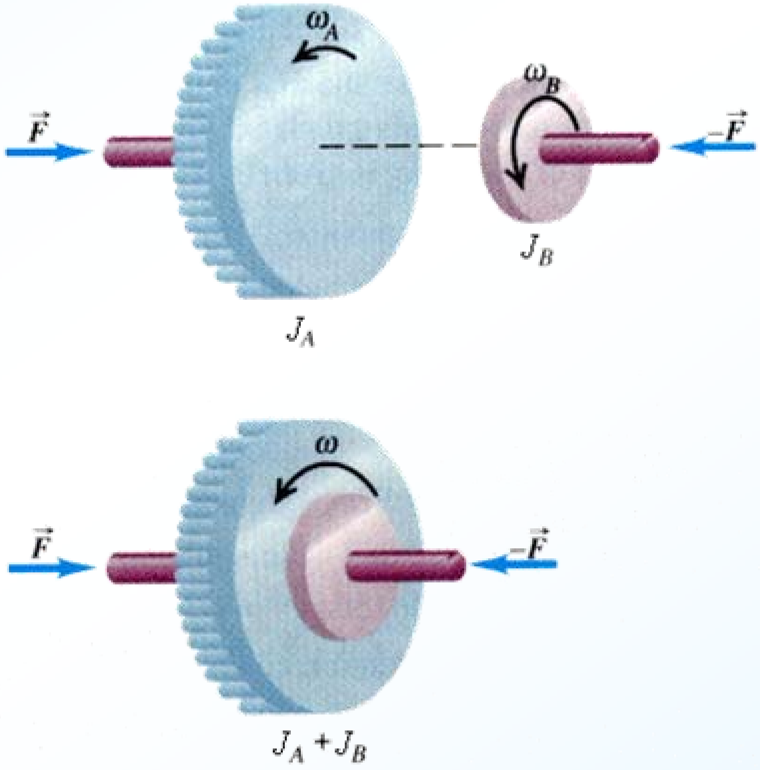
第三章 刚体力学基础



什么因素影响物体转动的状态？

与物体本身结构有关

与物体所处状态有关

轮为什么不倒下？

如何旋转？

如何运动？

第3章　刚体力学基础

主要任务： 研究物体的转动，及转动状态变化的规律。

研究对象： 刚体(rigid body)

——在外力作用下不产生形变的物体

可视为无数个连续分布的质点组成的质点系　——理想模型

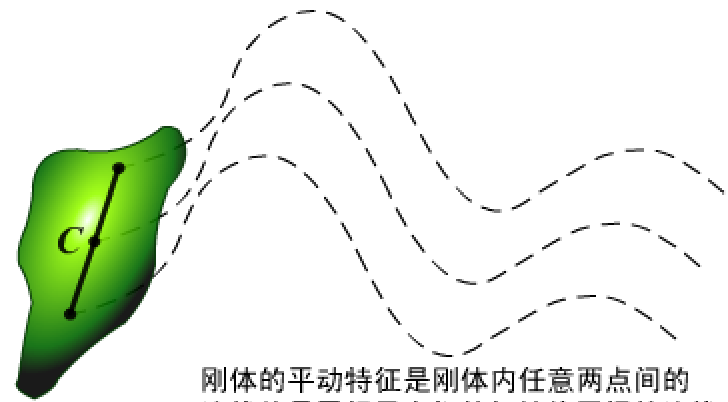
组成刚体的每个质点称为刚体的一个**质量元(element mass)**。每个质量元都服从质点力学规律。

质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ 质点系 $\xrightarrow{\text{特例}}$ 刚体

特点：任意两点间的距离始终保持不变

刚体的运动 $\left\{\begin{array}{l}\text{转动(特例：定轴转动)}\\ \text{平动}\\ \text{平动+转动}\end{array}\right.$

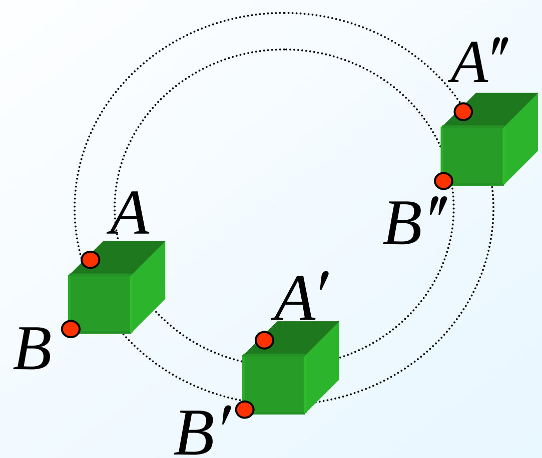
§3-1　刚体运动的基本形式



刚体的平动特征是刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线

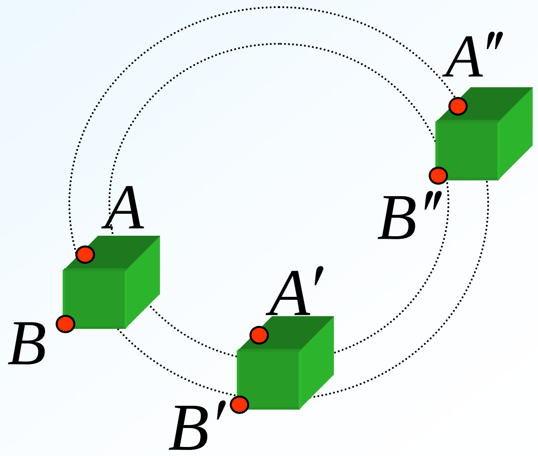
一、平动和转动

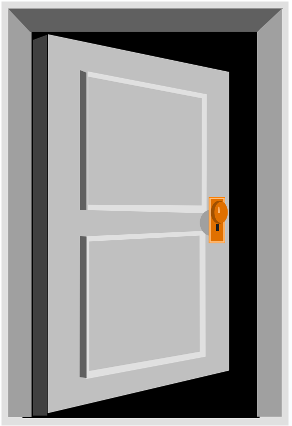
1. 平动(translation)　刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行。



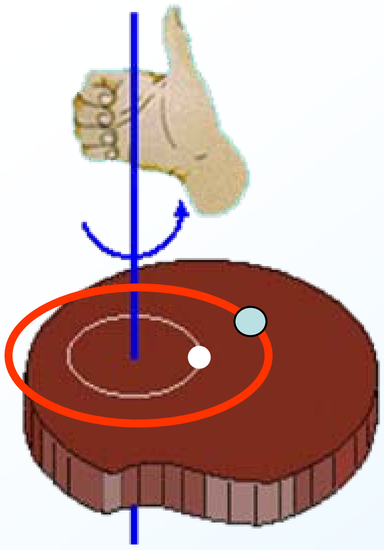
一、平动和转动

1. 平动(translation) 刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行。





2. 转动(rotation) 刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动。这种运动称为刚体的转动。这条直线称为转轴(rotation axis) 。



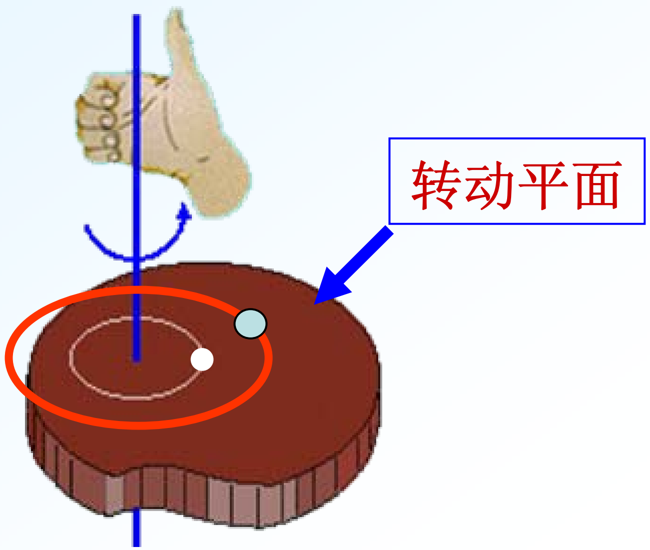
定轴转动：转轴固定不动的转动。

二、描述刚体转动的物理量

——用角量描述定轴转动

二、描述刚体转动的物理量

——用角量描述定轴转动



转动平面：定轴转动刚体上各质点的运动面

刚体定轴转动的特点：

1. 转动平面垂直于转轴。
2. 转动平面上各点均做圆周运动，角量相同，线量不同。
3. 定轴转动刚体上各点的角速度矢量 $\vec{\omega}$ 的方向均沿轴线。

