

动力水力压裂的相场模拟方法

刘国威, 李庆斌, 梁国贺

(清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 水力压裂计算对页岩气开采至关重要, 将岩体等效为均匀多孔介质, 以动力达西-毕奥流描述岩体内的渗流过程, 以相场方法追踪裂缝扩展, 将压裂裂缝内流体近似为泊肃叶流, 并通过修正渗流方程予以实现, 从而提出了动力水力压裂的相场模拟方法, 并基于显式有限元框架进行数值求解。通过与一维解析解对比说明所提方法计算位移和动水压的准确性。一系列数值算例表明, 提出的压裂相场模拟方法能够模拟动力水力压裂作用下裂缝动态扩展的典型特征, 且能够计算水力压裂裂缝的相交、分叉和三维扩展等复杂裂缝扩展形态, 为动力水力压裂设计提供了强有力的数值计算工具。

关键词: 岩石力学; 水力压裂; 相场方法; 达西-毕奥流; 显式有限元

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2017)06-1400-13

A phase-field description of dynamic hydraulic fracturing

LIU Guowei, LI Qingbin, LIANG Guohe

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Calculations of hydraulic fracturing are very essential for the exploration of shale gas. In this paper, the shale is approximated by a homogeneous porous medium. The seepage process in rock mass and the fluid motion in cracks are described by the dynamic Darcy-Biot and Poiseuille flows respectively. The crack propagation is tracked with the phase-field method and the simulation method for the dynamic hydraulic model is proposed. The method is implemented under an explicit finite element scheme. The accuracy of the method to calculate the dynamic displacement and pressure fields is illustrated by comparing the output with the one-dimensional analytical solution. A series of numerical examples indicate that the proposed method can not only simulate the typical characteristics of dynamic hydraulic fracturing, can also calculate the crack intersection, bifurcation and three-dimensional propagation.

Key words: rock mechanics; hydraulic fracture; phase-field; Darcy-Biot fluid; explicit finite element

1 引言

页岩气储集方式不同于常规天然气, 表现为一部分以吸附状态存在于微孔隙内表面上, 一部分以

游离状态存在于页岩的宏观裂隙中, 要靠水力压裂形成复杂开放的裂缝网络以提高页岩储层的宏观渗透率, 页岩气开采才会具备商业价值, 因此水力压裂计算意义重大。

虽然微孔洞对页岩气的吸附和储集贡献巨大,

收稿日期: 2016-08-23; **修回日期:** 2017-02-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51339003, 51579134); 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2013CB035902)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 51339003 and 51579134) and National Key Basic Research Program of China(973 Program)(Grant No. 2013CB035902)

作者简介: 刘国威(1987-), 男, 2016年于清华大学水利工程专业获博士学位, 主要从事裂缝分叉与水力压裂方面的研究工作。E-mail: liumingze1987@126.com。通讯作者: 李庆斌(1964-), 男, 博士, 现任教授, 主要从事混凝土材料与结构基本理论方面的研究工作。E-mail: qingbinli@tsinghua.edu.cn

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2016.1075

但是其孔径一般在纳米到微米级别, 因此宏观上无法对这些复杂的微孔洞进行定量分析, 目前一般将充满微孔隙的页岩宏观等效为多孔连续渗透介质^[1], 这样就可以应用连续介质力学和土体渗流学中成熟并行之有效的分析方法。K. Terzaghi^[2]最先考虑土体中的变形与流体流动的耦合作用, 提出了将总应力分解为有效应力和孔隙水压力, 后来 M. A. Biot^[3-4]将有效应力原理推广到三维岩体本构模型, 并通过达西定律考虑渗流作用, 自此毕奥本构便成为研究岩土等多孔介质的应力 - 渗流耦合常用本构。D. I. Garagash 等^[5]基于毕奥本构计算出了在压裂液黏性和裂缝扩展 2 种耗散方式共同作用下的岩石裂尖应力场, 对研究页岩起裂很有意义。H. B. Zhang 等^[6]在毕奥本构基础上考虑了页岩气开采过程中吸附作用对体应变的影响。

模拟水力压裂不仅要考虑孔隙介质渗流问题, 还需要考虑岩体中裂缝的起裂、扩展以及裂缝中流体的流动等问题, 目前裂缝内的流体一般考虑为泊肃叶层流^[7], T. J. Boone 和 A. R. Ingraffea^[8]利用黏聚力单元首次模拟了由裂缝内流体驱动的水力压裂过程, 但是假设已知裂缝起裂位置并完全忽略裂缝周围流体的连续性方程, B. A. Schrefler 等^[9-10]在此基础上进一步将岩体考虑为饱和孔隙介质, 并将黏聚力模型与自适应网格技术结合。J. Réthoré 等^[11]将上述过程利用扩展有限元方法实现, 以克服裂缝只能在单元边界扩展的问题, F. Irzal 等^[12]在此基础上考虑几何非线性的影响。此外, 还有一些非传统有限元框架下水力压裂的数值模拟, 比如格子法^[13], 有限元 - 离散元耦合法^[14]。

近年来相场方法在断裂数值计算领域越来越受到关注, A. Mikelić 等^[15]建立了位移场、相场和水压场三场耦合的水力压裂模型, C. Miehe 等^[16]在其原有相场模型基础上建立了变分原理框架下的相场水力压裂模型。相场方法较其他方法在计算裂缝扩展方面的优势主要是模拟裂缝的相交、分叉和三维扩展等复杂扩展路径。但是已有的相场水力压裂模型基本没有考虑惯性作用, 因此无法模拟动态裂缝分叉问题。鉴于此, 本文将在相场断裂模型基础上提出考虑动力达西 - 毕奥流的动力水力压裂模拟方法, 并基于 ABAQUS 显式有限元框架数值实现。

