

doi:10.3969/j.issn.0253-4967.2018.02.004

# 一维导电薄球层状模型的地磁测深 $C$ -响应计算

李世文 翁爱华\* 唐 裕 张艳辉 李建平 杨 悦

(吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026)

**摘 要** 对地磁数据的反演是获取地球深部电性结构的 1 种重要方法, 其反演结果的可靠性必须以准确的正演模拟为基础。文中详细介绍了球坐标系中导电薄球层状地球模型的  $C$ -响应计算理论, 并对典型的地球模型进行了数值模拟。地磁测深的激发源为磁层中的电流体系, 其形态由球谐函数  $P_l^0$  近似表示。地球内部, 导电层中电矢量位满足亥姆霍兹方程; 通过各层界面上磁场法向分量和切向分量满足的连续边界条件, 由超导地核确定的核幔边界系数向上逐层递推, 进而获得地表的边界系数, 最终将地下电性结构和地表磁场各分量联系起来。通过磁场分量比值得到与源强度无关而与地球内部电性相关的地表  $C$ -响应, 实现地磁测深一维正演计算。一维典型模型的  $C$ -响应与前人结果的一致性验证了本文算法的有效性; 通过与直接计算的  $C$ -响应曲线进行对比, 发现由于忽略了地球曲率的影响, 利用地磁函数转换方法获得的  $C$ -响应在大周期时 ( $>10^6$  s) 与理论响应存在一定的偏差, 会造成反演结果的不准确。用文中的数值模拟方法能获得精确的  $C$ -响应, 进而支撑地磁测深一维反演结果的可靠性。

**关键词** 地磁测深  $C$ -响应 电导率 球坐标系 一维模型

中图分类号: P631.3<sup>+</sup>25

文献标识码: A

文章编号: 0253-4967(2018)02-0337-12

## 0 引言

地下岩石电导率对地球内部温度、流体、熔融和挥发物的存在以及它们的体积、含量等比较敏感, 是揭示地球内部状态的重要物理参数 (Bai *et al.*, 1992; 赵国泽等, 2001)。地磁测深正是通过观测地球天然磁场来研究全球范围深部电性结构的一种方法, 其研究深度通常为几百 km 到核幔边界附近, 为人们认识和研究地幔物质组成、物理化学状态及其演化等提供重要的地球物理证据。

目前, 天然的地磁场数据主要是通过计算  $C$ -响应 (Banks, 1969) 和由转换函数法得到等效 MT 标量阻抗 (Schultz *et al.*, 1987) 进行研究。Olsen (1998, 1999) 利用  $Z:Y$  法处理欧洲地区的台站数据得到  $C$ -响应, 并反演得到了欧洲地区电导率的光滑剖面; Pütke 等 (2015) 将地磁台站与卫星数据结合计算  $C$ -响应, 反演得到全球一维平均电导率剖面, 对地幔的水含量、矿物组成和温度进行了约束。国内学者对不同地区地磁数据计算得到的  $C$ -响应反演后得到了地幔导电性分布, 结果表明不同地区的电导率剖面是不同的, 这对认识中国的地幔性质和变化规律等有重要意义 (陈伯舫, 1989; 杜兴信等, 1995; 范国华等, 1997; 张贵宾, 1998)。

[收稿日期] 2016-11-24 收稿, 2017-05-03 改回。

[基金项目] 国家重大科研仪器专项 (2011YQ05006010) 资助。

\* 通讯作者: 翁爱华, 男, 教授, E-mail: wengah@jlu.edu.cn。

Ichiki 等(2001)、赵国泽等(2001)采用转换函数法由周期为  $10^5 \sim 10^6$  s 的地磁台站数据得到等效大地电磁标量阻抗,并与短周期的大地电磁阻抗结合进行一维反演,得到了东北地下 1 000 km 内的电性结构,发现该地区的地幔过渡带电导率明显高于全球其他地区,认为可能与太平洋板块俯冲后的滞留有关。汤吉等(2005)提出利用地磁测深的等效 MT 响应函数扩展长周期电磁测深的方法,并通过几个地磁台站的资料处理得到了反映地幔结构的长周期视电阻率和阻抗相位资料。徐光晶等(2015)采用转换函数法由华北地区台站资料得到了等效大地电磁标量阻抗,反演得到了 300 ~ 1 000 km 的地幔电性结构,发现华北东部的地幔电导率明显高于西部,认为这可能与太平洋板块的俯冲有关。

上述所有研究工作的重要基础是一维球状模型地磁响应的正演模拟。虽然可以通过转换函数法将地磁数据用大地电磁测深方法进行反演,但是当周期较大时,地球曲率会造成较大的计算误差(罗威等, 2012; 覃庆炎等, 2012),影响反演结果的准确性。因此本文在假设磁层源形态可以用球谐函数  $P_1^0$  近似表示和地球可以剖分为一维薄球层状模型的前提下,考虑地球曲率,详细推导了直接在球坐标系中根据边界条件和磁场分量表达式计算地表 C-响应的一维地磁测深正演理论,为直接利用地磁数据研究地球深部的电导率分布提供了理论基础。

## 1 模型描述

磁层中复杂电流体系产生了丰富多彩的变化磁场,它们在地表产生磁场的空间结构模型对地球物理研究有重要意义(徐文耀, 2009)。该磁层激发源可以由位于地表一定高度(具体的高度值并不重要)的等效电流层近似, Banks(1969)认为对于半球或全球范围的研究,可以用单个或几个低阶球谐函数叠加形式表示磁层电流,其中  $P_1^0$  作为主要项,其强度远大于其他项,因此提出磁层电流源的  $P_1^0$  假设,并被广泛应用于地磁测深研究(Fujii *et al.*, 2002; Sun *et al.*, 2012)。

