

长沙理工大学

2017 年硕士研究生复试考试试题

考试科目：实变函数

考试科目代码：F1001

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、判断题（你认为对的请记√，你认为错的请记×，每小题 3 分，共 30 分）

- 1、集 $\{x | x \in E, f(x) > a\}$ 通常记成 $E[f(x) > a]$ 或 $E[f > a]$ ； ()
- 2、可数多个可数集的并仍为可数集； ()
- 3、任意多个开集的并仍为开集，任意多个闭集的交仍为闭集； ()
- 4、直线 R^1 上任意非空开集都可以表示成至多可数多个开区间的并； ()
- 5、如果 E 外测度等于零，即 $m^*E = 0$ ，则 E 必为可测集； ()
- 6、若 E 为可测集，则必有 E 的余集 E^c 也为可测集； ()
- 7、若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f ，则 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ； ()
- 8、若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ，并且 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 g ，则 $f(x) = g(x)$ 于 E 上几乎处处成立； ()
- 9、在区间 I 上勒贝格可积函数必定黎曼可积； ()
- 10、设 E 是可测集， A 、 B 是 E 的两个互不相交的可测子集， φ 是定义在 E 上的非负简单函数，则有

$$\int_{A \cup B} \varphi(x) dx = \int_A \varphi(x) dx + \int_B \varphi(x) dx. \quad ()$$

二、计算分析题（每小题 10 分，共 20 分）

- 1、设 E_1 是 $[0,1]$ 中的所有有理数组成的集合，求 E_1 在 R^1 中的导集、核与闭包，即求

$E_1^{\circ}, \overline{E_1}, \overline{E_1^{\circ}}$.

2、设 $E = (0, +\infty)$, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, n], \\ 0, & x \in (n, +\infty). \end{cases}$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 并说明 f_n 是否依测度收敛.

三、证明题(1、2 小题每题 10 分, 3、4 小题每题 15 分, 共 50 分)

1、任意多个开集的并仍是开集, 有限多个开集之交仍是开集.

2、设 E 为有界集, 试证明: $m^*E < +\infty$.

3、设 E 中的元表是直线上两两互不相交的开区间, 则 E 是可数集.

4、设 E 是 R^n 上的零测集, 即 $mE = 0$, f 是定义在 E 上的可测函数证明:

$$\int_E f(x) dx = 0 .$$