

长沙理工大学

2018 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学

考试科目代码： 601

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、计算下列各题（每小题 5 分，共 50 分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

3. 求函数 $y = \sin^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ 的导数

4. 求隐函数 $x - y - e^y = 0$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

5. 求函数 $y = e^{-x} \cos(3-x)$ 的微分 dy

6. 设函数 $z = z(x, y)$ ，是由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的，求 z 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 dz

7. 设 $z = x \ln(xy)$ ，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

8. 求不定积分 $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

9. 求不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

10. 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

二、求参数方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$,

并求 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的导数值 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}}$ (本题 10 分)

三、计算定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin \theta - \sin^3 \theta} d\theta$ (本题 10 分)

四、计算定积分 $\int_1^6 \frac{x dx}{1 + \sqrt{3+x}}$ (本题 10 分)

五、计算 $I = \iint_D e^{x^2} dx dy$, 其中 D 为在第一象限由 $y = x, y = x^3$ 围成的区域 (本题 10 分)

六、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛区间 (本题 15 分)

七、将函数 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅立叶级数。 (本题 15 分)

八、求初值问题 $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5 \end{cases}$ 的特解 (本题 15 分)

九、求欧拉方程 $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的通解。 (本题 15 分)