2 控制方程推导

2.1 岩体内渗流方程

2.1.1 有效应力原理

本文将页岩基体视为均匀多孔介质, 应力计算基于 K. Terzaghi^[2]提出的有效应力原理, 即有效应力作为总应力的一部分控制着岩体变形, 假设总应力可分解为有效应力和孔隙水压力:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} - \alpha p \mathbf{1} \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为总柯西应力张量, $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$ 为有效应力张量, p 为孔隙水压力, $\mathbf{1}$ 为单位张量, α 为毕奥系数。在岩石力学和其他孔隙材料介质力学中被广为接受的毕奥系数表达式为

$$\alpha = 1 - \frac{K_s}{K_g} \quad (2)$$

式中: K_s 为岩体骨架的体积模量, K_g 为岩体晶体的体积模量。

2.1.2 固体和液体的平衡方程

假设页岩气储层处于饱和状态, 则岩体的平衡方程由固体和液体的质量守恒方程及动量守恒方程组成。固体相和液体相的质量守恒方程可以分别表达为

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-n)\rho^s] + \text{div}(n\rho^s \mathbf{v}^s) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\rho^l) + \text{div}(n\rho^l \mathbf{v}^l) + \rho^l s = 0 \quad (4)$$

式中: n 为岩体的孔隙度, ρ^s 为固体的密度, ρ^l 为液体的密度, \mathbf{v}^s 为固体的速度, \mathbf{v}^l 为流体速度, s 为外界输入液体的单位体积流量。

固体相和液体相的动量守恒方程可以分别表达为

$$(1-n)\rho^s \mathbf{a}^s - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}) + (1-n)\nabla p - (1-n)\rho^s \mathbf{g} + n^2 \eta \mathbf{k} (\mathbf{v}^l - \mathbf{v}^s) = 0 \quad (5)$$

$$n\rho^l \mathbf{a}^l + n\nabla p - n\rho^l \mathbf{g} - n^2 \eta \mathbf{k} (\mathbf{v}^l - \mathbf{v}^s) = 0 \quad (6)$$

式中: \mathbf{a}^s 为固体的加速度, \mathbf{a}^l 为液体的加速度, \mathbf{g} 为重力加速度向量, η 为液体动力黏滞系数, \mathbf{k} 为渗透率张量。

2.1.3 岩体平衡方程

将式(3)与(4)相加即得到岩体的质量平衡方程:

$$(1-n)\rho^s \mathbf{a}^s + n\rho^l \mathbf{a}^l - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{g} = 0 \quad (7)$$

式中: ρ 为岩体的密度, $\rho = (1-n)\rho^s + n\rho^l$ 。

假设密度和孔隙度随空间的变化可以忽略, 则质量守恒方程式(3)和(4)可以写为

$$-\dot{n}\rho^s + (1-n)\dot{\rho}^s + (1-n)\rho^s \text{div}(\mathbf{v}^s) = 0 \quad (8)$$

$$n\dot{\rho}^l + \rho^l \dot{n} + n\rho^l \text{div}(\mathbf{v}^l) + \rho^l s = 0 \quad (9)$$

流体密度本构为

$$\frac{d\rho^l}{dp} = -\frac{\rho^l}{K_1} \quad (10)$$

式中： K_1 为反映液体压缩性的体积模量。将式(10)代入式(9)得

$$-\frac{n}{K_1}\dot{p} + \dot{n} + n\text{div}(\mathbf{v}^1) + s = 0 \quad (11)$$

假设岩体晶体的密度是总应力和水压力的函数^[17]:

$$\rho^s = \frac{\rho^s}{K_1(1-n)}(\dot{\sigma}_{\text{vol}} + n\dot{p}) \quad (12a)$$

式中： σ_{vol} 为体积应力，表达式为

$$\sigma_{\text{vol}} = K_s \varepsilon_{\text{vol}} + \alpha p \quad (12b)$$

式中： ε_{vol} 为体积应变。将式(12a)代入到式(8)中得到:

$$\dot{n} = (\alpha - n) \left[\text{div}(\mathbf{v}^s) - \frac{1}{K_s} \dot{p} \right] \quad (13)$$

将式(13)代入到式(11)得

$$\left(\frac{n}{K_1} + \frac{\alpha - n}{K_s} \right) \dot{p} = \alpha \text{div}(\mathbf{v}^s) + n \text{div}(\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^s) + s \quad (14)$$

利用式(6)，式(14)可以写为

$$\left(\frac{n}{K_1} + \frac{\alpha - n}{K_s} \right) \dot{p} = \text{div} \left[\frac{\mathbf{k}}{\eta} (\nabla p - \rho^1 \mathbf{g} + \rho^1 \mathbf{a}^1) \right] + \alpha \text{div}(\mathbf{v}^s) + s \quad (15)$$

联立式(7)和(15)，并假设流体加速度和固体加速度相等(即 $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^s$ ，下文中统一用 \mathbf{a} 表示)，在不考虑高频动力情况下该假设是可以接受的^[18]。这样就得到了本文需要的动力达西 - 毕奥流的控制方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho \mathbf{a} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \left(\frac{n}{K_1} + \frac{\alpha - n}{K_s} \right) \dot{p} = \text{div} \left[\frac{\mathbf{k}}{\eta} (\nabla p - \rho^1 \mathbf{g} + \rho^1 \mathbf{a}) \right] + \\ \alpha \text{div}(\mathbf{v}^s) + s \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(16)中包含了液体平均流速的表达式:

$$\mathbf{H}_D = \mathbf{K}_D (\nabla p - \rho^1 \mathbf{g} + \rho^1 \mathbf{a}) \quad (17)$$

其中,

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{k} / \eta$$

\mathbf{H}_D 可以理解动力达西流的平均流速，表明驱动液体流动的内部因素包括压力梯度、重力和流体惯性的散度。 \mathbf{K}_D 是由与达西渗透系数 K_h 相关的空间渗透系数 K ($K = K_h / \gamma^1$, γ^1 为液体的容重)构成的各向同性张量。

2.2 相场表示的裂缝

基于断裂变分方法^[19]的相场模型在模拟复杂裂缝形态(如裂缝分叉、相交和三维扩展)方面独具优势^[20-21]，并且已经被通过子程序成功嵌入到通用

有限元软件中^[22-23]。模型仅通过相场变量 $\phi(\mathbf{x}, t) \in [0, 1]$ 来估计裂缝表面 Γ ，当 $\phi = 1$ 时表示裂缝，当 $\phi = 0$ 时表示材料完好，特征长度参数 $l_0 \in R^+$ 控制相场梯度区域($0 < \phi < 1$)的宽度，如图1所示。则裂缝表面能可以通过相场变量 ϕ 和临界能量释放率 G_c 表示^[20]为

$$\int_{\Gamma} G_c \, dx \approx \int_{\Omega} G_c \left[\frac{(\phi - 1)^2}{2l_0} + \frac{l_0}{2} |\nabla \phi|^2 \right] \, dx \quad (18)$$

