

长沙理工大学

2018 年硕士研究生复试考试试题

考试科目：实变函数

考试科目代码：F1001

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、判断题（你认为对的请记√，你认为错的请记×，每小题3分，共30分）

- 1、集 $\{x | x \in E, f(x) > a\}$ 的余集通常记成 $E[f \leq a]$ ； ()
- 2、可数个可数集的并仍为可数集； ()
- 3、设 E 是一个有界的无限集合，则 E 至少有一个聚点； ()
- 4、直线上任一个非空开集都可以表示成至多可数多个开区间的并； ()
- 5、如果 E 外测度等于零，即 $m^*E = 0$ ，则 E 的任何子集必为可测集； ()
- 6、若 E 为可测集，则必有 E 的测度为正实数，即： $0 < mE < +\infty$ ； ()
- 7、设函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f ，则 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ； ()
- 8、若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ，且 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 g ，则在 E 上 $f = g$ 几乎处处成立； ()
- 9、设 f 是可测集 $E(\subseteq R^n)$ 上的非负可测函数且 $\int_E f(x)dx = 0$ ，则 $f = 0$ a.e 于 E ； ()
- 10、设 A 是可测集 E 的可测子集， $f(x)$ 是定义在 E 上的非负可测函数，则有
$$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx.$$
 ()

二、计算题（每小题10分，共20分）

- 1、设 E 是 $[0,1]$ 中的所有有理数组成的集合，求 E 在 R^1 中的导集、核与闭包，即求 E', E^0, \overline{E} .
- 2、设 $A_n = \{\frac{m}{n} | m \in Z\}, n = 1, 2, \dots, Z$ 为自然数集，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 及 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}$.

三、证明题(1、2 小题每题 10 分, 3、4 小题每题 15 分, 共 50 分).

1、证明: 直线上点集 F 是闭集的充分必要条件是 F 的闭包等于 F , 即 $\bar{F} = F$.

2、试证明 R^n 中的有界集 E 的外测度是有限.

3、求证

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} (p > -1) .$$

4、设 E 是 R^n 上的可测集, f, g 是定义在 E 上的可测度函数且 $f = g$ a.e 于 E 中, 证明:

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx .$$