为研究  $P_1^0$  源激发的全空间电磁场,将地球剖分为不同厚度的薄球层,每一层具有相应的电导率  $\sigma_l$  和地心距离  $r_l$ 。取地心为球坐标系的原点, Z 轴指向地磁北极, XY 平面为赤道面, X 轴通过地磁经度的零点,  $\varphi$  为地磁经度,  $\theta$  为地磁余纬度,  $r$  是地表到地心的距离,  $a_0$  为地球半径(图 1)。假设各电性层是均匀各向同性的,则每层中电磁场满足 Maxwell 方程:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4)$$

式(1)~(4)中,  $\mathbf{H}$  为磁场强度,  $\mathbf{E}$  为电场强度,  $\mathbf{B}$  为磁感应强度,  $\mathbf{D}$  为电位移,  $\mathbf{j}$  为电流密度。

在第  $l$  层顶界面  $r_l$  上,磁场三分量均满足连续性条件:

$$\mu_{l-1} \mathbf{H}_{l-1} = \mu_l \mathbf{H}_l \quad (5)$$

式(5)中,  $\mu_l$  为第  $l$  层的磁导率,本文考虑地球内部和外部的磁导率均为真空磁导率  $\mu_0$ 。

## 2 地表磁场

在地球表面及外部,令电导率  $\sigma_{\text{air}} = 0$ ,由  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  及式(3),引入标量磁位  $\Omega$ ,并有

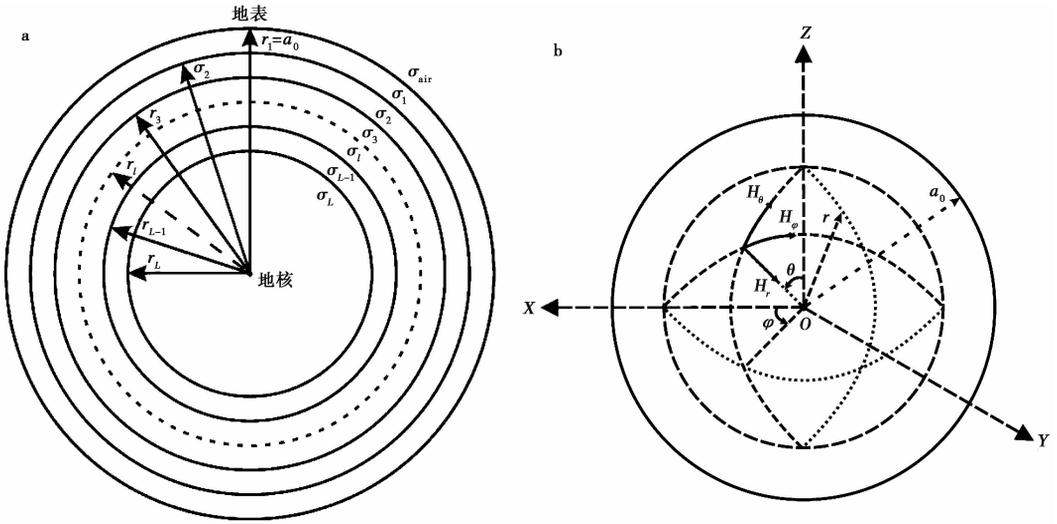


图 1 地球的薄球层状电导率模型及球坐标系下的磁场三分量

Fig. 1 Thin shell model of the Earth and three components of magnetic field in spherical coordinates.

a 球层状电导率模型，共有  $L$  层，地核为超导，边界为  $r_L$ ；b 球坐标系及定义在其中的磁场三分量

$\mathbf{H} = -\nabla\Omega$ ，则  $\Omega$  满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Omega = 0 \quad (6)$$

在球坐标系下，利用分离变量法，式(6)中  $\Omega$  的一般解可以用球谐函数表示为

$$\Omega = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ e_n^m (r/a_0)^n + i_n^m (a_0/r)^{n+1} \right] P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (7)$$

式(7)中， $i = \sqrt{-1}$ ， $P_n^m(\cos\theta)$  为  $m$ -阶  $n$ -次连带勒让德函数； $i_n^m$  和  $e_n^m$  分别为内源场系数和外源场系数，它们的具体数值和磁层电流强度以及电性结构相关，其强度可根据地磁场观测数据由最小二乘拟合等方法计算得到(Kuvshinov, 2012)。从后面的讨论可以看到，由于在地磁测深中采用磁场比值转换得到的  $C$ -响应作为研究参数，从而类似大地电磁测深(Cagniard, 1953)，具体的源强度可以不用考虑，只需要考虑这些系数和电性结构的关系。对式(7)求梯度，得到球坐标系下的磁场三分量表达式为(Banks, 1969)

$$H_r = -\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\sum_{n,m} (ne_n^m \rho^{n-1} - (n+1)i_n^m \rho^{-(n+2)}) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (8)$$

$$H_\theta = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = -\sum_{n,m} (e_n^m \rho^{n-1} + i_n^m \rho^{-(n+2)}) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{im\varphi} \quad (9)$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{a_0 \sin\theta} \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = -\frac{im}{\sin\theta} \sum_{n,m} (e_n^m \rho^n + i_n^m \rho^{-(n+1)}) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (10)$$

式(8)–(10)中， $\rho = r/a_0$ ， $H_r$ 、 $H_\theta$  和  $H_\varphi$  分别为垂直指向地心、水平 N 方向和水平 E 方向磁场。当  $\rho = 1$  时即为地表处的磁场分量。

### 3 地球内部磁场

在地球内部任一薄球层中，电导率  $\sigma \neq 0$ ；由于地磁场随时间的变化非常缓慢，可以忽略

位移电流对场分布的影响。取时谐因子  $e^{i\omega t}$ , Maxwell 方程组表示为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (14)$$

