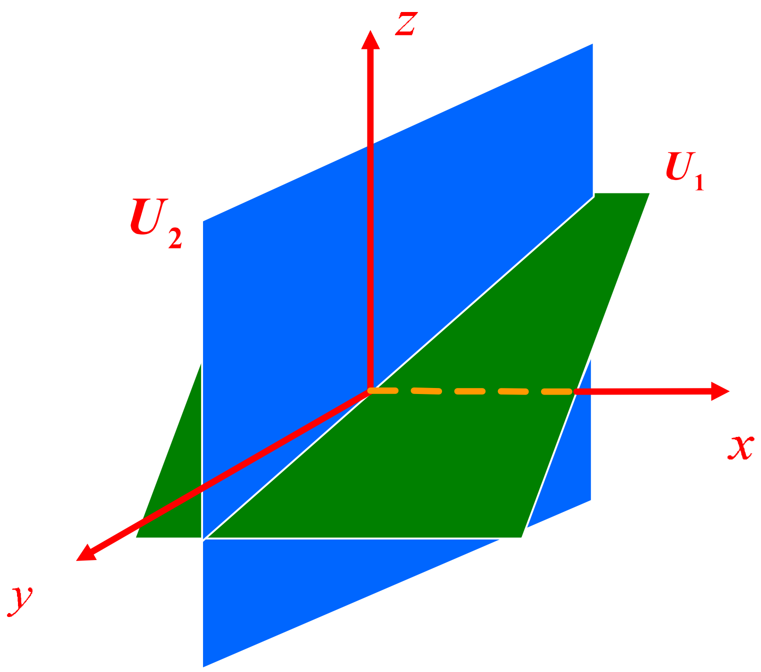
第三章 线性空间
Linear Space / Vector Space

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

§ 3.5 目的与要求

- 熟练掌握子空间的和是直和的等价刻画
- 熟练掌握证明空间做直和分解的方法


z
U_1
U_2
x
y

子空间的直和_1

- 定义 若V_1,V_2是V的子空间，若V_1+V_2的任意向量α的分解式

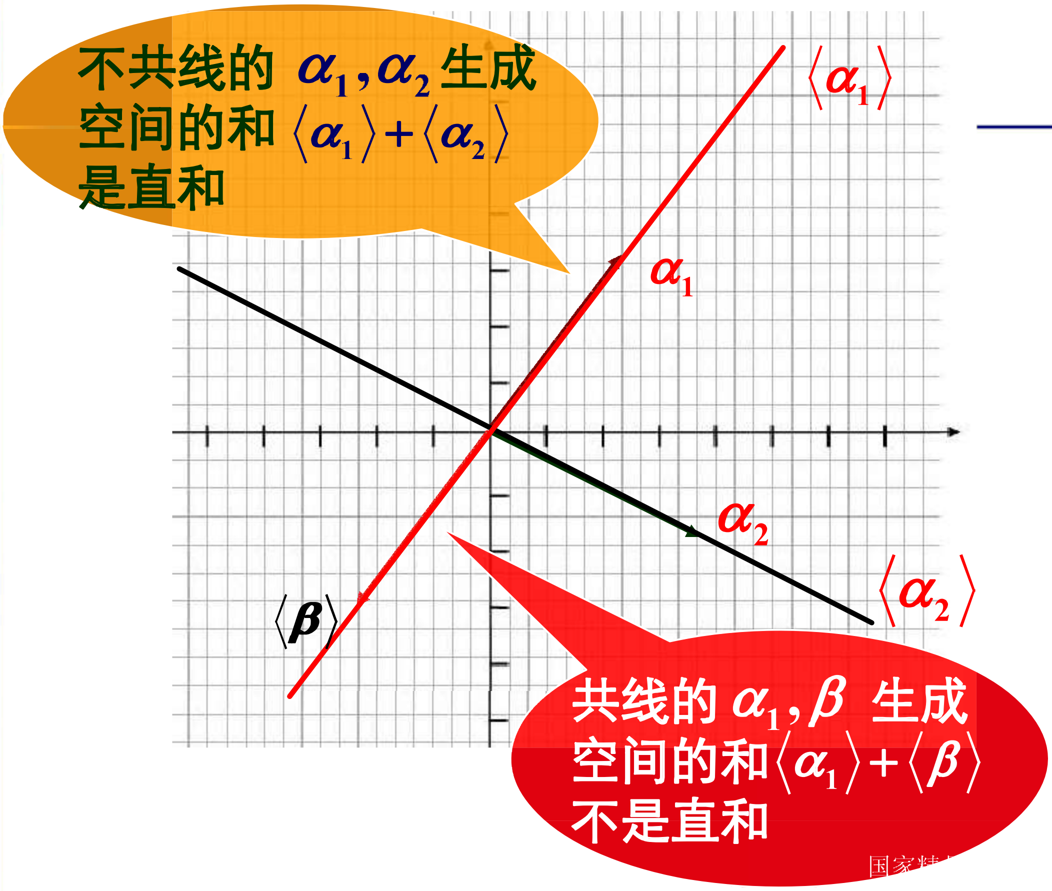
$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$$

