第五章 多项式
Polynomial

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

概述_1

- 代数角度

  代数运算:加、减、乘、除(带余除法)及性质

  最大公因式、互素、不可约、标准分解式、重因式

- 函数角度

  根及其性质，余数定理

- 二者关联

  两多项式函数相等充要条件为这两多项式代数相等

概述_2

- 与数域扩大无关的多项式性质

  整除、最大公因式、互素、余数定理等

- 与数域扩大有关的多项式性质

  不可约、标准分解式、根理论等

§5.1 一元多项式和运算

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

§5.1目的与要求

- 掌握一元多项式形式的准确描述;
- 理解$F[x]$对于多项式的加法, 数乘, 乘法构成F-代数;
- 掌握用多项式的次数来解题的方法.

一元多项式_1

- 定义

F:数域, $a_i \in F$, i=0,1,…,n; $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, x: 未定元, 形如

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

称为F上关于x 的一元多项式.

$a_i x^i$: 称为第i 次项, a_i: 第i 次项系数.

n 次多项式: 当$a_n \neq 0$时, 次数记为$\deg f(x)=n$.

$a_n x^n$:首项, a_n:首项系数. a_0:常数项. a_n=1:首一多项式.

F上一元多项式全体记为$F[x]$

$$F[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i \in F, i = 0,1,\ldots,n\}$$

一元多项式_2

注 常数项多项式: $f(x)=a_0, a_0 \in F$

零多项式: $f(x)=0$, 规定 $\deg 0=-\infty$

零次多项式: $f(x)=a_0 \neq 0$, 此时 $\deg f(x)=0$

$f(x)=a_0 \neq 0 \Leftrightarrow \deg f(x)=0$

$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \deg f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 首项系数非零

例1 0 $\quad \pi x^2$ $\quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ $\quad x^{2/3}$ $\quad \dfrac{x^2+1}{x-1}$

多项式的相等

- 定义

  两个多项式称为相等当且仅当它们的次数相同且各次项的系数相等

即若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

则$f(x) = g(x)$当且仅当$m = n$, $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

多项式的运算_加法1

$$F[x]=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \mid n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}, a_i\in F, i=0,1,\ldots,n\}$$

设$f(x)$, $g(x)\in F[x]$, 适当增加几个系数为0的项,
可设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

定义加法:

$$f(x)+g(x)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

则$f(x)+g(x)\in F[x]$.

多项式的运算_加法2

- 满足性质

  (1) 结合律: $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$

  (2) 交换律: $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

  (3) 存在零元: $f(x)+0=f(x)$

  对于 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ 定义 $-f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$, 则

  (4) 存在负元: $f(x)+(-f(x))=0$

多项式的运算_数乘1

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$c\in F$$

定义c与$f(x)$的数乘为:

$$cf(x)$$

$$=ca_nx^n+ca_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ca_1x+ca_0$$

则 $cf(x)\in F[x]$.

多项式的运算_数乘2

- 满足性质

(5) $c(f(x)+g(x))=cf(x)+cg(x)$

(6) $(c+d)f(x)=cf(x)+df(x)$

(7) $(cd)f(x)=c(df(x))$

(8) $1\cdot f(x)=f(x)$

- 定理1 $F[x]$关于多项式的加法与数乘构成 F 上的线性空间.
- 注 $F[x]$是无限维线性空间. 对任意正整数n, $1,x,x^2,\ldots,x^n$ 线性无关.

多项式的运算_乘法1

设 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 \in F[x]$

$g(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x + b_0 \in F[x]$

定义$f(x)$ 与$g(x)$的乘积: $f(x)\,g(x)=h(x)$ 其中

$$h(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1 x + c_0 \in F[x]$$

$$c_{n+m}=a_n b_m$$

$$c_{n+m-1}=a_{n-1}b_m + a_n b_{m-1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 b_k + a_1 b_{k-1}+\cdots+a_k b_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_0=a_0 b_0$$

多项式的运算_乘法2

- 满足性质

  (9) $(f(x)\,g(x))h(x) = f(x)\,(g(x)\,h(x))$

  (10) $f(x)\,g(x) = g(x)\,f(x)$

  (11) $(f(x)+g(x))\,h(x) = f(x)\,h(x)+ g(x)\,h(x)$

  (12) $c\,(f(x)\,g(x))=(c\,f(x))\,g(x) = f(x)(c\,g(x))$

  (13) $1\cdot f(x) = f(x)$.

- 定理2 $F[x]$关于多项式的加法,数乘和乘法构成 F上的代数.
- 注: $F[x]$为F上有单位元的交换代数.

多项式的次数

- 引理1 设$f(x)$, $g(x)$是F上多项式, 则

  $$\deg(f(x)+g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

  $$\deg(cf(x)) = \deg f(x),\ 0 \neq c \in F$$

  $$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

- 注 $\deg(f(x)g(x))=0$

  $\Leftrightarrow$ $\deg f(x) = 0$ 且 $\deg g(x) = 0$

  $\Leftrightarrow$ $f(x) = a_0 \neq 0$且$g(x) = b_0 \neq 0$

多项式的消去律

- 命题1 $f(x), g(x) \in F[x]$. 若$f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, 则
$$f(x)g(x) \neq 0.$$
- 推论1 若 $f(x) \neq 0$, 且$f(x)\, g(x) = f(x)\, h(x)$, 则
$$g(x) = h(x).$$

例2 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ 且 $f^2(x) + g^2(x) = 0$, 则
$$f(x) = g(x) = 0.$$

注 例2结论对复数域不成立.

§ 5.2 整除

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

整除_定义

- 定义1: 设 $f(x), g(x) \in F[x]$. 若存在$h(x) \in F[x]$. 使得
$$f(x) = g(x)\, h(x)\,,$$
则称$g(x)$是$f(x)$的因式, 或$f(x)$被$g(x)$整除, 或 $g(x)$整除$f(x)$.记为$g(x)|f(x)$. 否则称$g(x)$不整除$f(x)$, 记为 $g(x) \nmid f(x)$.

- 注: $g(x)|f(x)$不可记做$g(x)/f(x)$.

例子

例1 $2|3$?

例2 1) $f(x) \mid 0$?　　2) $0 \mid f(x)$?

整除_性质

- 性质: $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, 则

  (1) 反身性: $f(x) \mid f(x)$;

  (2) 传递性: $f(x) \mid g(x), g(x) \mid h(x)$, 则 $f(x) \mid h(x)$;

  (3) 互伴性: $f(x) \mid g(x), g(x) \mid f(x)$, 则存在$0 \neq c \in F$, 使

  $$f(x) = cg(x);$$

  此时称$f(x), g(x)$为相伴多项式, 记做$f(x) \sim g(x)$.

  (4) $f(x) \mid g(x), f(x) \mid h(x)$, 则对任意$u(x), v(x) \in F[x]$,有

  $$f(x) \mid g(x)\, u(x) + h(x)\, v(x).$$

特别地 若$f(x)|g(x), f(x)|g(x)q(x)+r(x)$, 则 $f(x)|r(x)$.

小结

✓首项, 次数

✓主要证明方法: 次数, 首项

✓整除的概念

下节

☞带余除法（重要）

做吧

- **作业**: §**5.1 习题1, 3, 4.**

  补充**1:** 若$g(x) \mid f(x)$, 则$\deg g(x) \leqslant \deg f(x)$?

  补充**2:** $f(x)$ 满足什么条件时, $f(x) \mid 1$?

- **思考**: §**5.1 习题2;**

  复习题**2.**

- **选做**: 复习题**1**(n未必是$f(x)$的次数).