1. 基本物理量

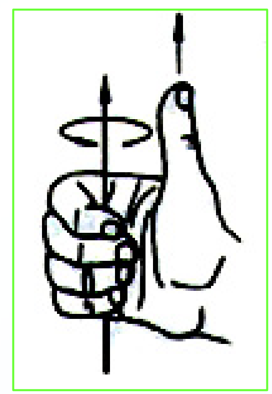
角坐标：θ　　单位：弧度（*rad*）

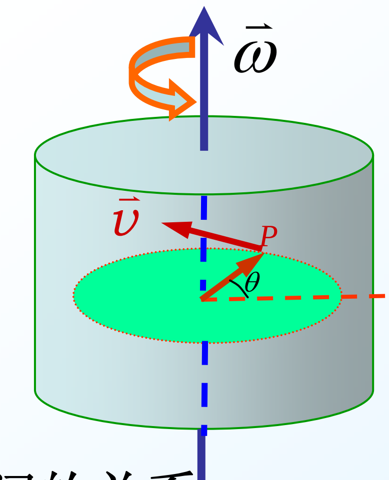
角位移：$\Delta\theta$，$d\theta$

角速度的大小：$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

单位：弧度/秒（*rad/s*）

角速度 $\vec{\omega}$ 的方向：右旋前进方向





线速度与角速度之间的关系：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

角加速度矢量：$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

单位：弧度·秒$^{-2}$ $(\mathrm{rad \cdot s^{-2}})$

1. 基本物理量

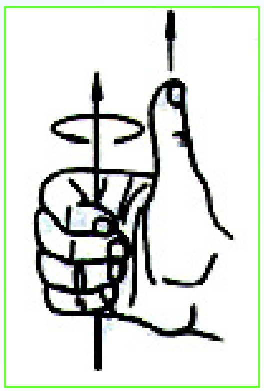
角坐标：θ　　单位：弧度（*rad*）

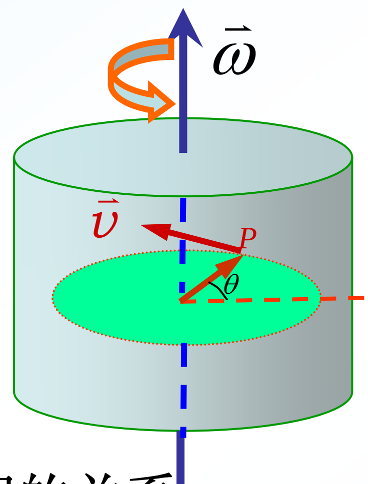
角位移：$\Delta\theta$，$d\theta$

角速度的大小：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

单位：弧度/秒（*rad/s*）

角速度$\vec{\omega}$的方向：右旋前进方向





线速度与角速度之间的关系：

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

角加速度矢量：$\vec{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

单位：弧度·秒$^{-2}$(rad·s^{-2})

加速度：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$
$$=\beta r\vec{e}_{\tau}+\omega^2 r\vec{e}_{n}$$

2. 定轴转动中的基本关系式

刚体定轴转动的运动学中所用的角量关系及角量和线量的关系如下：

$$\theta=\theta(t),\quad \omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v=r\omega\quad a_{\tau}=r\beta\quad a_{n}=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$$

注意：ω、β是矢量，在定轴转动中由于轴的方位不变，故用正负表示其方向。

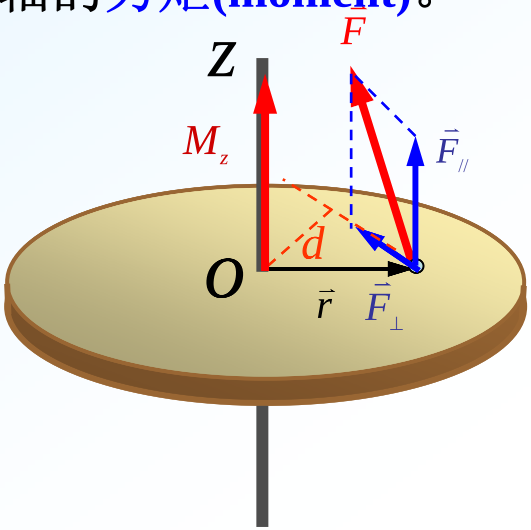
§3-2　定轴转动定律　转动惯量

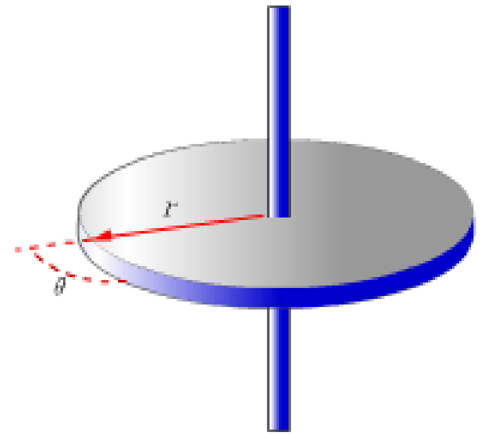
§ 3-2 定轴转动定律 转动惯量

由矢量的矢积定义，力矩M为$M = r \times F$，M的大小为$M=Fr\sin\theta$ 方向由右手法则确定,即:把右手的拇指伸直，其余四指弯曲，弯曲的方向由径矢r通过小于180^0的角 θ转向力F的方向，这时拇指所指的方向就是力矩的方向

一、对转轴的力矩

在垂直于转轴的平面内，外力 $\vec{F}_\perp$ 与力线到转轴的距离d 的乘积定义为对转轴的力矩(moment)。





$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_\perp}$$

单位：**N·m**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \begin{cases} 大小：M = Fr\sin\varphi \\ 方向：右旋\ \vec{r} \to \vec{F}\ 前进方向 \end{cases}$$

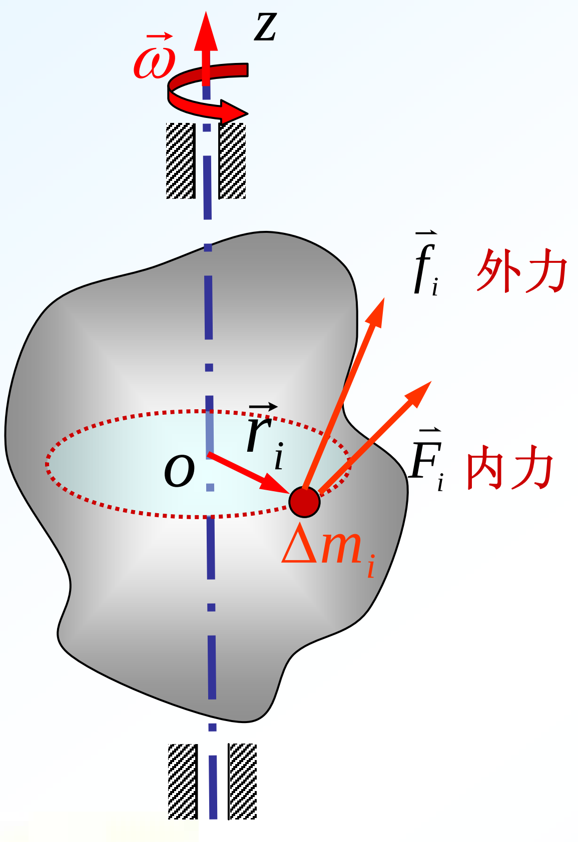
二、定轴转动定律

——牛顿定律的应用

二、定轴转动定律

——牛顿定律的应用

把刚体看作一个质点系



根据牛顿第二定律：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

用 $\vec{r}\times$上式两边

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

两边取Σ，得

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

合内力矩 **0**

合外力矩 $\vec{M}_z = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

加速度： $\vec{a}_i = \vec{a}_{i\tau} + \vec{a}_{in}$

则 $\vec{M}_z = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} + \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{in}$

因为 $\vec{r}_i \,//\, \vec{a}_{in}$

所以 $\sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{in} = 0$

而 $\vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} = r_i a_{i\tau} \sin 90° \vec{k} = r_i^2 \beta \vec{k}$

故， $M_z = (\sum \Delta m_i r_i^2)\beta$

令 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ ——转动惯量

从而，转动定律为：

用 $\vec{r}\times$上式两边

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

两边取Σ，得

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

合内力矩 0

合外力矩 $\vec{M}_z = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

加速度： $\vec{a}_i = \vec{a}_{i\tau} + \vec{a}_{in}$

则 $\vec{M}_z = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} + \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{in}$

因为 $\vec{r}_i \perp \vec{a}_{in}$

所以 $\sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{in} = 0$

而 $\vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} = r_i a_{i\tau} \sin 90° \vec{k} = r_i^2 \beta \vec{k}$

故， $M_z = (\sum \Delta m_i r_i^2)\beta$

令 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ ——转动惯量

从而，转动定律为：

$$\boxed{M_z = J\beta}$$

刚体定轴转动定律(law of rotation):

刚体在作定轴转动时，刚体的角加速度与它所受到的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

三、转动惯量(moment of inertia)

1. 定义 $J = \sum_i r_i^2 m_i$

单位： $\mathrm{kg \cdot m^2}$

刚体对定轴的转动惯量等于其各质点的质量与该质点到转轴距离的平方之积求和。

2. 物理意义

描述物体转动惯性的大小。

$$\boxed{M_z = J\beta}$$

刚体定轴转动定律(law of rotation):

刚体在作定轴转动时，刚体的角加速度与它所受到的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

三、转动惯量(moment of inertia)

1. 定义 $J = \sum_i r_i^2 m_i$

单位: $\mathrm{kg \cdot m^2}$

刚体对定轴的转动惯量等于其各质点的质量与该质点到转轴距离的平方之积求和。

2. 物理意义

描述物体转动惯性的大小。

3. 计算

（1）分离质点系 $J = \sum_i r_i^2 m_i$

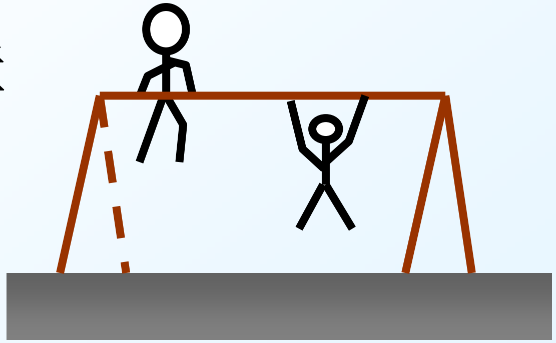
（2）若质量连续分布

$$J = \int r^2 \,\mathrm{d}m$$

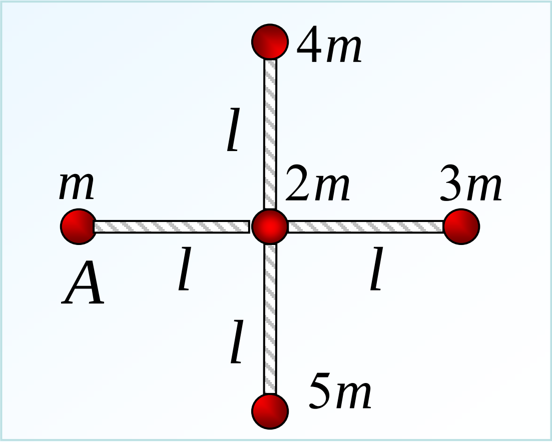
$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \rho\,\mathrm{d}V & \text{体分布} \\ \sigma\,\mathrm{d}S & \text{面分布} \\ \lambda\,\mathrm{d}l & \text{线分布} \end{cases}$$

影响 J 的因素

- 刚体的总质量 (同分布 $M>m$, $J_M>J_m$)
- 刚体质量分布 (同 m, $J_{中空}>J_{实}$)
- 转轴的位置



例3-1. 由长l的轻杆连接的质点如图所示，求质点系对过A垂直于该平面的轴的转动惯量。



解： 由定义式 $J=\sum_i r_i^2 m_i$

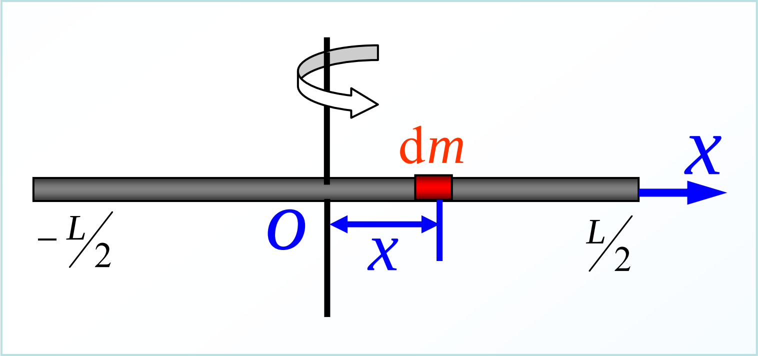
$$J=2ml^2+3m(2l)^2+(4m+5m)(\sqrt{2}l)^2$$
$$=32ml^2$$

思考：

A点移至质量为2m的杆中心处 J=?

例3-2. 一长为L的细杆，质量m均匀分布，求该杆对垂直于杆，分别过杆的中点和一端端点的轴的转动惯量。

解： (1) 轴过中点

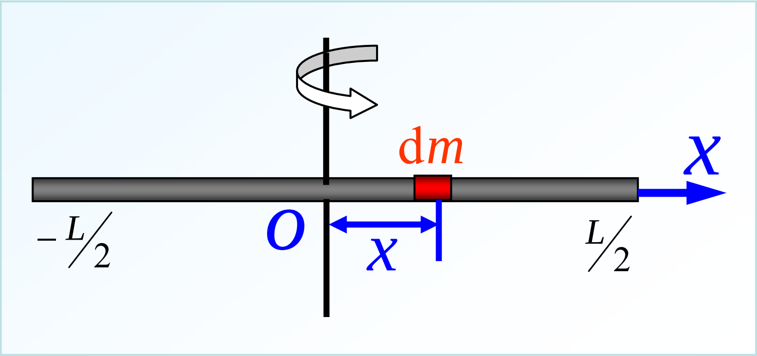


在杆上任取dm

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$
$$=\int_{-L/2}^{L/2} x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{L/2}$$
$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right)=\frac{1}{12}mL^2$$

例3-2. 一长为L的细杆，质量m均匀分布，求该杆对垂直于杆，分别过杆的中点和一端端点的轴的转动惯量。

解： (1) 轴过中点



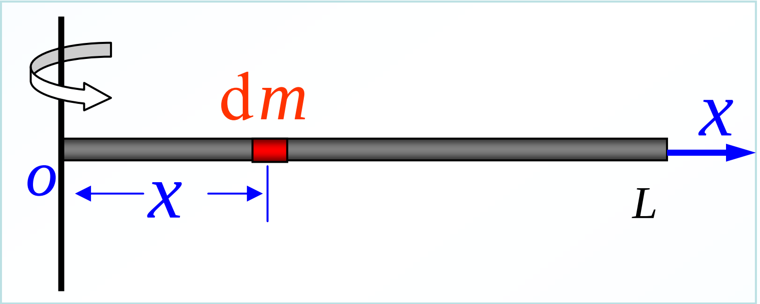
在杆上任取dm

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right)=\frac{1}{12}mL^2$$

(2) 轴过一端端点

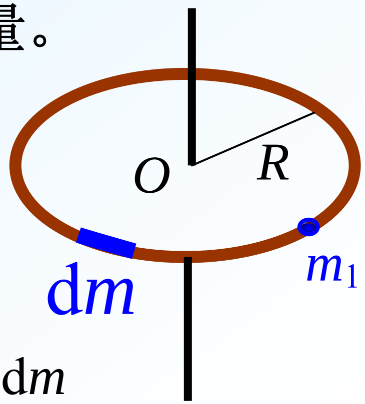


$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_0^L x^2\frac{m}{L}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

例3-3. 求质量 **m** ,半径 **R** 的圆环对中心垂直轴的转动惯量。



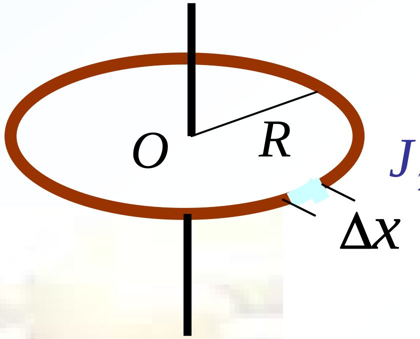
解: 圆环上取微元dm

$$J=\int r^2 \mathrm{d}m = R^2\int_0^m \mathrm{d}m = mR^2$$

思考1. 环上加一质量为m_1的质点, J_1 =?

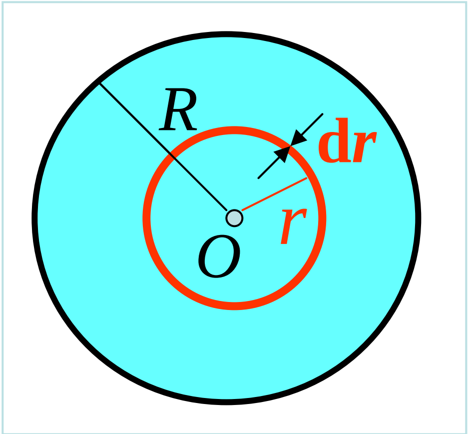
思考2. 环上有一个Δx的缺口， J_2=?

$$J_1 = mR^2+m_1R^2$$



$$J_2 = mR^2 - \frac{m}{2\pi R}\Delta x R^2$$

例3-4. 求质量 **m** , 半径 **R** 的均匀圆盘对中心垂直轴的转动惯量。**P.77 例 3-3**



解: 圆盘上取半径为r宽度**dr**的圆环作为质量元dm

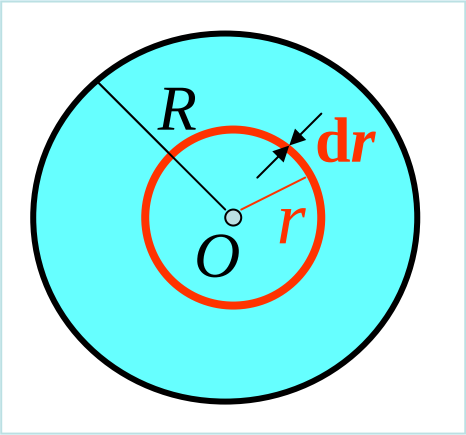
$$J_{环} = mR^2 \rightarrow \mathrm{d}J = r^2\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$J = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mR^2$$

例3-4. 求质量 m，半径 R 的均匀圆盘对中心垂直轴的转动惯量。P.77 例3-3



解: 圆盘上取半径为r宽度dr的圆环作为质量元dm

$$J_{环} = mR^2 \rightarrow \mathrm{d}J = r^2\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

