第三章 线性空间
Linear Space / Vector Space

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

线性空间

- **定义** V: 非空, F: **数域**

$\alpha,\beta\in V, c\in F$, 定义 $\alpha\oplus\beta\in V,\ c\circ\alpha\in V$;

(1)加法交换律 $\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$;

(2)加法结合律 $(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$;

(3)$\exists$零元素 $\in V, \forall\alpha\in V, \alpha\oplus$ 零元素 $=\alpha$;

(4)$\forall\alpha\in V, \exists\beta\in V, \alpha\oplus\beta=$ 零元素;

(5) $1\circ\alpha=\alpha$;

(6) $c\circ(\alpha\oplus\beta)=(c\alpha)\oplus(c\beta)$;

(7) $(c+d)\circ\alpha=(c\circ\alpha)\oplus(d\circ\alpha)$;

(8) $c\circ(d\circ\alpha)=(cd)\circ\alpha$.

线性空间性质

- 性质1 零向量是唯一的.
- 性质2 负向量也是唯一的. 从而可以定义减法.
- 性质3 任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V, c\in F$.

消去律成立

(1) 由 $\alpha\oplus\beta=\alpha\oplus\gamma$ 可推出 $\beta=\gamma$, 即加法消去律成立;

零向量可通过数乘得到

(2) $0\circ\alpha=$ 零向量;

(3) $c\circ$ 零向量 $=$ 零向量;

负向量可通过数乘得到

(4) $(-1)\circ\alpha=-\alpha$;

分配律成立

(5) 若 $c\circ\alpha=0$, 那么 $c=0$ 或 $\alpha=0$;

(6) $(c+d)\circ(\alpha\oplus\beta)=c\circ\alpha\oplus c\circ\beta\oplus d\circ\alpha\oplus d\circ\beta$.

线性空间

- 定义 V: 非空, F: 数域

$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in F$, 定义 $\alpha+\beta \in V$, $c\alpha \in V$;

(1)加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2)加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3)$\exists O \in V, \forall \alpha \in V, \alpha+O=\alpha$;

(4)$\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \alpha+\beta=O$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $c(\alpha+\beta)=(c\alpha)+(c\beta)$;

(7) $(c+d)\alpha=(c\alpha)+(d\alpha)$;

(8) $c(d\alpha)=(cd)\alpha$.

§3.2 目的要求

- 熟练掌握线性相关、线性无关的定义
- 熟练掌握线性空间的基和维数的确定

向量的线性关系_1

- 定义

设V是数域F[illegible]间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\in V$.
若存在F中s个数$a_1,a_2,\cdots,a_s$, 使

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s,$$

则称β是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的<u>线性组合</u>, 或称向量$\beta$可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$<u>线性表示</u>.

向量的线性关系_2

- **定义** 设F上线性空间V中有向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$.

  若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$中每个向量都可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表出, 则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ <u>线性表出</u>.

  若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$和向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$可相互线性表出, 则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$和向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ <u>等价</u>.

向量的线性关系_3

- 定义 V: 数域F上线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\in V$. 称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性相关, 若在F中有不全为零的数$a_1, a_2, \dots, a_s$, 使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_s\alpha_s=0.$$

称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关, 若有F中的数 $a_1, a_2, \dots, a_s$, 使得$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_s\alpha_s=0$, 则必有

$$a_1=0,\ a_2=0,\ \dots,\ a_s=0.$$

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

向量的线性关系_性质

- **性质1** V中向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则表示法唯一的充分必要条件是 α[redacted]线性无关.

- **性质2** 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是数域$F$上线性空间$V$[redacted]要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

向量的线性关系_性质

- 性质3 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是数域F上线性空间V的线性相关向量组, 则任一包含该组向量的向量组必线性相关. (部分相关, 整体相关)

- 性质4 在V中, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 但向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关, 则 β 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一.

向量的线性关系_性质

- **性质5** 等价的向量组满足

(1) 反身性 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

(2) 对称性 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价,

[illegible]价.