对式(11)两边取旋度, 得到电场满足的赫姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (15)$$

式(15)中,  $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ ,  $\omega$  为角频率。磁场  $\mathbf{H}$  借助式(11)可由电场求得:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (16)$$

据 Banks(1969), 若导体的电场可表示为磁场的旋度, 那么电场一定是环形场, 因此电场可以用位函数表示为

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{r}\Psi) \quad (17)$$

式(17)中,  $\mathbf{r}$  是位置矢量,  $\Psi$  为球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  的标量函数(Banks, 1969)。式(17)带入方程(15)有

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (18)$$

在球坐标系下, 式(18)可以展开为

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{dr} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Psi = 0 \quad (19)$$

利用分离变量法, 令  $\Psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ , 可以得到式(19)的一般解为

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} R_n(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (20)$$

式(20)中面球谐函数  $Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$ 。  $R_n(r)$  满足:

$$r^2 \frac{d^2 R_n(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR_n(r)}{dr} - [n(n+1) - k^2 r^2] R_n(r) = 0 \quad (21)$$

将式(20)代入式(17)得到电场解, 结合式(16)即可得到任意层中的电磁场三分量:

$$E_r = 0 \quad H_r = -\frac{1}{i\omega\mu r} \sum_{n,m} R_n(r) n(n+1) Y_n^m(\theta, \varphi) e^{i\omega t} \quad (22)$$

$$E_\theta = -\sum_{n,m} R_n(r) \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} e^{i\omega t} \quad H_\theta = -\frac{1}{i\omega\mu r} \sum_{n,m} \frac{d}{dr} (rR_n(r)) \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$E_\varphi = \sum_{n,m} R_n(r) \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i\omega t} \quad H_\varphi = -\frac{1}{i\omega\mu r \sin\theta} \sum_{n,m} \frac{d}{dr} (rR_n(r)) \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i\omega t} \quad (24)$$

为求解  $R_n(r)$ , 令  $z = kr$ ,  $R_n(r) = \hat{R}_n(z)$ , 方程式(21)变为

$$z^2 \frac{d^2 \hat{R}_n(z)}{dz^2} + 2z \frac{d\hat{R}_n(z)}{dz} + (z^2 - n(n+1)) \hat{R}_n(z) = 0 \quad (25)$$

其通解可以表示为

$$\hat{R}_n(z) = \alpha j_n(z) + \beta y_n(z) \quad (26)$$

式(26)中,  $j_n(z)$  和  $y_n(z)$  分别为第1类和第2类的  $n$ -阶复球贝塞尔函数, 待定系数  $\alpha$  与  $\beta$  和

地层电导率分布相关, 需要结合边界条件确定。

## 4 待定系数间递推关系的构建

### 4.1 地球内部

对于图 1 的一维薄球层状模型, 每一层的  $\alpha$  和  $\beta$  都是常数, 但在不同层内  $\alpha$ 、 $\beta$  通常是不同的。为求出  $\alpha$  和  $\beta$ , 并建立地表观测磁场与地下介质电阻率分布的关系, 需要考虑式 (5) 磁场三分量在层界面上的连续性边界条件。在相邻的  $l$  和  $l-1$  层 (靠近地核的层记为  $l$  层) 边界  $r = r_l$  处, 由  $H_r$  的连续性可得:

$$R_{n,l-1}(r_l) = R_{n,l}(r_l) \quad (27)$$

由  $H_\theta$  的连续性可得:

$$r_l \left( \frac{dR_{n,l-1}}{dr} \right)_{r=r_l} + R_{n,l-1}(r_l) = r_l \left( \frac{dR_{n,l}}{dr} \right)_{r=r_l} + R_{n,l}(r_l) \quad (28)$$

结合 (27) 和式 (28), 可以得到:

$$\left( \frac{dR_{n,l-1}}{dr} \right)_{r=r_l} = \left( \frac{dR_{n,l}}{dr} \right)_{r=r_l} \quad (29)$$

以上边界条件同样适用于  $\hat{R}_n(kr)$ 。因此, 将式 (26) 代入 (27) 和式 (29), 有

$$\alpha_{l-1} j_n(k_{l-1} r_l) + \beta_{l-1} y_n(k_{l-1} r_l) = \alpha_l j_n(k_l r_l) + \beta_l y_n(k_l r_l) \quad (30)$$

$$\alpha_{l-1} j'_n(k_{l-1} r_l) + \beta_{l-1} y'_n(k_{l-1} r_l) = \alpha_l j'_n(k_l r_l) + \beta_l y'_n(k_l r_l) \quad (31)$$

式 (31) 中,  $j'_n(k_l r_l) = \left. \frac{dj_n(k_l r)}{dr} \right|_{r=r_l}$ ,  $y'_n(k_l r_l) = \left. \frac{dy_n(k_l r)}{dr} \right|_{r=r_l}$ 。式 (30) 和式 (31) 可以写为如下矩阵形式:

$$\mathbf{T}_{l-1}^n \mathbf{X}_{l-1} = \mathbf{T}_l^n \mathbf{X}_l \quad (32)$$

式 (32) 中,  $\mathbf{T}_{l-1}^n = \begin{bmatrix} j_n(k_{l-1} r_l) & y_n(k_{l-1} r_l) \\ j'_n(k_{l-1} r_l) & y'_n(k_{l-1} r_l) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}_l^n = \begin{bmatrix} j_n(k_l r_l) & y_n(k_l r_l) \\ j'_n(k_l r_l) & y'_n(k_l r_l) \end{bmatrix}$ , 可根据电导率、深度