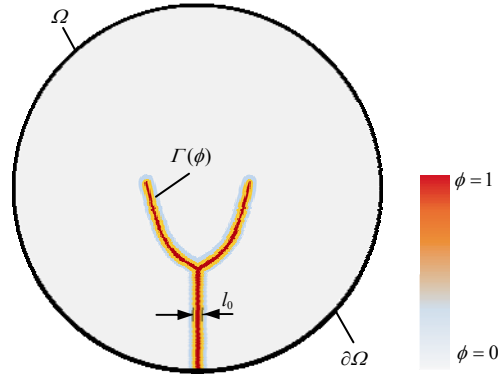


图1 相场变量表示的裂缝

Fig.1 Fissures described with a phase-field model

利用相场变量表示的裂缝表面能和断裂变分理论^[19]即可得到在弹性应变能驱动下的相场演化方程^[20, 23]:

$$\left(\frac{G_c}{l_0} + 2\psi_{\text{eff}}^+ \right) \phi - G_c l_0 \Delta \phi = 2\psi_{\text{eff}}^+ \quad (19)$$

式中： ψ_{eff}^+ 为受拉作用下的弹性应变能密度(弹性应变能密度 ψ_{eff} 在应变谱空间可以分解为受拉作用部分 ψ_{eff}^+ 和受压作用部分 ψ_{eff}^- ^[20, 23])，即受压作用下的弹性应变能不驱使相场演化。

2.3 裂缝内流速等效

2.3.1 裂缝内的流速

水力压裂形成裂缝后，其内部流体的流速会显著加快，故有必要对式(17)所表达的渗流流速做出修正。可以将水力压裂计算过程中的流速分为裂缝内和裂缝外2个部分:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_D + \mathbf{H}_C \quad (20)$$

式中： \mathbf{H}_C 为裂缝内的平均流速，本文将裂缝内流体等效为泊肃叶流。两板长度为 L 且间距为 w 的泊肃叶流示意图如图2所示。考虑2个间距(也可以理解为裂缝的张开口位移)为 w 的平板之间泊肃叶流，如图2(a)所示，根据纳维 - 斯托克斯方程可得流速 v 的解析解:

$$v = \frac{1}{-2\eta} \left[\left(\frac{w^2}{2} \right) - z^2 \right] \nabla p \quad (21)$$

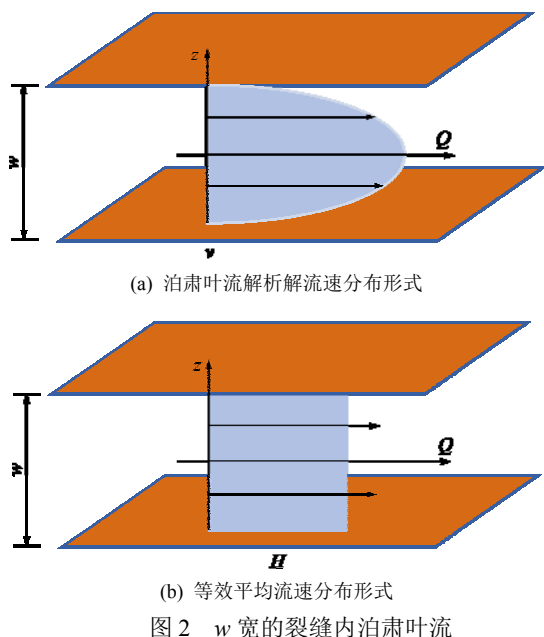


图 2 w 宽的裂缝内泊肃叶流

根据流量相等的原则，如图 2(b)所示，得到平均流速表达式：

$$H_c = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A v dA}{A} = \frac{w^2}{12\eta} \nabla p \quad (22)$$

式中： Q 为流量， A 为截面积。式(22)表明泊肃叶流的平均流速与裂缝张开位移成平方关系(即泊肃叶定律)，为统一式(17)和(22)，现将式(22)假设为达西定律的形式：

$$H_c = K_c (\nabla p - \rho^l g - \rho^l a) \quad (23)$$

根据式(23)可知裂缝内的渗透张量 K_c 依赖于 w^2 。

2.3.2 裂缝内的渗透张量

节 2.3.1 将裂缝内的流体等效为泊肃叶流并通过在原达西流基础上修改渗透张量得以实现，欲补充泊肃叶流对应的渗透张量关键在于求出裂缝张开位移值 w ，但是相场断裂模型属于弥散式裂缝模型，因此不能显式地表达裂缝张开位移 w 。本文将根据 C. Miche 等^[16]的做法，通过单元的局部变形表达 w 。

考虑几何非线性，并考虑初始构型 $X \in \mathcal{B}_0$ 中一条由相场表示的裂缝面 Γ 变形到当前构型 $x \in \varphi_t(\mathcal{B}_0)$ 中的裂缝面 $\varphi_t(\Gamma)$ ，如图 3 所示，向量 n_0 为初始构型中裂缝面的法向单位向量，对于相场模型 n_0 显然可以通过相场变量的梯度表示：

$$n_0 = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (24)$$

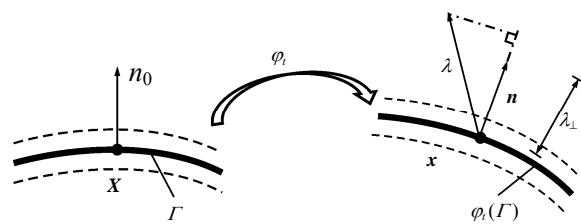


图 3 初始构型与当前构型中相场表示的裂缝面
Fig.3 The crack surface in the initial configuration and the deformed configuration

如图 3 所示，由于单元变形而导致的拉伸向量为

$$\lambda = F n_0 \quad (25)$$

式中： F 为变形梯度($F = dx/dX$)。由变形作用导致的拉伸向量 λ 不再垂直于裂缝面，由于相场模型通过局部连续变形描述裂缝，因此 λ 可以局部分解为与 I 型裂缝和 II 型裂缝相对应的裂缝张开量，将 λ 投影到当前构型中与裂缝面垂直的方向上，可以得到与泊肃叶流(I 型裂缝)相对应的拉伸向量分量：

$$\lambda_{\perp} = \lambda n \quad (26)$$

式中： n 为当前构型中裂缝面的法向单位向量：

$$n = \frac{\nabla_x \phi}{|\nabla_x \phi|} = \frac{F^{-T} \nabla \phi}{|F^{-T} \nabla \phi|} \quad (27)$$

