宁　夏　大　学

2016 年攻读博士学位研究生入学考试初试试题卷

考试科目：　常微分方程　　　　　　　　适用专业：应用数学

（不用抄题，答案写在答题纸上，写明题号，答案写在试题上无效）

一、求解下列微分方程（每题 6 分，计 30 分）

1. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ ；

2. $(e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$ ；

3. 设 $f'(y)$， $p(x)$, $q(x)$ 均是连续函数， $f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$ ；

4. $\dfrac{dN}{dt} = r(t)\left[1 - \dfrac{N}{K(t)}\right]N$ ，其中 $r(t)$ 是非负函数， $K(t)$ 是正函数；

5. $y'^3 + y^3 - 3yy' = 0$

二、（10 分）设 K 为非负常数， $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的非负连续函数，且满足不等式

$$f(t) \le K + \int_\alpha^t f(s)g(s)ds\ ,\quad t \in [\alpha, \beta]\ ,$$

则有

$$f(t) \le K \exp\left(\int_\alpha^t g(s)ds\right),\quad t \in [\alpha, \beta]\ .$$

三、（12 分）设 $\mu(x, y)$ 为方程 $M(x, y)dx + N(x. y)dy = 0$ 的积分因子，从而求得可微函数 $U(x, y)$ 使得 $dU = \mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x. y)dy]$. 又设 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数，则 $\mu(x, y)\varphi(U(x, y))$ 也是方程 $M(x, y)dx + N(x. y)dy = 0$ 的积分因子.

四、（12 分）证明 $x = \dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x'' + \dfrac{2}{t}x' + x = 0$ 的解；并求方程 $x'' + \dfrac{2}{t}x' + x = 0$ 的通解.

五、（12 分）设 $f(t)$ 是实数集上的连续函数，$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ 是方程 $x''' + 5x'' + 6x' = f(t)$ 的两个解，证明极限 $\lim\limits_{t \to +\infty}[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$ 存在.

六、（12 分）求解初值问题

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y + e^{-t}, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$$

七、（12 分）设 $A(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵函数，它的元素是 $a_{ij}(t)$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$ ）．若 $x_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是方程组 $x' = A(t)x$ 的任意 n 个解，则其 Wronsky 行列式 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] = W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程

$$W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)]W \text{ ，}$$

并证明 $W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)]ds\right)$ ， $t_0, t \in [a, b]$.