和频率求出;  $\mathbf{X}_l = \begin{bmatrix} \alpha_l \\ \beta_l \end{bmatrix}$  则需要通过核幔边界处的系数  $\mathbf{X}_L$  递推得到; 为了后文的讨论方便, 记

$$\mathbf{S}(k_l r_l) = [j_n(k_l r_l) \quad y_n(k_l r_l)], \quad \mathbf{D}(k_l r_l) = [j'_n(k_l r_l) \quad y'_n(k_l r_l)]。$$

为了获得  $\mathbf{X}_L$ , 做如下考虑。在地核处, 由于其深度数倍于最低频率的趋肤深度, 可以将其视作超导的。故在核幔边界上, 满足  $\hat{R}_n(k_L r_L) = 0$  及  $\left. \frac{d\hat{R}_n(k_L r)}{dr} \right|_{r=r_L} = 1$  (Banks, 1969), 即

$$\mathbf{T}_L^n \mathbf{X}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 从而有}$$

$$\mathbf{X}_L = [\mathbf{T}_L^n]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

根据式 (32) 并记  $\mathbf{T}_l^{l-1} = [\mathbf{T}_{l-1}^n]^{-1} \mathbf{T}_l^n$ , 得到

$$\mathbf{X}_{l-1} = \mathbf{T}_l^{l-1} \mathbf{X}_L \quad (34)$$

至此, 由式 (34), 借助式 (32), 通过类似传输线理论, 可以从核幔边界逐步向上递推得到

不同深度任意层中的待定系数  $\alpha_l$  和  $\beta_l$ ; 由式(26)可以计算出该深度的  $\hat{R}_n(z)$ , 也就得到了  $R_n(r)$ ; 带入式(22)—(24)即可求得电场和磁场三分量。特别地, 地表及空气层中待定系数  $X_0$  的递推公式为

$$X_0 = TX_L \quad (35)$$

式(35)中,  $T = T_1^0 \cdots T_{L-2}^{L-3} T_{L-1}^{L-2} T_L^{L-1}$ ,  $T$  中包含了各层的电性信息。

## 4.2 地球表面

为了建立起地球表面观测磁场与地下介质电性的关系, 需要特殊考虑地表情况。在地表, 将空气中式(8)—(10)与地下式(22)—(24)中的磁场表达式代入地表磁场的连续性条件式(5), 从而得到:

$$R_n(a_0) = \hat{R}_n(z_0) = \frac{i\omega\mu a_0}{n(n+1)}(ne_n^m - (n+1)i_n^m) \quad (36)$$

和

$$\hat{R}_n(z_0) + z_0 \left( \frac{d\hat{R}_n(z)}{dz} \right)_{z=z_0} = i\omega\mu a_0(e_n^m + i_n^m) \quad (37)$$

联合(32)和式(33), 可以得到由地下电性参数计算  $i_n^m(f)$  和  $e_n^m(f)$  的方程式:

$$\begin{bmatrix} e_n^m(f) \\ i_n^m(f) \end{bmatrix} = \frac{1}{i\omega\mu a_0} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + 1 & -\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S(k_0 a_0) \\ S(k_0 a_0) + k_0 a_0 \mathbf{D}(k_0 a_0) \end{bmatrix} TX_L \quad (38)$$

## 5 C-响应

### 5.1 C-响应的导出和计算

在地球表面, 我们可以将式(8)—(10)表示成

$$H_r(\omega, \theta, \varphi) = - \sum_{n,m} z_n^m(\omega) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (39)$$

$$H_\theta(\omega, \theta, \varphi) = - \sum_{n,m} v_n^m(\omega) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{im\varphi} \quad (40)$$

$$H_\varphi(\omega, \theta, \varphi) = - \frac{im}{\sin\theta} \sum_{n,m} v_n^m(\omega) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (41)$$

式(39)—(41)中的  $v_n^m = e_n^m + i_n^m$ 、 $z_n^m = ne_n^m - (n+1)i_n^m$ 。在假设地球为一维的条件下, Banks(1969)提出将内源场和外源场之比  $Q_n = i_n^m/e_n^m$  作为地磁测深的响应函数,  $Q_n$  与球谐函数的阶数  $m$  无关。Schmucker(1970, 1987)通过  $Q$ -响应定义  $C$ -响应, 并有

$$C_n(\omega) = \frac{a_0}{n+1} \frac{1 - \frac{n+1}{n} Q_n(\omega)}{1 + Q_n(\omega)} = \frac{a_0}{n(n+1)} \frac{z_n^m(\omega)}{v_n^m(\omega)} \quad (42)$$

由式(42)可以得到  $z_n^m(\omega)$  的表达式并代入式(39), 就可以得到地表点  $(\theta, \varphi)$  处的磁场垂向分量:

$$Z = -H_r(\omega, \theta, \varphi) = \frac{1}{a_0} \sum_{n,m} C_n(\omega) n(n+1) v_n^m(\omega) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (43)$$

响应函数  $C_n(\omega)$  的1个特点是, 它对场源尺度(即球谐函数的次  $n$ ) 的依赖性很小, 所以

从一级近似的意义上说,它在特定频率时是个常数,即  $C_n(\omega) = C_0(\omega)$  ( $C_0$  是波数为 0 的平面地球,  $C_0$  与  $C_1$  的差别很小)。因此:

$$Z = C \frac{1}{a_0} \sum_{n,m} n(n+1) v_n^m(\omega) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (44)$$

同时将水平  $N$  方向的磁场分量记为  $H$ , 有

$$H = -H_\theta(\omega, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} v_n^m(\omega) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} e^{im\varphi} \quad (45)$$