将式(27)代入到式(26)中，得到 λ_{\perp} 的封闭形式：

$$\lambda_{\perp} = \frac{\nabla \phi \nabla \phi}{\nabla \phi C^{-1} \nabla \phi} \quad (28)$$

式中： C 为右柯西 - 格林张量($C = FF^T$)。

由于推导基于局部变形进行，为消除有限元网格尺寸的影响引入特征长度，并通过上面得到的拉伸量表达出裂缝张开位移：

$$w^2 = \begin{cases} (\lambda_{\perp} - 1)^2 L_{\perp}^2 & (\phi > c) \\ 0 & (\phi \leq c) \end{cases} \quad (29)$$

式中： c 为开始考虑泊肃叶流效应的相场变量阈值， $c \leq 1$ ； L_{\perp} 为裂缝面法向方向上的特征长度，在有限元计算中可取为单元的特征长度 h ，即 $L_{\perp} = h$ 。

综上，写出与泊肃叶流对应的渗透张量：

$$K_C = K_c w^2 [I^{-1} - (I^{-1} n) \otimes (I^{-1} n)] \quad (30)$$

其中，

$$K_C = 1 / (12\eta) - K$$

式中： I 为单位张量。显然 K_C 为与裂缝方向相关的各向异性二阶张量。这样，岩体的总体渗透张量可以写为

$$K(F, \phi) = K_D + K_C(F) \quad (31)$$

2.4 控制方程

节 2.3 建立了考虑动力达西 - 毕奥流的含裂缝

岩体平衡方程和渗流方程，并引入了追踪裂缝的相场演化方程，现引入一个历史状态变量 \mathcal{D} 控制裂缝一旦形成不会再愈合及应变能密度在到达一定值前刚度矩阵不发生退化^[16]：

$$\mathcal{D} = \left\langle \frac{2\psi_{\text{eff}}^+(\boldsymbol{\varepsilon})}{G_c/l_0} - 1 \right\rangle_+ \quad (32)$$

式中：麦考利括号定义为： $\langle \cdot \rangle_+ = (\cdot + |\cdot|) / 2$ ； $\psi_{\text{eff}}^+(\boldsymbol{\varepsilon})$ 由有效应力求得

$$\psi_{\text{eff}}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} [(1-\phi)^2 + \kappa] \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}^+ \boldsymbol{\varepsilon}^+ \quad (33)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}^+$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ 分别为受拉状态下的柯西有效应力张量和对数应变张量：

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}^+ &= \sum_{a=1}^d \left\langle \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}^a \right\rangle_+ \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}^+ &= \sum_{a=1}^d \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^a \right\rangle_+ \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}^a$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^a$ 分别为柯西有效应力张量和对数应变张量的特征值。由于考虑了几何非线性，所以柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$ 可由第一类皮奥拉 - 柯克霍夫应力张量求得

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \quad (35)$$

对数应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可由右柯西 - 格林张量求得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} \quad (36)$$

将式(32)代入式(19)中，则相场演化方程改写为

$$l_0 \Delta \phi + (1 + \mathcal{D}) \phi = \mathcal{D} \quad (37)$$

联合式(16)和(37)就建立了本文所提出的动力水力压裂模拟方法的控制方程：

$$\left. \begin{aligned} \rho \mathbf{a} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{g} &= 0 \\ \left(\frac{n}{K_1} + \frac{\alpha - n}{K_s} \right) \dot{p} &= \text{div} \left[\frac{\mathbf{K}}{\eta} (\nabla p - \rho^l \mathbf{g} + \rho^l \mathbf{a}) \right] + \\ &\quad \alpha \text{div}(\mathbf{v}^s) + s \\ l_0 \Delta \phi + (1 + \mathcal{D}) \phi &= \mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

3 方法的有限元实现

对式(38)进行有限元求解要求每个单元结点有位移自由度 \mathbf{u} 、孔压自由度 p 和相场自由度 ϕ ，本文求解的策略是 \mathbf{u} 与 p 强耦合求解，再与 ϕ 弱耦合求解。对于 \mathbf{u} 和 p 采用双线性等参单元进行空间离散，下面对某一空间区域 \mathcal{B} 进行离散：

$$\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \mathcal{B}^e \quad (39)$$

式中： N_e 为域内单元数量，对每个单元 $\mathcal{B}^e \subset \mathcal{B}$ 利用形函数及其导数进行离散：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^h &= \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i \\ p^h &= \sum_{i=1}^n N_i p_i \end{aligned} \right\} \quad (40a)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \mathbf{u}^h &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i \\ \nabla p^h &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^p p_i \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

式中： N_i 为线性形函数， \mathbf{B}_i^u 和 \mathbf{B}_i^p 为单元形函数导数矩阵， \mathbf{u}_i 和 p_i 为单元结点的上位移和孔压自由度。 \mathbf{u}_i 和 p_i 通过显式时间积分强耦合求解，即 \mathbf{u}_i 和 p_i 在一个增量步 Δt 内同时更新， \mathbf{u}_i 采用显式中心差分格式， p 采用显式向前差分格式，则式(16)中动量守恒方程和孔压演化方程的离散更新格式可以写为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{i, t+\Delta t} &= \mathbf{u}_{i, t} + (\dot{\mathbf{u}}_{i, t-1/2\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_{i, t} \Delta t) \Delta t \\ p_{i, t+\Delta t} &= p_{i, t} + \dot{p}_i \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中，

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{M}_{ij})^{-1} (\mathbf{F}_i^{\mathbf{u}, \text{ext}} - \mathbf{F}_i^{\mathbf{u}, \text{int}}) \quad (42)$$

$$\dot{p}_i = \mathbf{C}_{ij}^{-1} (F_i^{p, \text{ext}} - F_i^{p, \text{int}}) \quad (43)$$

式中： \mathbf{M}_{ij} 为集中质量矩阵； $\mathbf{F}_i^{\mathbf{u}, \text{ext}}$ 和 $\mathbf{F}_i^{\mathbf{u}, \text{int}}$ 分别为与位移自由度相对应的结点外力和结点内力；而与孔压自由度相对应的 \mathbf{C}_{ij} 矩阵， $F_i^{p, \text{ext}}$ 和 $F_i^{p, \text{int}}$ 可以分别表达为