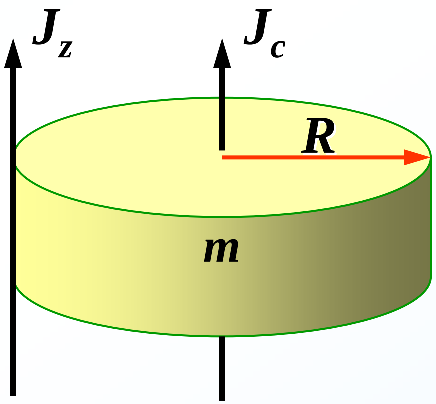
$$J = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}mR^2$$

注意: 对同轴的转动惯量才具有可加减性。

平行轴定理: 若刚体对过质心的轴的转动惯量为J_c，则刚体对与该轴相距为d的平行轴z的转动惯量J_z是

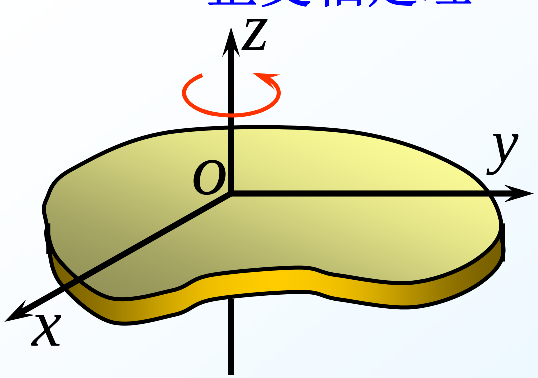
$$\boxed{J_z = J_c + md^2}$$



$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

$$= \frac{3}{2}mR^2$$

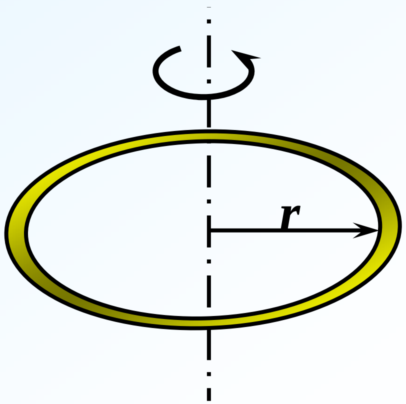
正交轴定理 对平面刚体



$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$

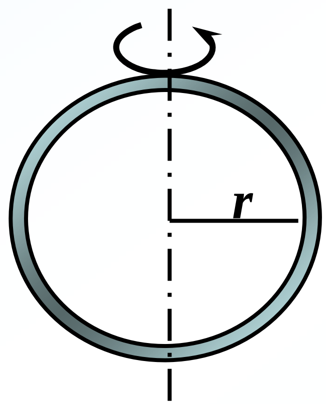
几何形状不规则的刚体的转动惯量，由实验测定。

几种常见刚体转动惯量（教材78页表3-1）



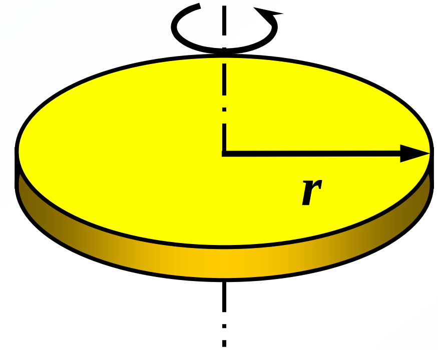
圆环转轴通过中心与盘面垂直

$$J = mr^2$$



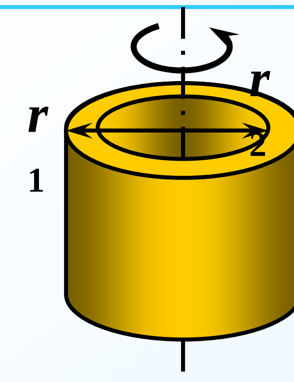
圆环转轴沿直径

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$



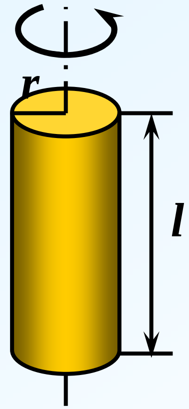
薄圆盘转轴通过中心与盘面垂直

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$



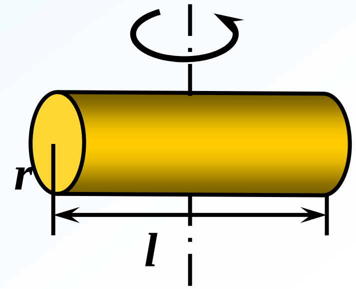
圆筒转轴沿几何轴

$$J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$$



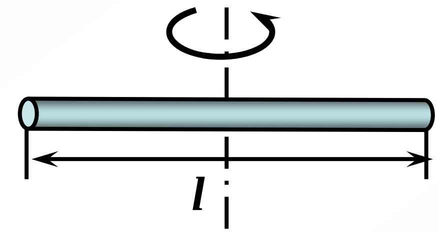
圆柱体转轴沿几何轴

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$



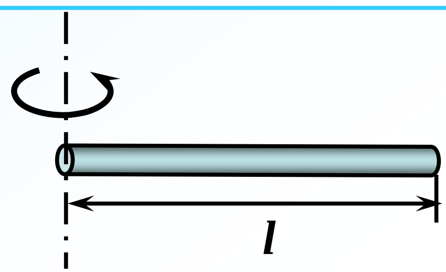
圆柱体转轴通过中心与几何轴垂直

$$J=\frac{mr^2}{4}+\frac{ml^2}{12}$$



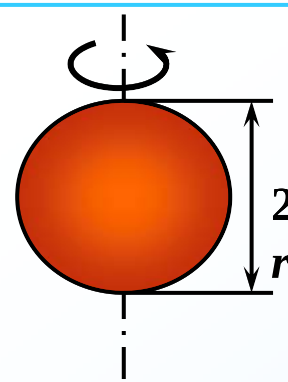
细棒转轴通过中心与棒垂直

$$J=\frac{ml^2}{12}$$



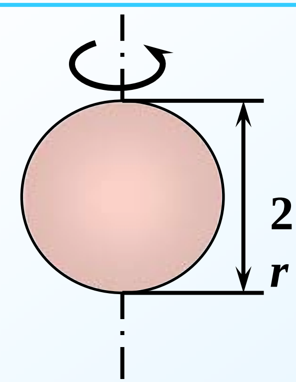
细棒转轴通过端点与棒垂直

$$J=\frac{ml^2}{3}$$



球体转轴沿直径

$$J=\frac{2mr^2}{5}$$

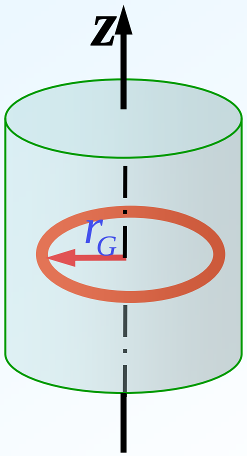


球壳转轴沿直径

$$J=\frac{2mr^2}{3}$$

4. 回转半径(radius of gyration)

设物体的总质量为m，刚体对给定轴的转动惯量为J，则定义物体对该转轴的回转半径r_G为：

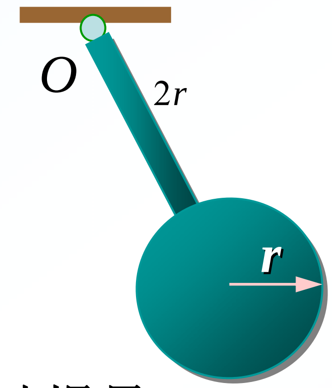


$$r_G = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

由此得： $J = m r_G^2$

意义： 设等价于物体质量集中在回转半径为r_G的圆环上的刚体对中心轴的转动惯量。

例3-5. 计算钟摆的转动惯量。(已知：摆锤质量为m，半径为r，摆杆质量也为m，长度为$2r$)



解： 摆杆转动惯量

$$J_1 = \frac{1}{3}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2$$

摆锤转动惯量

$$J_2 = J_c + md^2 = \frac{1}{2}mr^2 + m(3r)^2$$

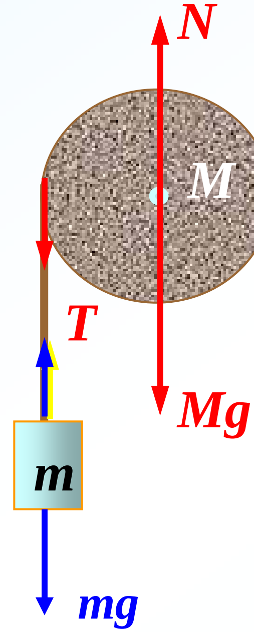
$$= \frac{19}{2}mr^2$$

$$J = J_1 + J_2 = \frac{4}{3}mr^2 + \frac{19}{2}mr^2 = \frac{65}{6}mr^2$$

例3-6. 质量为M =16kg的实心滑轮，半径为R =0.15m。一根细绳绕在滑轮上，一端挂一质量为m的物体。设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动，求：