在一维模型及磁层源形态可以由球谐函数  $P_1^0$  ( $n=1, m=0$ ) 近似表示的前提下,由(44)和式(45)可得到地表某点的  $C$ -响应表达式:

$$C = -\frac{a_0 \tan\theta}{2} \frac{Z}{H} = -\frac{a_0 \tan\theta}{2} \frac{H_r}{H_\theta} \quad (46)$$

将式(35)代入  $C$ -响应的表达式,有

$$C = \frac{a_0 \mathbf{S}(k_0 a_0) \mathbf{TX}_L}{[\mathbf{S}(k_0 a_0) + k_0 a_0 \mathbf{D}(k_0 a_0)] \mathbf{TX}_L} \quad (47)$$

由式(47)可以发现,  $C$ -响应与经度和纬度无关,只与地下的电性结构有关。因此,一维条件下,  $C$ -响应在地球表面的任意位置都是相同的。

$C$ -响应的单位为 km, 一般情况下实部为正值,可以作为电磁场穿透深度的近似值;虚部为负值,其幅值在一定程度上反映了电阻率的变化。Schmucker(1987)提出关于  $C$ -响应的  $\rho^* - z^*$  转化关系:

$$\rho^* = 2\mu\omega(\text{Im}\{C\})^2 \text{ 和 } z^* = \text{Re}\{C\} \quad (48)$$

式(48)中,  $\rho^*$  和  $z^*$  分别为视电阻率和穿透深度,这有助于我们更直观地了解  $C$ -响应与地下不同深度电阻率间的关系。

## 5.2 地磁测深响应与标量大地电磁阻抗

Schultz 等(1987)根据标量大地电磁阻抗与地磁测深响应之间的关系,提出了一维条件下,地磁测深函数和大地电磁标量阻抗间的转换方法:

$$Z_n^m = \alpha_n^m T_n^m \quad (49)$$

式(49)中,  $Z = E_\varphi/B_\theta = -E_\theta/B_\varphi$ ,  $T = B_r/B_\theta$  分别为大地电磁标量阻抗和地磁测深响应。比例因子

$$\alpha_n^m = \frac{i\omega r [dP_n^m(\cos\theta)/d\theta]}{(n+1)nP_n^m(\cos\theta)} \quad (50)$$

在  $P_1^0$  假设下,比例因子  $\alpha_n^m$  简化为

$$\alpha_1^0 = -\frac{i\omega a_0}{2} \tan\theta \quad (51)$$

## 6 讨论

为了更接近地球真实的电性分布,本文选择 Olsen(1998)对欧洲地区地磁台站数据的反演结果作为理论计算模型(图 2a),计算的  $C$ -响应如图 2b。为了检验计算精度,对该模型用三维交错网格有限差分模拟技术(Kelbert *et al.*, 2014; 李建平等, 2017)计算了  $C$ -响应并同时绘

制在图 2b 中, 图中正数部分为  $C$ -响应的实部, 负数部分为  $C$ -响应的虚部。对比图 2b 可见, 一维模拟结果与三维数值结果非常一致。从  $C$ -响应的变化特征看,  $C$ -响应的实部随周期的增大而增大, 并逐渐趋于 1 个极限值(约 2 500km), 结合其周期范围及物理意义, 说明  $C$ -响应的探测深度主要为几百 km 到 2 500km。

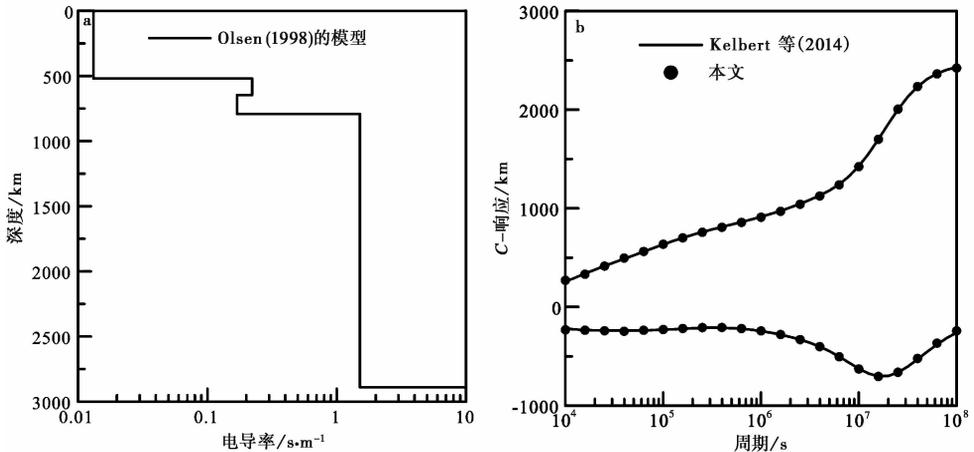


图 2 基于 Olsen (1998) 反演模型, 由本文方法计算的  $C$ -响应与 Kelbert 等 (2014) 方法计算的  $C$ -响应对比

Fig. 2 A  $C$ -response comparison of methods in this article and Kelbert *et al.* (2014) based on the inversion model of Olsen (1998).

a Olsen (1998) 对欧洲地磁数据反演得到的模型; b 计算结果的对比

我们还对 Püthe 等 (2015) 对全球卫星数据反演得到的结果模型 (图 3a) 进行了  $C$ -响应数值模拟, 结果如图 3b, 基本的变化特征同图 2b。由于都是一维模型响应, 我们将图 2b 中的  $C$ -响应也绘制在图 3b 中。对比发现, 欧洲地区平均电导率模型和全球平均电导率模型的  $C$ -响应在长周期时差别较小, 并且随着周期增大,  $C$ -响应逐渐重合, 反映了欧洲地区与全球平均下地幔电性结构具有相似性; 但在短周期时, 两者的响应差别非常大, 反映了上地幔以浅存在横向不均匀性。