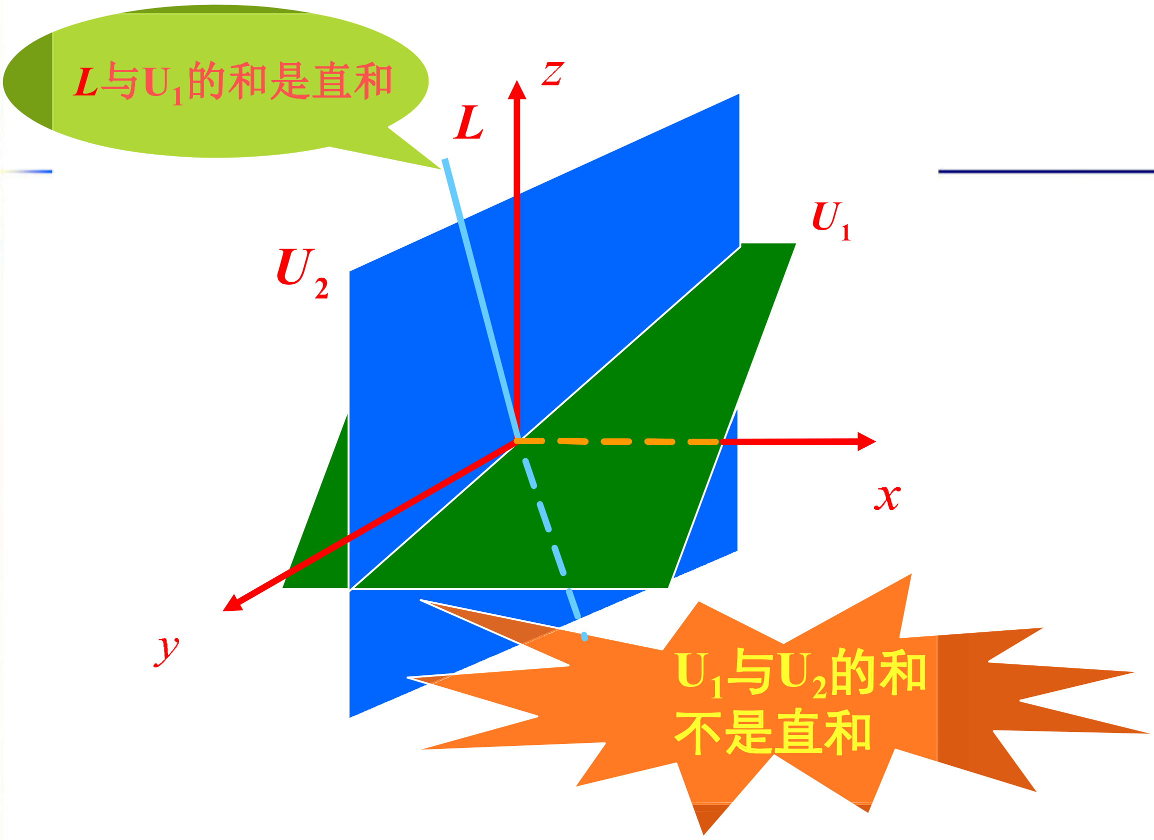
是唯一的，则称V_1+V_2为直和，记为$V_1\oplus V_2$.

- 定理 设V_1,V_2是V的子空间，则V_1+V_2是直和的充分必要条件是零元素是表示法唯一，即若 , 则$\alpha_1=\alpha_2=0$.