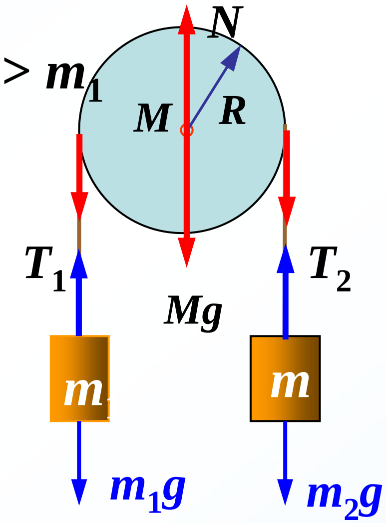
(1) 由静止开始**1**秒钟后，物体下降的距离。

(2) 绳子的张力。



$m_2 > m_1$

拓展



解：对轮、物受力分析如图

由转动定律 $TR = J\beta = \dfrac{1}{2}MR^2 \cdot \dfrac{a}{R}$

由牛顿定律 $mg - T = ma$

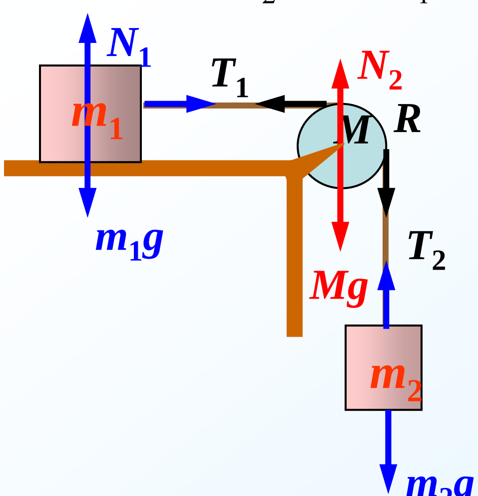
$$a = \frac{mg}{m + M/2} = \frac{8\times10}{8+8} = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times5\times1^2 = 2.5\ \mathrm{m}$$

$$T = \frac{1}{2}\times16\times5 = 40\ \mathrm{N}$$

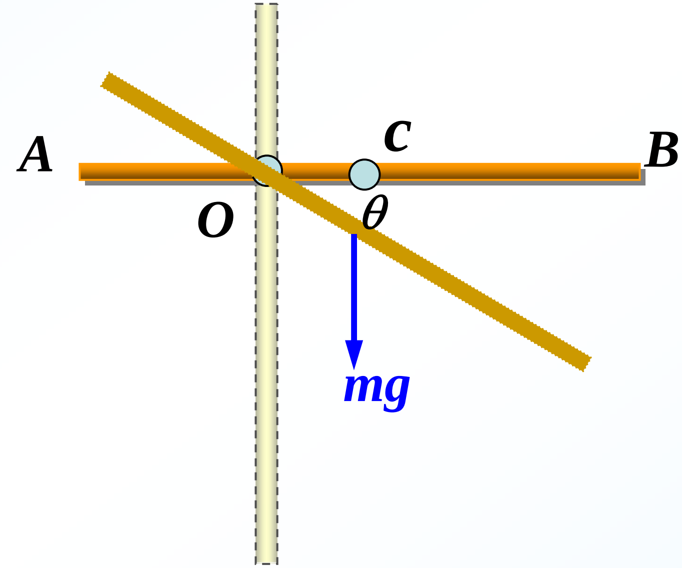
$$m_2g - T_2 = m_2a$$
$$T_1 - m_1g = m_1a$$
$$T_2R - T_1R = J\beta$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$
$$a = R\beta$$



$$m_2g - T_2 = m_2a$$
$$T_1 = m_1a$$
$$T_2R - T_1R = J\beta$$
$$J = \frac{1}{2}MR^2 \quad a = R\beta$$

例3-7. 一质量为m，长为l 的均质细杆，可绕垂直于平面、穿过O点的转轴转动，转轴距A 端$l/3$。今使棒从静止开始由水平位置绕 O点转动，求：**(1)** 水平位置的角速度和角加速度。**(2)** 垂直位置时的角速度和角加速度。



解：已知 $$J_c = \frac{1}{12}ml^2$$

由平行轴定理 $$J_o = J_c + md^2$$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

(1) $\omega_0 = 0$

由转动定律 $$\beta = \frac{M}{J_O} = \frac{mgl/6}{ml^2/9} = \frac{3g}{2l}$$

(2) 垂直时，力矩为零。故 $\beta = 0$

设棒在任意时刻位置如图

由转动定律 $$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

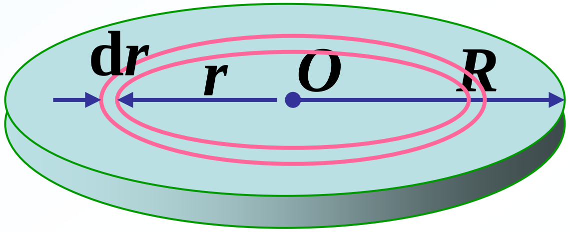
$$mg\frac{l}{6}\cos\theta = \frac{1}{9}ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{9}ml^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi/2}\frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

例3-8. 一半径为R、质量为m的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初速度为ω_0，绕中心O旋转，问经过多长时间圆盘才停止。(设摩擦系数为μ)



解： 考察半径为**r**宽度为**dr**的圆环摩擦力矩为:

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F\cdot r = \mu\,\mathrm{d}mg\cdot r$$

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r = \frac{2mr\mathrm{d}r}{R^2}$$

$$\mathrm{d}M = \frac{2m\mu g r^2\mathrm{d}r}{R^2}$$

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_0^R \frac{2\mu m g r^2\mathrm{d}r}{R^2} = \frac{2}{3}\mu m g R$$

由转动定律 $$-M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

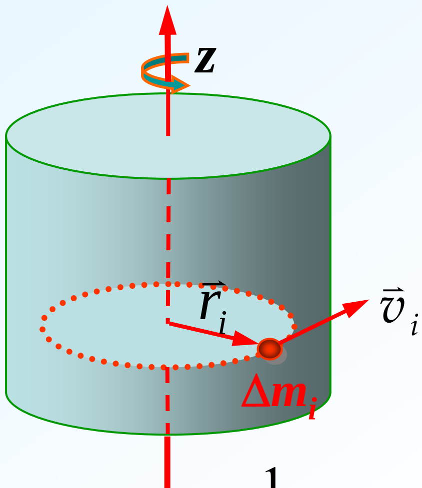
$$\mathrm{d}t = -\frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega$$

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega$$

$$t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

§3-3 刚体定轴转动的机械能和力矩的功

一、刚体的转动动能



1、质元动能：

$$\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

2、刚体的总动能：

$$E_k = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$$

即转动动能是刚体上所有质点元的动能之和

m 是物体平动惯性的量度

J 是物体转动惯性的量度

二、刚体的重力势能

1. 刚体的重力势能

所有质元的重力势能之和

$$E_P = \sum \Delta m_i g z_i$$

$$= mg\frac{\sum \Delta m_i z_i}{m} = mgz_c$$

结论：刚体的重力势能应等于质量集中于质心的重力势能

2. 刚体的机械能

$$\boxed{E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c}$$

三、力矩的功和功率

二、刚体的重力势能

1. 刚体的重力势能

所有质元的重力势能之和

$$E_P = \sum \Delta m_i g z_i$$

$$= mg\frac{\sum \Delta m_i z_i}{m} = mgz_c$$

结论： 刚体的重力势能应等于质量集中于质心的重力势能

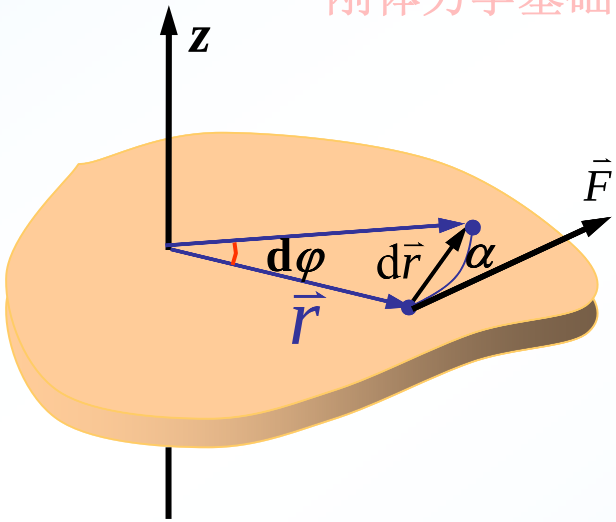
2. 刚体的机械能

$$\boxed{E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c}$$

三、力矩的功和功率

$$\mathrm{d}A = F\cos\alpha\,\mathrm{d}r = \underbrace{F\cos\alpha\, r}_{M}\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\varphi$$



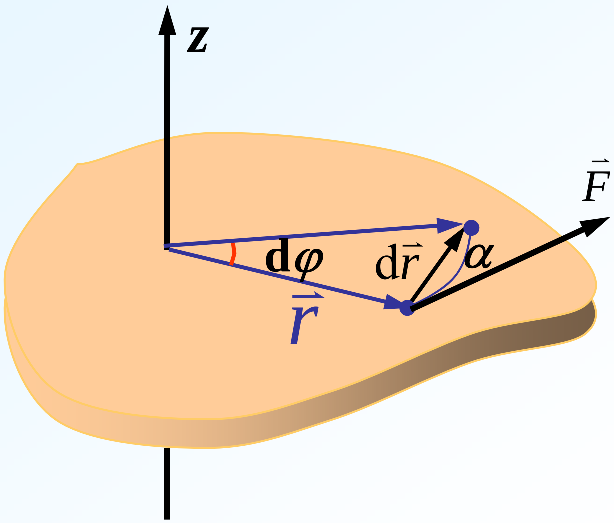
力矩的功： $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi$

