

# 长沙理工大学

## 2015 年研究生复试考试试题

考试科目：概率论与数理统计

考试科目代码：F1003

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一. (10 分) 甲、乙、丙三人独立的破译一个密码，他们能破译的概率分别是 0.7, 0.8, 0.5，求此密码被破译出的概率。

二. (10 分) 设事件  $A, B$  相互独立，试证  $\bar{A}, B$  也相互独立。

三. (10 分) 指数分布之所以常用作寿命的分布，是因其具有“无记忆性”，试说明“无记忆性”的意思，并证明之。

四. (10 分) 设  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	0.2	0.1	0.3	0.4

求  $Y=1+X$  与  $Z=3X^2$  的分布律。

五. (15 分) 设二维随机向量  $(X, Y)$  在圆盘  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上服从均匀分布，

(1) 试求： $(X, Y)$  的联合密度  $f(x, y)$ ；(2) 试证： $X$  与  $Y$  不相关，但它们不独立。

六. (10 分) 随机变量  $X$  服从  $[0, \theta]$  上的均匀分布，今得的样本观测值：0.9, 0.8, 0.2, 0.8, 0.4, 0.4, 0.7, 0.6，求  $\theta$  的矩法估计和极大似然估计，它们是否为  $\theta$  的无偏估计。

七. (10 分) 已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布  $N(4.55, 0.108^2)$ 。现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.484，如果铁水含碳量的方差没有变化，可否认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55 ( $\alpha = 0.05$ ,  $z_{0.025} = 1.96$ ,  $z_{0.05} = 1.645$ ) ?

八. (10 分) 在线性模型  $Y = X\beta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$  中,  $\beta$  的最小二乘估计  $\hat{\beta}$  是多少?  
并证明  $\hat{\beta}$  为  $\beta$  无偏估计。

九. (15 分) 将下列 Poisson 过程的定义翻译成中文

A stochastic process  $\{N(t), t \geq 0\}$  is said to be a counting process if  $N(t)$  represents the total number of 'events' that have occurred up to time  $t$ . The counting process  $\{N(t), t \geq 0\}$  is said to be a Poisson process having rate  $\lambda, \lambda > 0$ , if:

(1)  $N(0) = 0$ . (2)  $\{N(t), t \geq 0\}$  has independent increments.

(3) The number of events in any interval of length  $t$  is Poisson distributed with mean  $\lambda t$ . That is, for all  $s, t \geq 0$ ,  $P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .