

宁夏大学

2018年攻读博士学位研究生入学考试初试试题卷

考试科目：常微分方程

适用专业：应用数学

(不用抄题，答案写在答题纸上，写明题号，答案写在试题卷上无效)

一、求下列微分方程的解。(每小题10分，共50分)

1. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3.$

2. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = 0.$

3. $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = \cos 2t$

4. $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0.$

5. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y).$

二、(10分) 求方程 $tx'' - x' = t^2$ 于域 $t \neq 0$ 上的所有解.

三、(10分) 设已知二阶变系数齐次线性方程 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ 的一个非零解 $y_1(x)$,

试通过降阶法求得其通解，并给出与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解.

四、(15分) 求方程组 $x' = Ax$ 的基解矩阵，其中 x 为三维列向量，

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

五、(15分) 设 $A(t)$ 为区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续 $n \times n$ 实矩阵， $\Phi(t)$ 为方程 $x' = A(t)x$ 的基解矩

阵，而 $x = \varphi(t)$ 为其一解. 试证：

(1) 对于方程 $y' = -A^T(t)y$ 的任一解 $y = \psi(t)$ 必有 $\psi^T(t)\varphi(t) = \text{常数}$;

(2) $\Psi(t)$ 为方程 $y' = -A^T(t)y$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 C ，使

$$\Psi^T(t)\Phi(t) = C.$$