合力矩的功： $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum M_i \mathrm{d}\varphi$

注： 力矩求和只能对同一参考点(或轴)进行。

力矩功率：

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{M\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega$$



四、刚体定轴转动的动能定理

$$dA = Md\varphi = J\frac{d\omega}{dt}d\varphi = J\omega d\omega$$

$$\boxed{A = \int dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

力矩的功： $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi$

合力矩的功： $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum M_i d\varphi$

注： 力矩求和只能对同一参考点(或轴)进行。

力矩功率：

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega$$

五、刚体定轴转动的功能原理

由动能定理

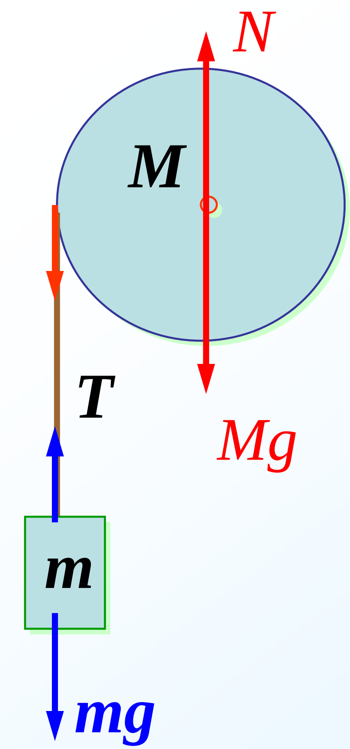
$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (M_{外} + M_{重}) d\varphi = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

重力做功由势能计算

$$\boxed{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{外} d\varphi = \left(mgz_{c2} + \frac{1}{2}J\omega_2^2\right) - \left(mgz_{c1} + \frac{1}{2}J\omega_1^2\right)}$$

例3-9. 一质量为M、半径R的圆盘，盘上绕有细绳，一端挂有质量为m的物体。设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动，问物体由静止下落高度h时其速度为多大？

解： 受力分析如图所示



对圆盘：由动能定理 $$TR\Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

对物体：由动能定理

$$mgh - Th = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = R\Delta\varphi \qquad v = R\omega$$

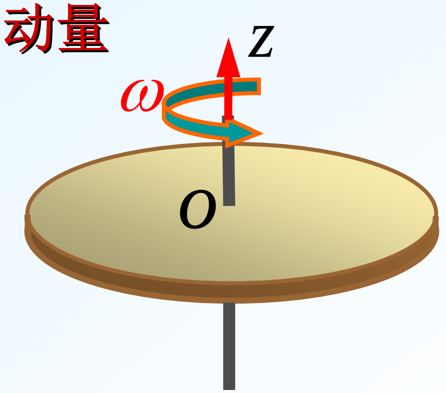
$$v_0 = 0,\ \omega_0 = 0,\quad J = M R^2/2$$

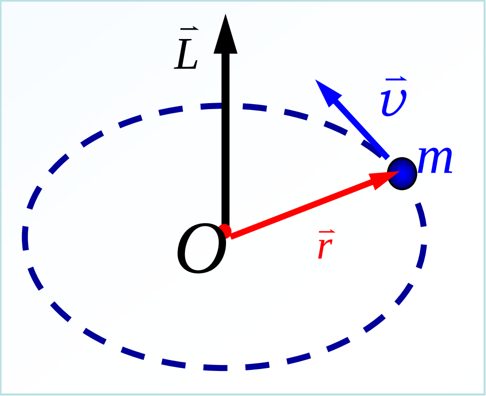
解得

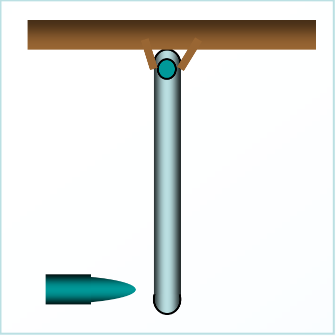
$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$

§ 3-4 角动量定理及角动量守恒定律

一、角动量







问题：图示圆盘视为一个质点系，$\boldsymbol{v}_c=0 \rightarrow \Sigma m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{v}_c = 0$，如何量度转动物体的机械运动量？

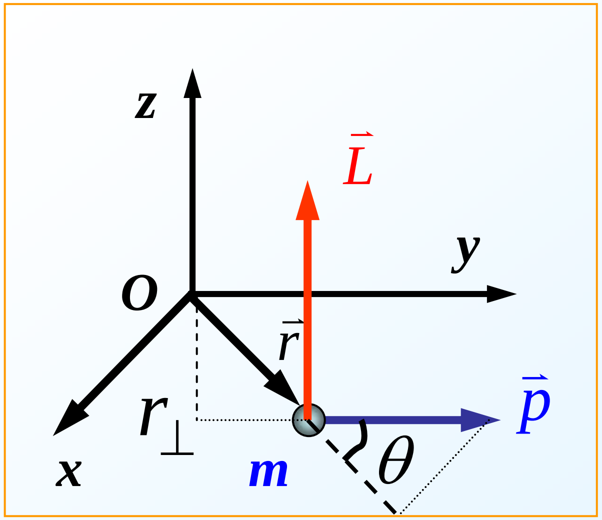
当质点作曲线运动或对某点有转动趋势时引人与动量 $\vec{p}$ 对应的角量

$\vec{L}$ ——角动量 **(angular momentum)**

(又称：动量矩**(moment of momentum)**)

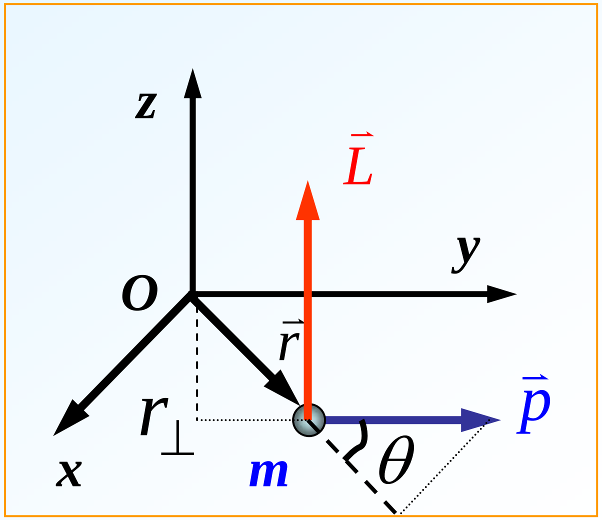
1. 单个质点的角动量

定义 $\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$



1. 单个质点的角动量

定义 $\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}}$



$$\vec{L}\Rightarrow\begin{cases}\text{大小：}\ L=rm\upsilon\sin\theta=r_\perp p\\ \text{方向：}\ \text{垂直于}\ \vec{r}\ \text{和}\ \vec{p}\ \text{组成的平面}\\ \qquad\text{服从右手螺旋法则。}\\ \text{单位：}\ kg\cdot m^2\cdot s^{-1}\end{cases}$$

质点对某参考点的角动量反映质点绕该参考点旋转运动的强弱。

质点对定轴的角动量

$$L=rm\upsilon\sin 90^\circ=m\upsilon r=mr^2\omega$$

$$L=J\omega$$

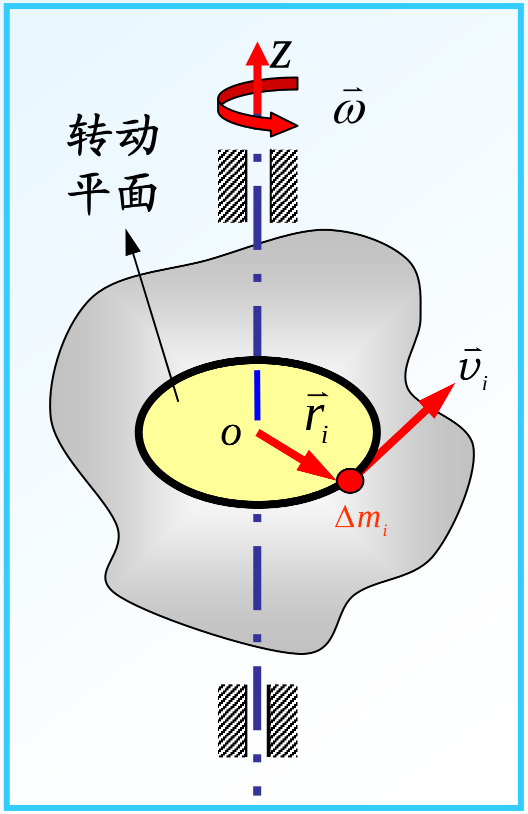
2.质点系角动量

系统内所有质点对同一参考点角动量的**矢量和**

$$\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i\vec{r}_i\times m_i\vec{\upsilon}_i$$

3.定轴转动刚体的角动量

3.定轴转动刚体的角动量



Δm_i对O的角动量：

$$\vec{L}_{io}=\vec{r}_i\times\Delta m_i\vec{v}_i$$

大小：$L_{io}=r_i\Delta m_i v_i=\Delta m_i r_i^2\omega$

方向：$\vec{\omega}$ 的方向

刚体对z轴的总角动量为

$$L_z=\sum_i L_{iz}=\sum_i r_i^2 m_i\omega$$

$$=\omega\sum_i r_i^2 m_i=J\omega$$

二、刚体的角动量定理

1. 质点的角动量定理

质点的角动量： $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

对时间t求导：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\overbrace{\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}}^{=0}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