子空间的直和_2

- 推论 若V_1,V_2是V的子空间, 则V_1+V_2是直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = 0$
- 推论 若V_1,V_2是有限维线性空间V的子空间, 则 $V_1 \oplus V_2$
  $\Leftrightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
  $\Leftrightarrow V_1$的一个基和V_2的一个基凑成V_1+V_2的一个基.


不共线的 α_1,α_2 生成空间的和 $\langle\alpha_1\rangle+\langle\alpha_2\rangle$ 是直和
$\langle\alpha_1\rangle$
α_1
α_2
$\langle\alpha_2\rangle$
$\langle\beta\rangle$
共线的 α_1,β 生成空间的和 $\langle\alpha_1\rangle+\langle\beta\rangle$ 不是直和



L与U1的和是直和
L
z
U1
U2
x
y
U1与U2的和
不是直和

空间的直和分解

- **推论** 若V_1是有限维线性空间V的非平凡子空间，则存在V的子空间V_2，使得$V = V_1 \oplus V_2$.
- **命题*** 设V_1, V_2是有限维线性空间V的子空间.

若(1) $V = V_1 + V_2$;

(2) $V_1 \cap V_2 = 0$;

(3) $\dim V = \quad V_1 + \quad V_2$;

其中任意两个成立，则$V = V_1 \oplus V_2$.

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

例

- 例1 F上所有n阶对称矩阵全体构成空间V，所有n阶反对称矩阵全体构成空间U，则

$$F^{n\times n}=V\oplus U.$$

例

- 例2 设A为n阶方阵, 且

$$V_1=\{X\in F^n\mid AX=0\}$$

$$V_2=\{X\in F^n\mid (A-E)X=0\}$$

证明: $A^2=A\Leftrightarrow F^n=V_1\oplus V_2$.

例

- 例3 设

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\},W_2=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & z \end{pmatrix}\middle|\, x,y,z\in\mathbb{R}\right\},$$

(1) 试求 W_1+W_2;

(2) 记 [illegible] W_2, 试求子空间 W_3, 使

$\mathbb{R}$ [illegible] $= W \oplus W_3$.

子空间的直和_多个子空间1

- 定义 设$V_1,V_2,\dots,V_s$是V的子空间，若对$V_1+V_2+\cdots+V_s$中任意向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i,i=1,2,\dots,s$$

唯一，则称$V_1+V_2+\cdots+V_s$为直和，记做

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

或

$$\bigoplus_{i=1}^{s}V_i.$$

子空间的直和_多个子空间2

- **定理** 设$V_1,V_2,\dots,V_s$是线性空间V的子空间，则下列命题等价:
  1) $V_1+V_2+\dots+V_s$ 是直和;
  2) 零元素的分解唯一;
  3) 对任意的i, 都有 $V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=0$;
  4) 对任意的i, 都有 $V_i\cap\sum_{j<i}V_j=0$;
  5) $V_1,V_2,\dots,V_s$ 的基凑成$V_1+V_2+\dots+V_s$的基;
  6) $\dim(V_1+V_2+\dots+V_s) = \dim(V_1)+\dim(V_2)+\dots+\dim(V_s)$.

例

- 例4 设 $V = U \oplus W, U = U_1 \oplus U_2$, 则
$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus W.$$

- 例5 n维线性空间可以表示为n个1维子空间的直和.

小结

- ✓子空间直和
- ✓空间的直和分解

下节

- ➢习题课

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

做 吧

- 作业 § 3.5 Ex 1, 2; 复习题10.

  补充1 设A为n阶方阵, 且

  $$V_1=\{X|(A-E)X=0\}, V_2=\{X|(A+E)X=0\},$$

  证明: $A^2=E \Leftrightarrow F^n=V_1\oplus V_2$.

  （提示: 利用秩与基础解系进行证明）

  补充2 设V是有限维线性空间, V_1是V的非零子空间. 证明: 如果存在唯一的子空间V_2, 使得$V=V_1\oplus V_2$, 则V_1=V.

- 思考 选择填空（各15题）

总结

1. 第三章知识点及相互关系;

2. 判定问题:

线性空间、子空间、线性相关性、基等

3. 计算问题:

线性空间的基和维数、向量组的秩与极大线性无关组、子空间的交的基和维数、子空间的和的基与维数、坐标和过渡矩阵等

4. 证明问题:

基和维数、子空间、子空间的直和、空间的直和分解等