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_{\mathcal{B}} N_i \frac{1}{M} N_j dV \quad (44)$$

$$\begin{aligned} F_i^{p, \text{ext}} &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ [\mathbf{B}_i^p]^T \left[\frac{\mathbf{K}^h}{\eta} (\nabla p_h + \rho^l N_j \mathbf{a}_j - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \rho^l N_j \mathbf{g}_j) \right] + N_i s \right\} dV \end{aligned} \quad (45)$$

$$F_i^{p, \text{int}} = \int_{\mathcal{B}} N_i J dV \quad (46)$$

式中： J 为变形梯度的行列式， $J = \det(\mathbf{F})$ ； M 为毕奥模量，且有

$$\frac{1}{M} = \frac{n}{K_1} + \frac{\alpha - n}{K_s} \quad (47)$$

对于每一个时间增量步 Δt ，先更新 ϕ ，然后同时更新 \mathbf{u} 和 p ，对于 ϕ 同样采取双线性等参单元进行离散，更新方法可参见刘国威等^[22-23]的研究。

本文求解过程依托于 Abaqus/Explicit 求解框

架，具体求解流程如图 4 所示，求解过程中孔压自由度借用了 Abaqus/Explicit 中的温度自由度^[24]，相场自由度通过 Intel Fortran MKL 库中的线性方程组求解方法进行求解，通过 Abaqus/Explicit 自带的 VUMAT 子程序接口在每个时步内进行各求解变量的交互。中心差分格式和向前差分格式都是条件收敛的，所以计算步长应该足够小以保证求解精度，由于向前差分的收敛阶数更低，所以应由向前差分控制整体求解步长，求解时间步长^[25]为

$$\Delta t \approx \frac{h^2 \eta}{2K_{\max} M} \quad (48)$$

式中： K_{\max} 为单元渗透张量 \mathbf{K} 分量中的最大值。式(48)会使计算步长随着裂缝起裂与扩展变得更小，但是这也更好地保证了基于分步算法的相场自由度求解精度。

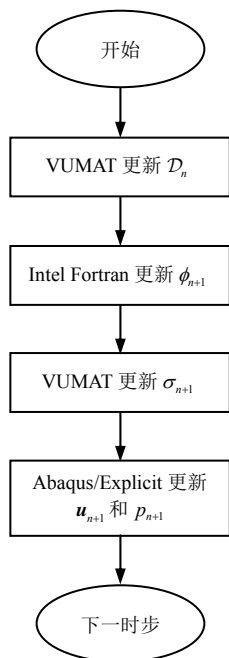


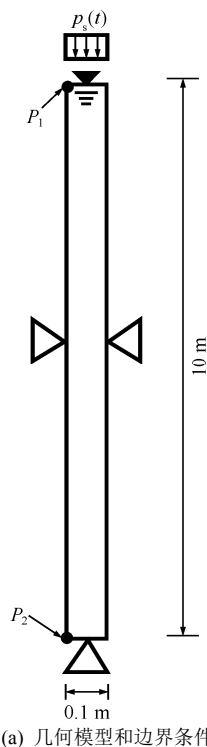
图 4 动力水力压裂的相场模拟方法求解流程

Fig.4 The solution process of the phase-field description of dynamic hydraulic fracturing

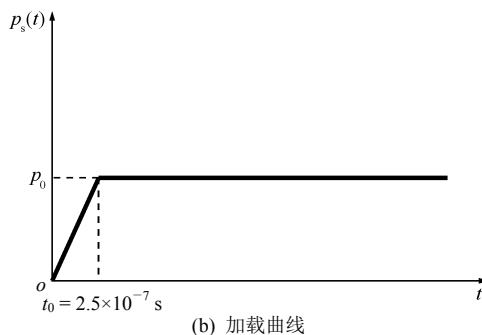
4 数值算例

4.1 动力固结问题

为验证本文提出的方法能够正确计算饱和和孔隙介质在动力载荷下的波动行为，本节将模拟已经得到解析解的一维动力固结问题^[26]。模型的几何形状和边界条件如图 5(a)所示，模型底部和两侧采用法向位移约束，顶部位移自由并为透水边界($p = 0$)，在顶部施加 $p_0 = 10 \text{ kN/m}^2$ 冲击面荷载，加载曲线如图 5(b)所示，利用 $1 \times 1\ 000$ 个平面应变单元对模型进行空间离散，材料参数取值如表 1 所示。



(a) 几何模型和边界条件



(b) 加载曲线

图 5 一维动力固结问题的几何模型和边界条件

Fig.5 Geometry and boundary conditions of the one dimensional test problem for dynamic consolidation

表 1 一维动力固结问题材料参数^[26]

Table 1 Material properties of the one dimensional test problem for dynamic consolidation^[26]

弹性模量 E/Pa	泊松比 ν	孔隙度 n	水体密度 $\rho^l/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	固体颗粒密度 $\rho^s/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	水体体积模量 K_l/Pa	固体骨架体积模量 K_s/Pa	达西渗透系数 $K_w/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
254 423	0.298	0.48	1 000	2 700	3.3×10^9	1.1×10^{10}	3.55×10^{-5}

将数值结果和解析结果^[26]中的 P_1 点位移和 P_2 点水压力进行对比，对比结果如图 6 和 7 所示。 P_1 点的竖向位移由于超孔压逐步耗散而增大，如图 6 所示。由外荷载引起的压缩波自上而下传播，当到达底部边界时会发生反射，图 7 明显地反映出了压缩波反射作用下的叠加原理(水压力峰值基本为外荷载的 2 倍)，反射回的压缩波在顶部再次被反射并形成负压，负压反射到底部边界时会与之前的孔压相互叠加造成 P_2 点的孔压值为 0，如此反复，最终形成在 2 倍外荷载和零之间往复变化的孔压曲