质点角动量的时间变化率等于质点所受的合力矩。

二、刚体的角动量定理

1. 质点的角动量定理

质点的角动量： $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

对时间t求导：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}^{\,=0}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

质点角动量的时间变化率等于质点所受的合力矩。

角动量定理微分式： $\vec{M}\cdot dt=d\vec{L}$

$\vec{M}dt$ 称为**dt**时间内刚体所受合外力矩的冲量矩。

角动量定理积分式：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1}$$

质点的角动量定理：质点在$t_1\to t_2$时间内所受合外力矩的冲量矩等于该段时间内质点角动量的增量。

2. 质点系的角动量定理

质点系的角动量： $\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{M}_{i外}+\sum_i\vec{M}_{i内}$$

$$\because\ \sum_i\vec{M}_{i内}=0\qquad \vec{M}_{外}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_{i外}$$

$$\therefore\ \vec{M}_{外}\cdot dt=d\vec{L}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot dt=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1}$$

3.定轴刚体的角动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M_z\cdot dt=L_2-L_1=J_2\omega_2-J_1\omega_1}$$

2. 质点系的角动量定理

质点系的角动量：$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{M}_{i外}+\sum_i \vec{M}_{i内}$$

$$\because \sum_i \vec{M}_{i内}=0 \qquad \vec{M}_{外}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_{i外}$$

$$\therefore \vec{M}_{外}\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1}$$

3.定轴刚体的角动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M_z\cdot\mathrm{d}t=L_2-L_1=J_2\omega_2-J_1\omega_1}$$

刚体的角动量定理： 刚体在$t_1\rightarrow t_2$时间内所受合外力矩的冲量矩等于该段时间内刚体角动量的增量。

三、角动量守恒定律

当 $\vec{M}_{外}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_{i外}=0$ 时

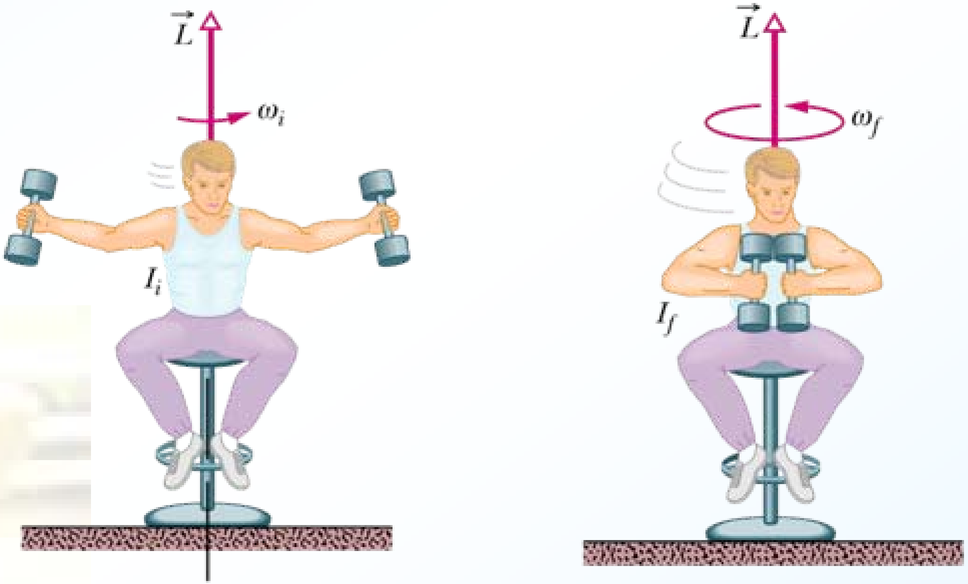
$$\boxed{J_2\vec{\omega}_2=J_1\vec{\omega}_1}$$

刚体所受合外力矩为零，则刚体的角动量保持不变。

下面看几个角动量守恒实例

下面看几个角动量守恒实例

中国跳水运动员郭晶晶



转动快慢自如

猫尾巴的功能

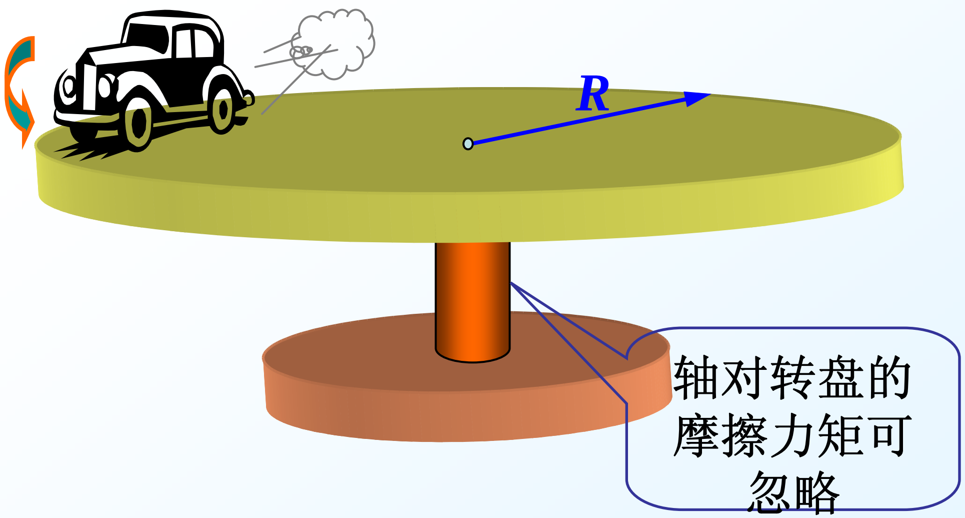
猫掉下，四脚朝天，脊背朝地→会摔死。**注意：**猫狠狠地甩了一下尾巴，结果，四脚转向地面，当它着地时，四脚伸直，通过下蹲，缓解了冲击。

四、含刚体系统的机械能守恒定律

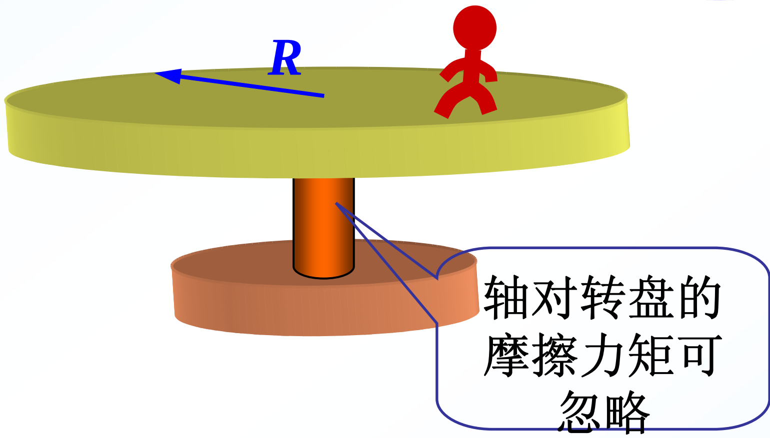
对于含刚体的系统，机械能守恒定律可表示为

$$\boxed{\sum \frac{1}{2}mv^2+\sum \frac{1}{2}J\omega^2+\sum mgh_c+\sum \frac{1}{2}kx^2=C}$$

下图所示一半径为***R***的圆盘，汽车沿盘边开动时出现什么现象？什么量守恒？



例3-10. 一半径为R、质量为 M 的转台，可绕通过其中心的竖直轴转动，质量为m 的人站在转台边缘，最初人和台都静止。若人沿转台边缘跑一周(不计阻力)，相对于地面，人和台各转了多少角度？



解： 选地面为参考系，设对转轴

人：J, ω；　　台：J', ω'

系统对转轴角动量守恒

$$J\omega - J'\omega' = 0$$

其中　$J = mR^2$　　$J' = \frac{1}{2}MR^2$

得　　$\omega' = \frac{2m}{M}\omega$

人对转台的角速度为：

$$\omega'' = \omega' + \omega = \frac{M+2m}{M}\omega$$

人沿转台边缘跑一周

$$\int \omega'' \mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\int \omega' \mathrm{d}t + \int \omega \mathrm{d}t = \int \frac{M+2m}{M}\omega \mathrm{d}t = 2\pi$$

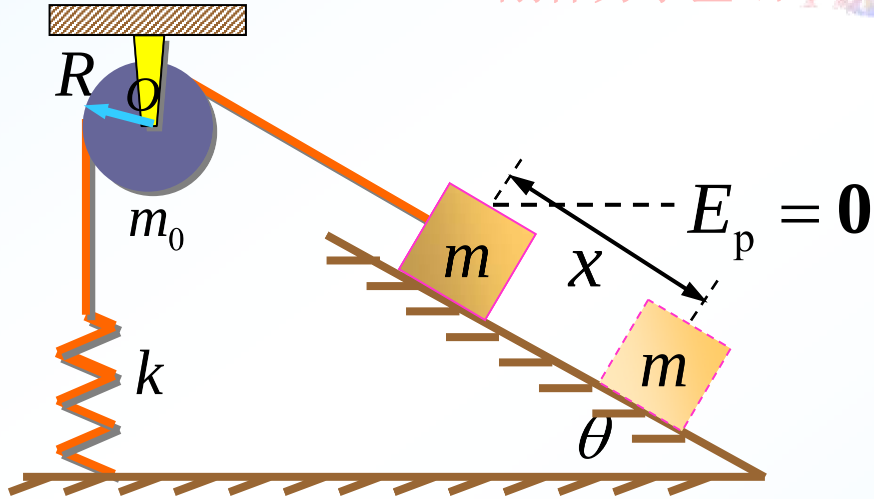
人相对地面转过的角度：

$$\theta = \int \omega \mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m+M}$$

