f(x) \mid g(x), f(x) \mid h(x)$, 则对任意 $u(x), v(x) \in F[x]$,有 $f(x) \mid g(x)\, u(x) + h(x)\, v(x)$.

特别地 若 $f(x)|g(x), f(x)|g(x)q(x)+r(x)$, 则 $f(x)|r(x)$.

例子

例3 若$g(x) \mid f(x)$, 则$\deg g(x) \leqslant \deg f(x)$?

1) $f(x) \neq 0$, $g(x) \mid f(x)$, 则$\deg g(x) \leqslant \deg f(x)$, 且等号成立的充分必要条件是$f(x) \sim g(x)$;

2) $\deg g(x) > \deg f(x)$且$g(x) \mid f(x)$, 则$f(x) = 0$.

注 $g(x)$ 满足什么条件时, $g(x) \mid 1$?

带余除法_1

- **定理1 带余除法** 设$f(x), g(x) \in F[x]$，$g(x) \neq 0$, 则存在唯一$q(x)$、$r(x) \in F[x]$, 使得
$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$
这里$\deg r(x) < \deg g(x)$.

- 注1: 此时$q(x)$、$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$或$f(x)$除以$g(x)$的商式和余式.
- 注2: 条件$\deg r(x) < \deg g(x)$保证了唯一性.
- 思考: 带余除法与数域扩大有关吗?

带余除法_2

- 推论1: $f(x), g(x) \in F[x]$，$g(x) \neq 0$，则 $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为0.
- 思考 整除关系与数域扩大有关吗？即，设 F，K 是两个数域，且 $F \subseteq K$，$f(x), g(x) \in F[x]$，在 $F[x]$ 中 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是在 $K[x]$ 中 $g(x) \mid f(x)$？

例子

例4 $f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$, $g(x)=x^2-x+1$. 求$f(x)$除以$g(x)$的商式和余式.

例5 证明$x\mid f(x)$的充要条件是$x^2\mid f^2(x)$.

例6 设$f(x)|g_1(x)-g_2(x)$, $f(x)|h_1(x)-h_2(x)$, 证明: $f(x)|g_1(x)\,h_1(x)-g_2(x)\,h_2(x)$.

例7* 设$f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$, 其中$m, n, p$为自然数, 又$g(x)=x^2+x+1$, 求证: $g(x)|f(x)$.

§ 5.3 最大公因式

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§ 5.3 目的与要求_1

- 熟练掌握最大公因式的概念、性质

最大公因式_定义

- **定义1:** 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, 若 $d(x) \in F[x]$ 使得

  1) $d(x) \mid f(x)$ 且 $d(x) \mid g(x)$;

  2) 若 $h(x) \mid f(x)$ 且 $h(x) \mid g(x)$, 则 $h(x) \mid d(x)$

则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式g.c.f. (greatest common factor).

例1 求 $2(x-1)^3(x+2)x$ 与 $4(x-1)^2(x+2)^5(x+3)$ 的最大公因式.

注1 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的次数最高的公因式.

最大公因式_唯一性

- 注2 若$d_1(x)$和$d_2(x)$都是$f(x)$ 和 $g(x)$的最大公因式, 则$d_1(x)$和$d_2(x)$是相伴的.

  $f(x), g(x)$首项系数为1(简称首一)的最大公因式是唯一确定的, 记为$d(x)=(f(x), g(x))$.

例子

例2

1) $(f(x), 2)$;

2) $(f(x), 0)$, 其中$f(x)\neq 0$;

3) 若$g(x)|f(x)$, 求$(f(x), g(x))$;

4) $(2, 6)$;

5) 0与0的最大公因式;

6) $(x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1, x^3 - 2x + 1)$.

小结

- ✓ 整除、带余除法
- ✓ 与数域扩大关系
- ✓ 整除的证明方法
  - ✓ 定义
  - ✓ 带余除法
  - ✓ 性质
- ✓ 最大公因式的概念

下节

☞ 最大公因式（续）（重要）

做 吧

- 作业: § 5.2 习题2(1), 3, 4; 复习题1(整除), 3;
  § 5.3 习题2.
- 思考: § 5.2 习题1
  补充:设a, b, c两两互异, 分别用$(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$除$f(x)$的余式是r, s, t. 试求用$(x-a)(x-b)(x-c)$除$f(x)$的余式.
- 选做: 设$f(x)g(x)\neq 0$, $\deg g(x)>0$. 证明存在唯一m, $r_m(x)$, $r_{m-1}(x)$, …, $r_0(x)$, 且$r_m(x)\neq 0$,使得
  $$f(x)= r_m(x)g^m(x)+r_{m-1}(x)\, g^{m-1}(x)+\ldots+r_0(x),$$
  其中$\deg r_i(x)<\deg g(x)$, $i=1,2,\ldots, m$.