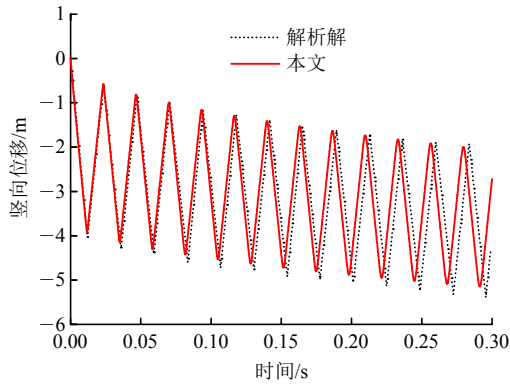


图6 P_1 点的竖向位移数值计算与解析结果对比

Fig.6 Vertical displacements at point P_1 compared with the analytical solution

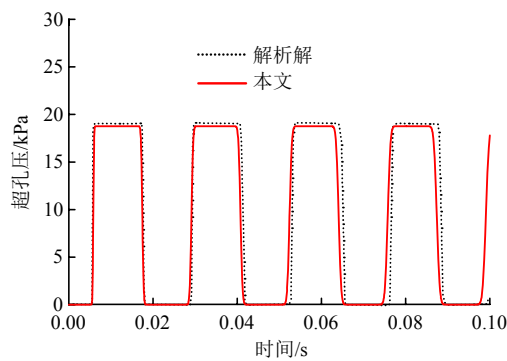


图7 P_2 点的水压力数值计算与解析结果对比

Fig.7 The pressure at point P_2 compared with the analytical solution

线。数值计算结果与解析结果整体吻合较好，说明了本文建立的水力压裂模拟方法在计算动力孔压和位移方面的可靠性。

4.2 裂缝张开位移与渗透张量

为验证本文建立的水力压裂模拟方法能够正确反映随着裂缝形成达西流向泊肃叶流的转换过程，考虑一个中间含有初始裂缝的构件，如图8所示，相关材料参数取值如表2所示。构件右侧施加位移

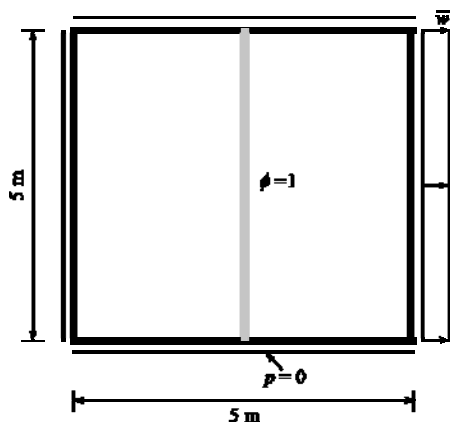


图8 几何模型和边界条件

Fig.8 Geometry and boundary conditions of simulated domain

表2 水力压裂计算材料参数取值

Table 2 Material properties for the calculations of hydraulic fracturing

弹性模量 E/Pa	泊松比 ν	岩体密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	毕奥模量 M/Pa	达西渗透系数 $K_h/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	特征长度 l_0	临界能量释放率 $G_c/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$
2.0×10^9	0.2	2 000	1.0×10^8	2.11×10^{-9}	0.5	5.0

荷载，随着荷载增加裂缝张开位移(w)不断增加，如前所述，此时渗透张量也应该随之发生变化。

图9给出了裂缝中心单元渗透张量 \mathbf{K} 中2个分量(K_{11} 和 K_{22})随着 w 的变化曲线，可以看出，与裂缝垂直方向的对应渗透张量分量 K_{11} 基本没有发生变化，而与裂缝平行方向对应的分量 K_{22} 与 w 满足泊肃叶定律，采用2套不同网格尺寸($h = 0.25$ 和 0.125 m)进行计算，计算结果完全一致，说明渗透张量 \mathbf{K} 随 w 的变化不依赖网格尺寸。

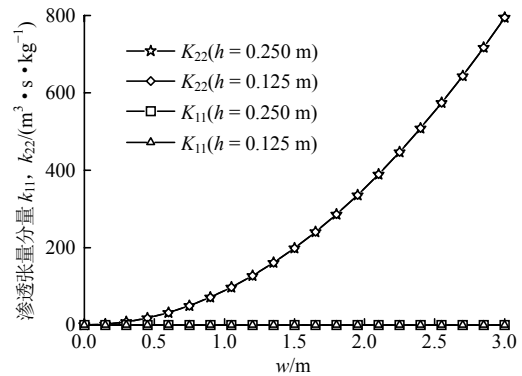


图9 渗透张量分量 K_{11} 和 K_{22} 随 w 变化曲线

Fig.9 Permeability K_{11} and K_{22} varied with w

4.3 注水流量控制的水力压裂算例

考虑边长为40 m的方形区域，中心开有 $A_{injec} = 0.25 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 的初始裂缝，如图10所示，以流量 $Q = sA_{injec} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ 向初始裂缝中注入液体，所用材

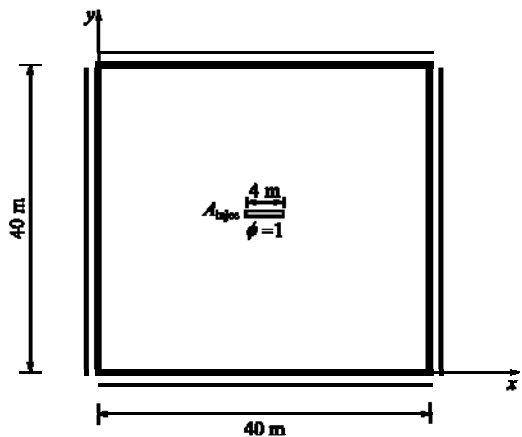


图10 二维水力压裂中心注水计算几何模型和边界条件

Fig.10 Geometry and boundary conditions for the 2D calculation of hydraulic fracturing driven by water volume injection

料参数如表 2 所示, 模型四周全部法向位移约束且 $p = 0$, 采用 2 套均匀 4 结点平面应变单元进行计算 ($h = 0.25$ 及 0.125 m)。

图 11 为初始裂缝中心位置处的孔压时程曲线, 以 $h = 0.125$ m 为例, 注水中心位置的水压力先随着注水体积的增加而增大, 随着裂缝发生扩展压力曲线开始下降, 这是水力压裂的典型特征^[27], 由于模型四周受孔压狄利克莱边界($p = 0$)约束, 所以当裂缝接近边界时水压力会再次上升, 并且会发生振荡, 当 $h = 0.25$ m 时水压力峰值基本没变, 但是和 G. W. Liu 等^[23]的结论一样, 裂缝起裂时间会略有推迟, 导致水压力曲线整体后移。