台相对地面转过的角度：

$$\theta' = \int \omega' \mathrm{d}t = \frac{2\pi(2m)}{2m+M}$$

例3-11. 如图，已知滑轮的质量为m_0，半径为R。斜面的倾角为θ,斜面上物体的质量为m, 物体与斜面间光滑；弹簧的劲度系数为k。现将物体从静止释放，释放时弹簧无形变。设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动，忽略轴间摩擦阻力矩，求物体沿斜面下滑x(m)时的速度。(滑轮视作薄圆盘) **P.83**



解： 选取 ***m***、$\boldsymbol{m_0}$、***k*** 和地球为系统，重力和弹性力均为系统保守内力，其它外力和非保守内力均不做功，系统机械能守恒。

设 ***m*** 未释放时为初态，此时重力势能为零。当***m*** 下滑 ***x*** 后为终态。

设滑轮相对于零势点的重力势能为E_p'

初态能量： $E_{k0} + E_{p0} = 0 + E_p'$ (1)

终态能量：

$$E_k + E_p = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2\right) + \left(\frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\theta + E_p'\right) \quad (2)$$

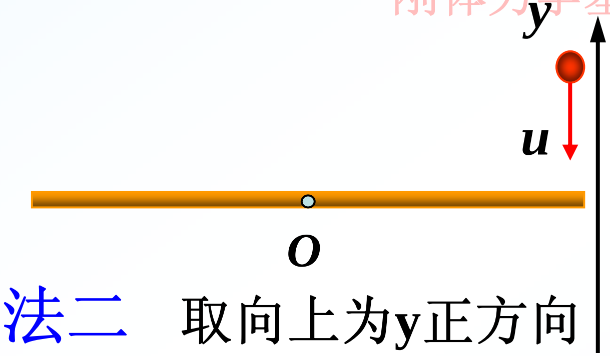
根据机械能守恒定律：式**(1)=(2)**，又已知

$$v = R\omega, \quad J_M = \frac{1}{2}m_0R^2$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{4\left(mgx\sin\theta\right) - \frac{1}{2}kx^2}{2m + m_0}}$$

例3-12. 质量为M、长为$2l$的均质细棒，在竖直平面内可绕中心轴转动。开始棒处于水平位置，一质量为m的小球以速度u垂直落到棒的一端上。设碰撞为弹性碰撞，求碰后小球的回跳速度以及棒的角速度。



解： 由系统角动量守恒

$$-mul=-J\omega+m\upsilon l$$

由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

解得 $$\upsilon=\frac{u(M-3m)}{M+3m}$$

$$\omega=\frac{6mu}{(M+3m)l}$$

解法二 取向上为y正方向

设碰撞时间为Δt

由动量定理： $\overline{F}\Delta t=m\upsilon-(-mu)$

由角动量原理： $-\overline{F}l\Delta t=-J\omega-0$

消去Δt $\quad -mul=-J\omega+m\upsilon l$

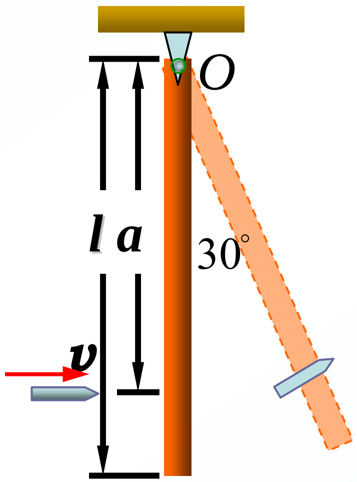
由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

解得 $$\upsilon=\frac{u(M-3m)}{M+3m}$$

$$\omega=\frac{6mu}{(M+3m)l}$$

例3-13. 一长为l、质量为M的杆可绕支点O自由转动。一质量为m、速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒偏转角为 30°，问子弹的初速度是多少？



解：角动量守恒

$$mva = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\omega^2$$

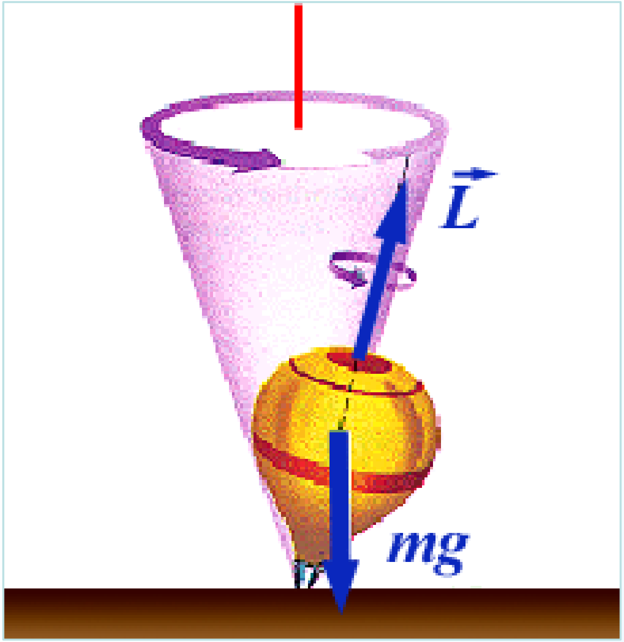
$$= mga(1-\cos 30°) + Mg\frac{l}{2}(1-\cos 30°)$$

解得 $$v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)(Ml+2ma)(Ml^2+3ma^2)}$$

§3-5 进 动

请点击观看轮子的运动

进动(precession): 高速自转的物体其自身对称轴绕竖直轴做回旋运动。



陀螺(top)运动

陀螺(top)运动分析：

设陀螺质量为m，以角速度ω自转

重力对固定点O的力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$

$\left|\vec{M}\right| = mgr\sin\theta$　　方向沿c点切向

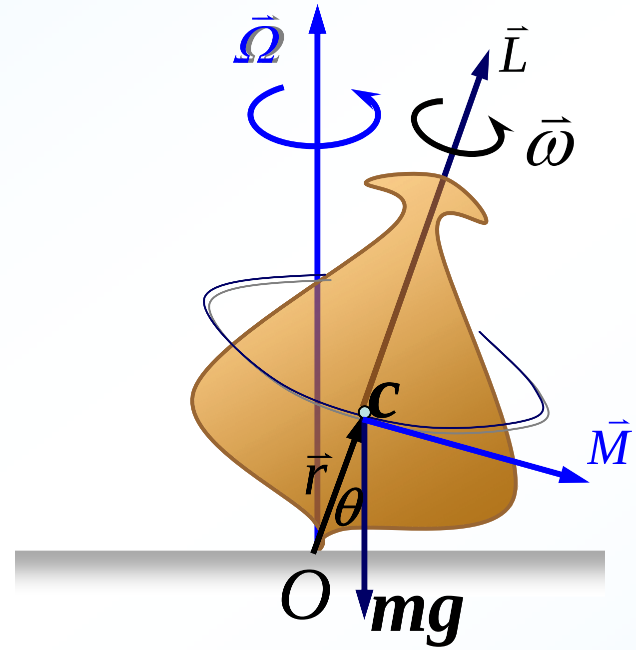
绕自身轴转动的角动量：$\vec{L} = J\omega\hat{r}$

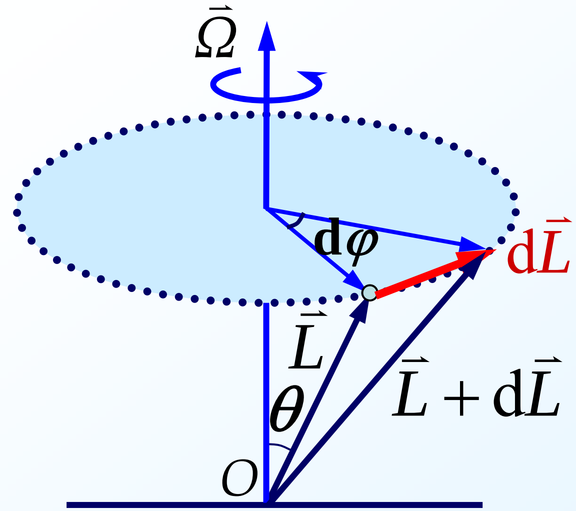
角动量定理的微分式：$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = \left|\vec{L}\right|\sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi = J\omega\sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = \left|\vec{M}\right| \cdot \mathrm{d}t = mgr\sin\theta \cdot \mathrm{d}t$$

进动角速度　$\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{mgr}{J\omega}$





结论：进动现象是自旋(spin)的物体在外力距作用下，沿外力矩方向不断改变其自旋角动量方向的结果。