

长沙理工大学

2017 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

考试科目代码：601

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、指出下列函数是否周期函数？对于周期函数，指出其周期（每小题 2 分，共 10 分）

1. $y = \sin(x-3)$;

2. $y = \cos 6x$;

3. $y = 1 + \sin \pi x$;

4. $y = x \sin x$;

5. $y = \cos^2 x$.

二、计算题（每小题 6 分，共 90 分）

1. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$ ，求函数 $f(x^2)$ 的定义域

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3)(2n + 1)(n + 2)}{6n^4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})$

5. 已知函数 $y = x \ln x$ ，求 $\frac{dy}{dx}$.

6. $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$ ，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

7. 求函数 $y = e^{2x-1}$ 的二阶导数.

8. 求由方程 $x^2 - y^2 = 1$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

9. 利用洛必达法则求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

10. 求不定积分 $\int \frac{2x^2}{1 - x^3} dx$.

11. 求不定积分 $\int x \sin x dx$.

12. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$.

13. 计算定积分 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

14. 求 $z = \ln \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ 的全微分.

15. 计算二重积分 $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

三、(本题 10 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

四、(本题 20 分) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = 2x + 1$ 的通解.

五、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = 3x^2 + 1$ ($-\pi \leq x < \pi$);

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

提示: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$