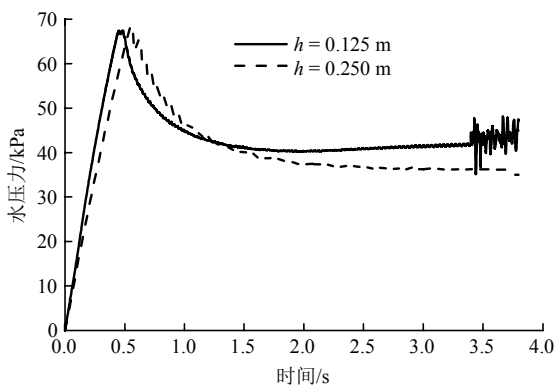


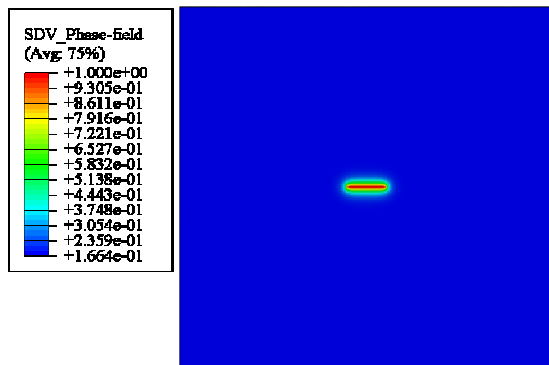
图 11 注水中心位置水压力时程曲线

Fig.11 Water pressure varied with time at the central location

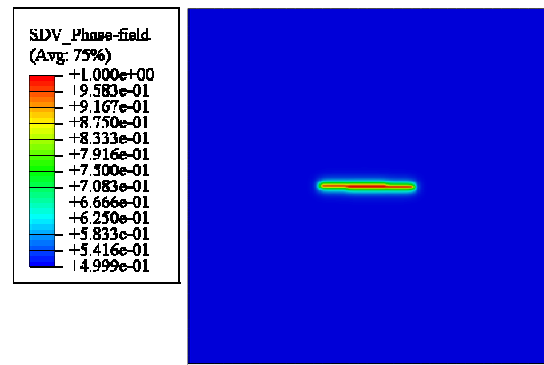
图 12 给出了相场云图和水压力分布云图, 起裂之前裂缝内的水压基本为常数, 随着裂缝发生扩展水压力在裂缝内开始重新分布从而产生压力梯度, 值得注意的是, 由于本文采用了动力计算方法, 并且流体考虑了黏性效应, 所以裂缝内流体的流动总是滞后于裂缝的扩展, 于是在裂缝尖端会形成负水压区域, 这与 S. Secchi 等^[10, 28-29]的结论是一致的, 这种滞后现象会随着注水速率的减小或临界能量释放率的增加而明显减弱, 另外, 云图显示裂缝以外区域的孔水压力相对裂缝内要小很多, 这是因为计算时间相对于液体渗透速度来讲很短。图 13 为水压力沿模型中线在裂缝扩展方向分布曲线, 曲线进一步说明了水压力在裂缝内的分布变化过程, 中心位置的水压先上升后下降, 裂尖的负水压在裂缝稳定扩展以后并没有明显增加, 当裂缝裂缝贯穿模型后负压消失。

4.4 2 条裂缝相交算例

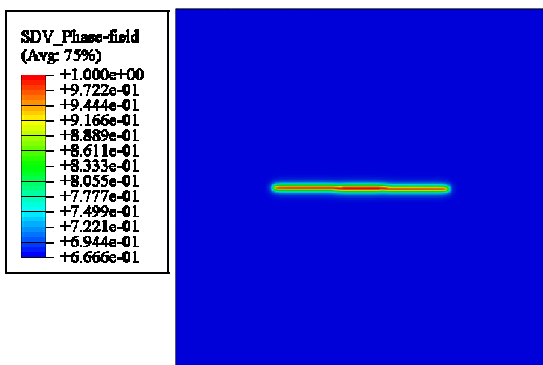
现考虑边长为 40 m 的方形区域, 设置方向垂直的 2 条初始裂缝, 四周受法向位移约束同时受孔压狄利克莱边界($p = 0$)约束, 如图 14 所示。以恒定流量 $Q = sA_{injec} = 0.1$ m³/s 向 2 条初始裂缝中同时注入液体, 材料参数如表 2 所示, 采用 320×320 均匀平面应变网格。