研究表明, 在短周期时地球曲率对电磁场的影响很小 (罗威等, 2012; 覃庆言等, 2012)。根据 5.2 节, 我们可以得到在  $P_1^0$  假设下  $C$ -响应与大地电磁标量阻抗的相互转换公式:

$$Z = i\omega C \quad (52)$$

因此短周期时, 可以将地磁测深函数转换为 MT 阻抗  $Z$ -响应进行研究。赵国泽等 (2001)、汤吉等 (2005)、徐光晶等 (2015) 等均采用此方法得到了反映地幔电性结构的视电阻率和相位资料。实际上, 根据式 (52) 也可以反过来转换, 由 MT 阻抗计算  $C$ -响应。图 4 给出了根据图 Olsen (1998) 模型计算的  $Z$ -响应转换为  $C$ -响应的曲线及与理论  $C$ -响应的相对误差变化情况。从图 4 可见, 短周期时 2 种计算结果的曲线基本重合, 相对偏差较小, 这与前人结论一致; 随着周期的增大, 地球曲率对电磁场的影响不断增大, 计算结果会出现较大的偏差, 使得地磁测深响应与标量大地电磁阻抗相互转换的精度变差; 在周期低于  $10^6$  s 时, 相对误差基本  $< 5\%$ , 按照李墩柱等 (2009) 的研究, 这种误差对解释结果的影响可以忽略; 但更长的周期后, 虚部的相对误差开始超过  $5\%$ , 甚至当周期  $> 10^7$  s 之后, 相对误差超过  $10\%$  并急剧增大,

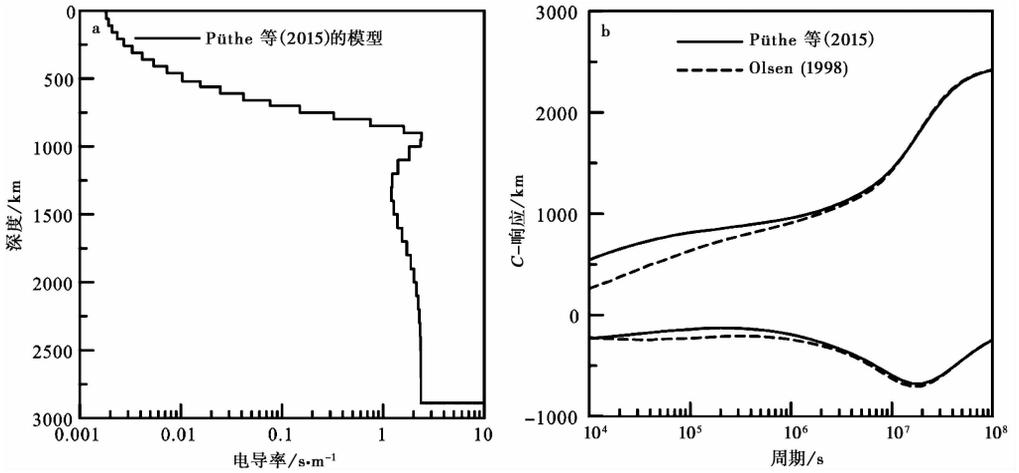


图 3 对 Olsen(1998)和 Püthe 等(2015)反演结果的  $C$ -响应数值模拟

Fig. 3  $C$ -response of inversion results of Olsen(1998)and Püthe *et al.*, (2015).

a Püthe 等(2015)对全球卫星数据反演得到的模型; b Olsen(1998)和 Püthe 等(2015)模型的数值模拟结果

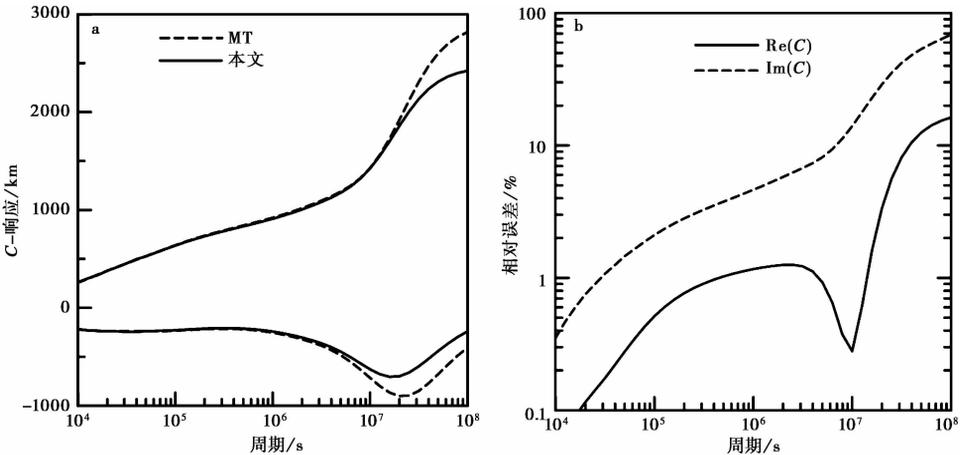


图 4 基于 Olsen(1998)模型,由本文方法计算的  $C$ -响应与利用转换函数法由标量大地电磁阻抗转换得到的  $C$ -响应对比

Fig. 4 Comparison of  $C$ -response estimated by method in this article and transformed from scalar MT impedance based on the model of Olsen(1998).

a 理论  $C$ -响应及阻抗转换  $C$ -响应; b 2 种方法  $C$ -响应的相对误差

严重影响了转换函数方法的准确性,这个结论和 Banks(1969)的结论一致。因此,建议在地磁测深数据反演中直接针对  $C$ -响应进行反演,以提高反演结果的可靠性。