(3) 传递性 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价,

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 等价, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$ 等价.

向量的线性关系_性质

- 性质6 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出, 且 $s>t$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关. ▮

(替换定理) 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 则 $s\le t$.

极大无关组_1

- <u>定义</u> 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$适合如下条件:

(1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关;

(2) 将向量组中任意向量添加到$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$得到的$r+1$个向量线性相关;

(2’) 任意的α_i可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出;

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个<u>极大线性无关组</u>, 简称<u>极大无关组</u>. r 称为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩, 记为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

极大无关组_2

- **性质7** 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线[illegible]出, 则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

- **性质8** 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ [illegible]

[illegible] $) = r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$

例

- **例1** 若方阵A满足 $A^{m-1} \neq 0, A^m = 0$. 证明: $E, A, A^2, \ldots, A^{m-1}$ 线性无关.
- **例2** 明: 实函数 $x, e^x, \sin x$ 线性无关.

线性空间的基_1

- **定义** 设V是数域F上的线性空间, 如果在V中存在n个向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 满足

  (1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$线性无关;

  (2) V中任一向量都可表示为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的线性组合, 则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为V 的一个基.

线性空间的基_2

- 注1 一般地, 线性空间V的基不唯一确定.
- 注2 V[redacted]同. 若线性空间的基由n个向量组成, 则称V[redacted]为n维线性空间, n[redacted]为V的维数, 记作$\dim_F V$或$\dim V$.
- 注3 [redacted]若$V=0$, 称其维数为0, 此时V没有基. 一般我们讨论的线性空间维数>0.
- 命题* n维线性空间[redacted]意$n+1$个向量必线性相关.

	R	G	B
	255	0	0
	31	174	225
	126	166	90
	173	61	195

所有颜色均可用红绿蓝三色线性组合得到

例

- 例3 分别求 $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, 和 $_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ 的一个基和维数.
- 例4 求 F^n 的一个基和维数.
- 例5 求 $F^{m\times n}$ 的一个基和维数.
- 例6 求 $V=\{A\mid A^T=A, A\in F^{3\times 3}\}$ 的一个基和维数.
- 例7 求 $V=\{X\mid AX=0, X\in F^n\}$ 的一个基和维数, 其中 A 为 $m\times n$ 矩阵, 且 $r(A)=r<n$.

线性空间的基_3

- 基的等价定义 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in V$, $\dim(V)=n$

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关

且V中任意向量可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出;

(2) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关;

(3) V中任意向量可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出;

(4) V中任意向量可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出,

且表示法唯一;

(5) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关, 且V中任意向量添加到

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中所成的新向量组线性相关.

线性空间的基_4

- <u>定理*</u> (扩基定理)

  设V是n维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是V中r ($r<n$)个线性无关向量. 又 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是V的一个基, 则必可在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中选出 $n-r$ 个向量, 使其和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 一起凑成V 的一个基.

例

- 例8 在$F^{2\times 2}$中,

(1) 证明: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 线性无关;

(2) 将其扩为$F^{2\times 2}$的一个基.

小结 元素层面

✓向量组的**极大线性无关组, 秩; 替换定理**

✓有限维线性空间的**基, 维数; 扩基定理**

  ✓空间维数未知时

  ✓空间维数已知时

下节

➢ **坐标**（代数思想）

做 吧

- 作业 §3.2 Ex 1, 3, 5, 6; 复习题 3, 4.
- 思考 §3.2 Ex 2; 复习题1.

  补充:设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, V=\{B \mid BA=AB, B\in F^{2\times 2}\}$.

  求V的一个基和维数.
- 选做 补充1: 已知n维列向量α,β 线性无关, 证明 $\alpha\alpha^T, \alpha\beta^T, \beta\alpha^T, \beta\beta^T$线性无关.

  补充2:设n+1人读n个不同种类的书, 要求每人至少读1本. 证明: 存在这样两组不同的人, 使得这两组人读过的书的种类相同.