第三章 线性空间

Linear Space / Vector Space

国家精品课程: http://gdjpkc.xmu.edu.cn
国家级资源共享课: http://www.icourses.cn/coursestatic/course_3077.html
中国大学MOOC: http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

- 代数的研究对象不仅是数字，而是各种抽象化的结构。
- 常见的代数结构有：群、环、域、模、线性空间等。
- 这些代数结构是在集合上定义运算而来，且这些运算适合某些公理。

- 线性空间是高等代数的主要研究对象
- 体现了代数学中研究其他代数结构的基本思路

基本思路

- 元素间关系的研究——线性关系

  包括线性表出（线性组合）、线性相关、线性无关、空间的基和坐标、基之间的过渡矩阵

- 子结构的研究——从内部研究代数结构

  子空间及子空间的直和

- 映射——从外部研究代数结构

  线性映射和线性变换

向量

- 由n个元素组成的<u>n维列向量</u>

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

向量的运算

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

- 两向量α与β的加法

$$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$$

- 数c与向量α的数乘

$$c\alpha=\begin{pmatrix}ca_1\\ca_2\\\vdots\\ca_n\end{pmatrix}$$

向量运算规则（八条运算规则）

(1) 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(2) 加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$

(3) $\exists 0\in F^n, \forall \alpha, \alpha+0=\alpha;$

(4) $\forall \alpha, \exists \beta\in F^n, \alpha+\beta=0;$

(5) $1\alpha=\alpha;$

(6) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta;$

(7) $(c+d)\alpha=c\alpha+d\alpha;$

(8) $c(d\alpha)=(cd)\alpha.$

矩阵 $A,B,C\in F^{m\times n}, c,d\in F$.

- 加法 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$
- 数乘 $cA=(ca_{ij})_{m\times n}$

(1) 加法交换律 $A+B=B+A$;

(2) 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) $\exists 0_{m\times n}\in F^{m\times n}, \forall A\in F^{m\times n}, A+0=A$;

(4) $\forall A\in F^{m\times n}, \exists B\in F^{m\times n}, A+B=0$;

(5) $1A=A$;

(6) $c(A+B)=cA+cB$;

(7) $(c+d)A=cA+dA$;

(8) $c(dA)=(cd)A$.

§3.1目的要求

- 掌握线性空间的概念、基本性质；
- 正确判断一个集合对于给定的运算是否构成一个线性空间.

线性空间_1

- 定义 V: 非空集合, F: 数域

V 中任意两元素 α,β, 按照某一法则, 在 V 中存在唯一元素与之对应,记为 $\alpha+\beta$,称为 α 与 β 的加法. F 中任意数 c 与 V 中任意元素 α, 按照某一法则, 在 V 中存在唯一的元素与之对应, 记为 $c\alpha$, 称为 c 与 α 的数乘. 若加法和数乘对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V, c,d\in F$ 满足八条运算规则, 线性空间(向量空间)

向量运算规则（八条运算规则）

- 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$，任意 $c,d\in F$，都有

(1) 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) 加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\exists$ 零元素 $\in V$, $\forall\alpha$, $\alpha+$ 零元素 $=\alpha$;

(4) $\forall\alpha$, $\exists\beta\in V$, $\alpha+\beta=$ 零元素;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $c(\alpha+\beta)=(c\alpha)+(c\beta)$;

(7) $(c+d)\alpha=(c\alpha)+(d\alpha)$;

(8) $c(d\alpha)=(cd)\alpha$.

零元素存在性

负元素存在性

数乘与加法的协调

线性空间_2

注1 线性空间必须对所定义的加法和数乘封闭

注2 满足以上八条规则的加法及数乘运算称为线性运算

注3 线性空间中元素又称向量，线性空间也称为向量空间

线性空间_例

- 例1 F^n 和 F_n, $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$.
- 例2 $\ldots^n$.
- 例3 F … $\mathbb{R}$ … $\mathbb{C}$.

  思考: $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间吗?
- 例4 $C[a,b]$.

线性空间_例

- 例5 [illegible] $\{\alpha\}$, [illegible]法$\alpha+\alpha=\alpha$, 数乘 $c\alpha=\alpha$, 则[illegible]间, 称为零空间, 记为0.
- 例6 设A是数域F上 $m\times n$ 阶矩阵, 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解的全体对于向量的加法和数乘构成F上的线性空间, 称为 $AX=0$ 的解空间.

  思考: $AX=\beta\neq 0$ 解的全体对于向量的加法和数乘构成[illegible]间?

线性空间_例

- 例7 于如下加法和数乘

(1) $(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,b_1\right)$$

(2) $(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\tfrac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right)$$

成 $\mathbb{R}$ 上线性空间？

线性空间性质

- 性质1 [illegible]的.
- 性质2 负向量也是唯一的. 从而可以定义减法.
- 性质3 任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V, c\in F$.

(1) 由$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$可推出$\beta=\gamma$,即加法消去律成立;

(2) $0\alpha=0$;

(3) $c0=0$;

(4) $(-1)\alpha=-\alpha$;

(5) 若$c\alpha=0$,那么$c=0$或$\alpha=0$;

(6) $(c+d)(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta+d\alpha+d\beta$.

小结

✓线性空间: 2+2+8

下节

➢基和维数（非常重要）

- 作业 §3.1 Ex 1(1)-(5)(判断即可), 2(若是证之, 若否举反例), 3(1)(判断即可), 4;

  补充1. 给定方阵A, 证明按通常矩阵的加法和数乘
  $$V=\{B\mid BA=AB, B\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$$
  关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{R}$上的线性空间.

  补充2. 对n维列向量集合V, 定义
  $$\alpha\oplus\beta=\alpha-\beta, c\circ\alpha=-c\alpha$$
  那么V满足线性空间定义中哪几条公理?

- 思考 $V_1=\{(a,2)\mid a\in F\}, V_2=\{A\mid tr(A)=0, A\in F^{n\times n}\}$

  V_1,V_2关于矩阵的加法和数乘构成F上线性空间吗?

- 选做 线性空间定义中的加法加法交换律可由定义中其他运算法则推出.