## 7 结论和展望

本文给出了当地球磁层的电流激发源可以由  $P_1^0$  近似表示的前提下,球坐标系中地球薄球层状分布的电导率模型地表磁场及  $C$ -响应的计算理论,并通过数值模拟验证了理论的正确性。由模拟得到的典型模型  $C$ -响应曲线形态特征,并结合其物理意义可以发现,  $C$ -响应主要

反映地下几百 km 到下地幔的电性结构。

我们采用不同方法(地磁转换函数方法和直接计算方法)计算了典型模型的  $C$ -响应并通过对比分析发现,地磁转换函数方法计算得到的  $C$ -响应在短周期时能满足精度要求,但在较长周期( $>10^6$  s)时由转换方法得到的  $C$ -响应与直接计算得到的  $C$ -响应误差较大,而且该误差随着周期增大而增大。因此,建议直接基于  $C$ -响应对地磁数据进行反演,提高反演结果的可靠性。

## 参 考 文 献

- 陈伯舫. 1989. 中国东南地区深部电导率分布的进一步研究 [J]. 地震研究, 12(4): 348—352.
- CHEN Bo-fang. 1989. Further study of the electrical conductivity beneath the region of Southeast China [J]. Journal of Seismological Research, 12(4): 348—352 (in Chinese).
- 杜兴信, 鲁秀玲. 1995. 陕西地区单台  $Z/H$  地磁测深研究 [J]. 地震地磁观测与研究, 16(1): 27—34.
- DU Xing-xin, LU Xiu-ling. 1995. Research on the geomagnetic sounding in Shaanxi region by single station  $Z/H$  method [J]. Seismological and Geomagnetic Observation and Research, 16(1): 27—34 (in Chinese).
- 范国华, 姚同起, 顾左文, 等. 1997. 利用磁梯度法研究中国地幔电导率 [J]. 地震学报, 19(2): 164—173.
- FAN Guo-hua, YAO Tong-qi, GU Zuo-wen, *et al.* 1997. Research on mantle conductivity of China with gradient method [J]. Acta Seismologica Sinica, 19(2): 164—173 (in Chinese).
- 李墩柱, 黄清华, 陈小斌. 2009. 误差对大地电磁测深反演的影响 [J]. 地球物理学报, 52(1): 268—274.
- LI Dun-zhu, HUANG Qing-hua, CHEN Xiao-bin. 2009. Error effects on magnetotelluric inversion [J]. Chinese Journal of Geophysics, 52(1): 268—274 (in Chinese).
- 李建平, 翁爱华, 李世文, 等. 2018. 基于球坐标系下有限差分的地磁测深三维正演 [J]. 吉林大学学报(地球科学版), 48(2): 411—419.
- LI Jian-ping, WENG Ai-hua, LI Shi-wen, *et al.* 2018. 3-D forward modeling of geomagnetic sounding based on finite difference method in spherical coordinates [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 48(2): 411—419 (in Chinese).
- 罗威, 王绪本, 覃庆炎. 2012. 基于球体层状介质模型的大地电磁正演 [J]. 物探化探计算技术, 34(4): 384—389.
- LUO Wei, WANG Xu-ben, QIN Qing-yan. 2012. MT 1D forward modeling based on sphere layered model [J]. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration, 34(4): 384—389 (in Chinese).
- 覃庆炎, 罗威, 张伟. 2012. 地球曲率对长周期大地电磁测深法的影响 [J]. 地震地质, 34(3): 456—466. doi: 10.3969/j.issn.0253-4967.2012.03.007.
- QIN Qing-yan, LUO Wei, ZHANG Wei. 2012. The influence of the Earth's curvature on the long-period magnetotelluric sounding method [J]. Seismology and Geology, 34(3): 456—466 (in Chinese).
- 汤吉, 赵国泽. 2005. 利用 GDS 的等效 MT 响应函数扩展长周期电磁测深研究 [C]// 中国地球物理第二十一届全国年论文集. 北京: 中国地球物理学会.
- TANG Ji, ZHAO Guo-ze. 2005. Study on extended long period electromagnetic sounding using GDS equivalent MT response function [C]// Annual Meeting of China Geophysical Society. Chinese Geophysical Society, Beijing (in Chinese).
- 滕吉文. 2003. 地球深部物质和能量交换的动力过程与矿产资源的形成 [J]. 大地构造与成矿学, 27(1): 3—21.
- TENG Ji-wen. 2003. Dynamic process of substance and energy exchanges in deep Earth and formation of mineral resources [J]. Geotectonica et Metallogenia, 27(1): 3—21 (in Chinese).
- 王桥, 黄清华. 2016. 华北地磁感应矢量时空特征分析 [J]. 地球物理学报, 59(1): 215—228.

- WANG Qiao, HUANG Qing-hua. 2016. The spatial-temporal characteristics of geomagnetic induction vectors in North China [J]. Chinese Journal of Geophysics, 59(1): 215—228(in Chinese).
- 徐光晶, 汤吉, 黄清华, 等. 2015. 华北地区上地幔及过渡带电性结构研究 [J]. 地球物理学报, 58(2): 566—575. doi: 10.6038/cjg20150219.
- XU Guang-jing, TANG Ji, HUANG Qing-hua, *et al.* 2015. Study on the conductivity structure of the upper mantle and transition zone beneath North China [J]. Chinese Journal of Geophysics, 58(2): 566—575(in Chinese).
- 徐文耀. 2009. 地球电磁现象物理学 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社.
- XU Wen-yao. 2009. Physics of Electromagnetic Phenomena of the Earth [M]. University of Science and Technology of China Press, Hefei(in Chinese).
- 张贵宾. 1998. 地磁梯度测深与位场反演 [M]. 北京: 冶金工业出版社.
- ZHANG Gui-bin. 1998. Geomagnetic Gradient Depth Sounding and Potential Field Inversion [M]. Metallurgical Industry Press, Beijing(in Chinese).
- 赵国泽, 汤吉, 梁竞阔, 等. 2001. 用大地电磁网法在长春等地探测上地幔电导率结构 [J]. 地震地质, 23(2): 143—152. doi: 10.3969/j.issn.0253-4967.2001.02.003.
- ZHAO Guo-ze, TANG Ji, LIANG Jing-ge, *et al.* 2001. Measurement of network-MT in two areas of NE China for study of upper mantle conductivity structure of the back-arc region [J]. Seismology and Geology, 23(2): 143—152(in Chinese).
- Bai Q, Kohlstedt D L. 1992. Substantial hydrogen solubility in olivine and implications for water storage in the mantle [J]. Nature, 357(6380): 672—674.
- Banks R J. 1969. Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle [J]. Geophysical Journal International, 17(5): 457—487.
- Cagniard L. 1953. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting [J]. Geophysics, 18(3): 605—635.
- Fujii I, Schultz A. 2002. The 3D electromagnetic response of the Earth to ring current and auroral oval excitation [J]. Geophysical Journal International, 151(3): 689—709.
- Ichiki M, Uyeshima M, Utada H, *et al.* 2001. Upper mantle conductivity structure of the back-arc region beneath northeastern China [J]. Geophysical Research Letters, 28(19): 3773—3776.
- Kelbert A, Meqbel N, Egbert G D, *et al.* 2014. ModEM: A modular system for inversion of electromagnetic geophysical data [J]. Computers & Geosciences, 66:40—53.
- Kelbert A, Schultz A, Egbert G. 2009. Global electromagnetic induction constraints on transition-zone water content variations [J]. Nature, 460(7258): 1003—1006.
- Kuvshinov A V. 2012. Deep electromagnetic studies from land, sea, and space: progress status in the past 10 years [J]. Surveys in Geophysics, 33(1): 169—209.
- Olsen N. 1998. The electrical conductivity of the mantle beneath Europe derived from  $C$ -responses from 3 to 720 hr [J]. Geophysical Journal International, 133(2): 298—308.
- Olsen N. 1999. Long-period (30 days – 1 year) electromagnetic sounding and the electrical conductivity of the lower mantle beneath Europe [J]. Geophysical Journal International, 138(1): 179—187.
- Püthe C, Kuvshinov A, Khan A, *et al.* 2015. A new model of Earth's radial conductivity structure derived from over 10 yr of satellite and observatory magnetic data [J]. Geophysical Journal International, 203(3): 1864—1872.
- Schmucker U. 1987. Substitute conductors for electromagnetic response estimates [J]. Pure and Applied Geophysics, 125(2-3): 341—367.
- Schultz A, Larsen J C. 1987. On the electrical conductivity of the mid-mantle—I. Calculation of equivalent scalar magnetotelluric response functions [J]. Geophysical Journal International, 88(3): 733—761.
- Shimizu H, Koyama T, Baba K, *et al.* 2009. Three-dimensional geomagnetic response functions for global and semi-

global scale induction problems [J]. *Geophysical Journal International*, 178(1): 123—144.

Srivastava S P. 1966. Theory of the magnetotelluric method for a spherical conductor [J]. *Geophysical Journal International*, 11(4): 373—387.

Sun J, Egbert G D. 2012. Spherical decomposition of electromagnetic fields generated by quasi-static currents [J]. *GEM—International Journal on Geomathematics*, 3(2): 279—295.

## C-RESPONSE OF GEOMAGNETIC DEPTH SOUNDING ON A 1D THIN SHELL MODEL

LI Shi-wen WENG Ai-hua TANG Yu

ZHANG Yan-hui LI Jian-ping YANG Yue

(*College of Geo-Exploration Sciences and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China*)

### Abstract

This paper tries to formulate the  $C$ -response of geomagnetic depth sounding (GDS) on an Earth model with finite electrical conductivity. The computation is performed in a spherical coordinate system. The Earth is divided into a series of thin spherical shells. The source is approximated by a single spherical harmonic  $P_1^0$  due to the spatial structure of electrical currents in the magnetosphere. The whole solution space is separated into inner and external parts by the Earth surface. Omitting displacement current, the magnetic field in the external space obeys Laplacian equation, while in the inner part, due to the finite conductivity, the electromagnetic fields obey Helmholtz equation. To connect the magnetic fields in the inner and external space, the continuity condition of magnetic fields is used on the Earth surface. The external magnetic fields are expressed by the inner and external source coefficients, from which a new parameter called  $C$ -response is computed from the inner coefficient divided by the external coefficient, thus normalizing the actual source strength. The inner magnetic fields in each layer can be recursively derived by the continuity boundary condition of both normal and tangential components of the magnetic field from the initial boundary condition at core-mantle-boundary. The consistency of our  $C$ -responses with that from a typical 1-D global model validates the accuracy of the proposed algorithm. Numerical results also show that the  $C$ -response estimated from the geomagnetic transfer function method will deviate exceeding 5% from the actual response at longer periods than about  $10^6$ s, which means that ignoring the curvature of the Earth at extreme long periods will make inversion result unreliable. Therefore, an accurate  $C$ -response should be computed in order to lay a solid foundation for reliable inversion.

**Key words** geomagnetic depth sounding,  $C$ -response, electrical conductivity, spherical coordinate system, 1-D model

---

[作者简介] 李世文, 男, 1988 年生, 2011 年于吉林大学地球探测科学与技术学院获应用地球物理专业学士学位, 现为在读博士研究生, 主要从事电磁法及电磁勘探正反演理论研究, E-mail: lisw1031@163.com。