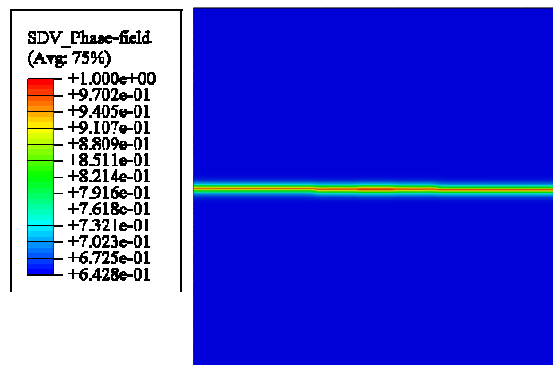
(a) $t = 0.2$ s 相场分布云图



(b) $t = 1.0$ s 相场分布云图



(c) $t = 2.0$ s 相场分布云图



(d) $t = 3.8$ s 相场分布云图

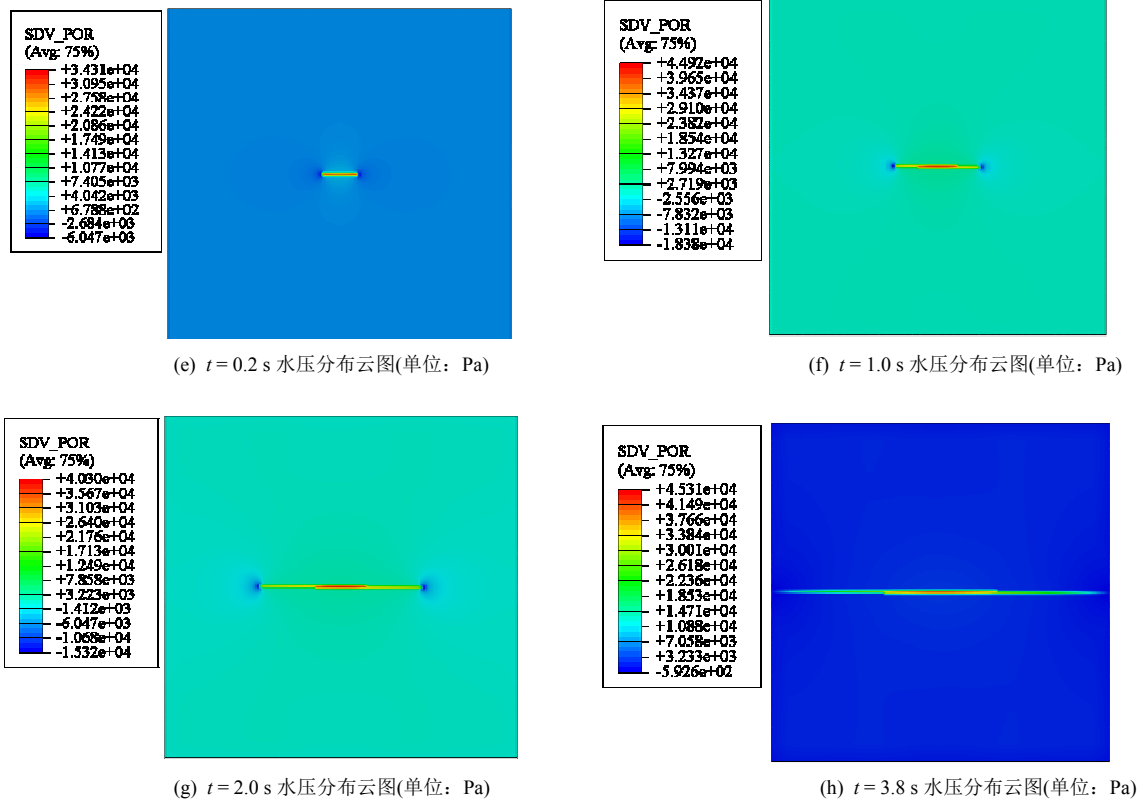


图 12 相场分布云图及水压分布云图

Fig.12 Fracture phase field and water pressure field

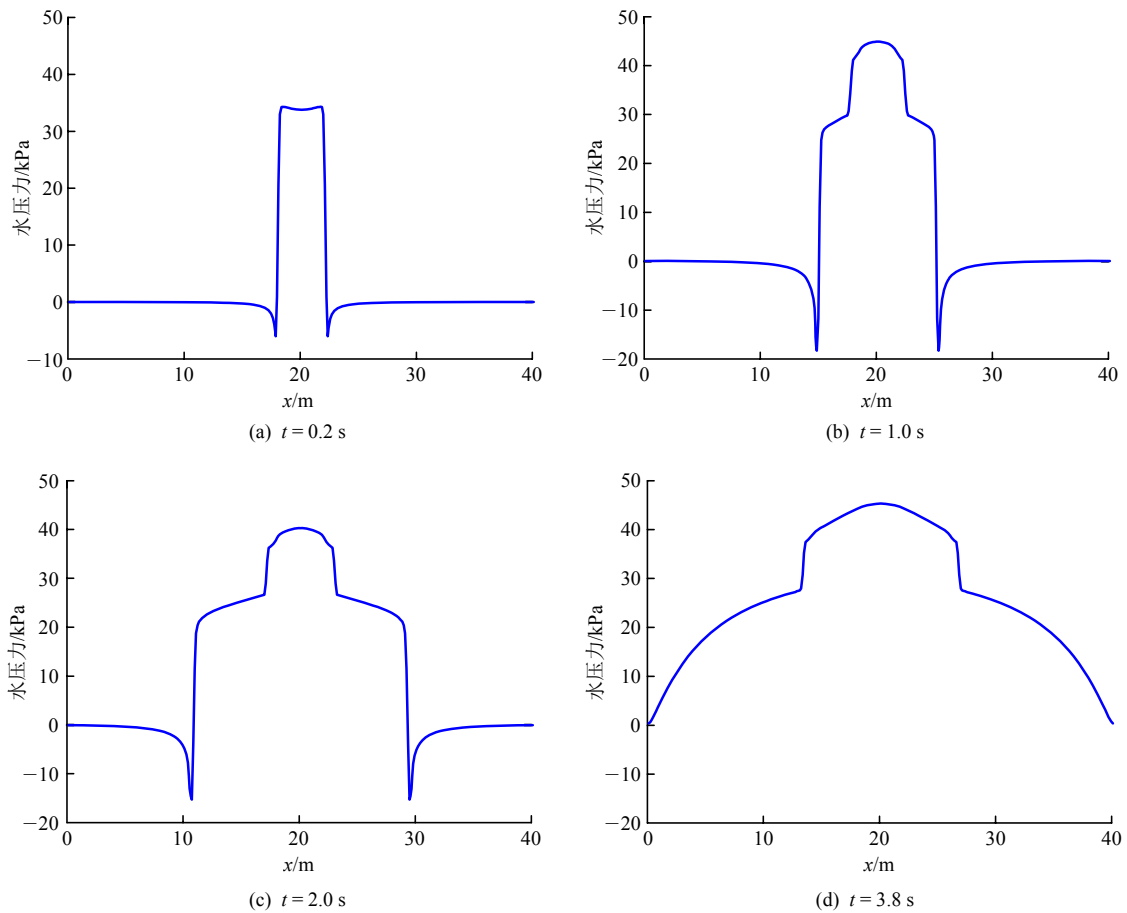


图 13 不同时刻孔隙水压力沿模型中线的分布

Fig.13 Water pressure along the center line at different time

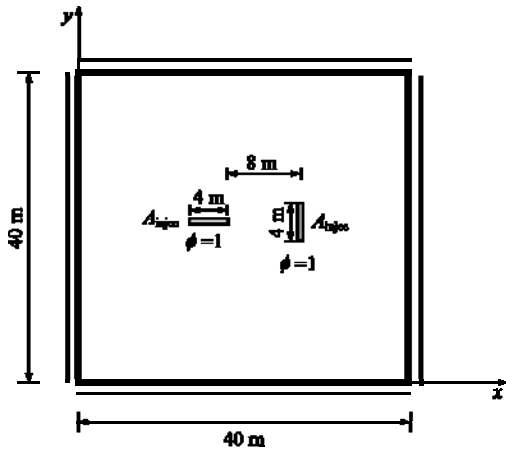


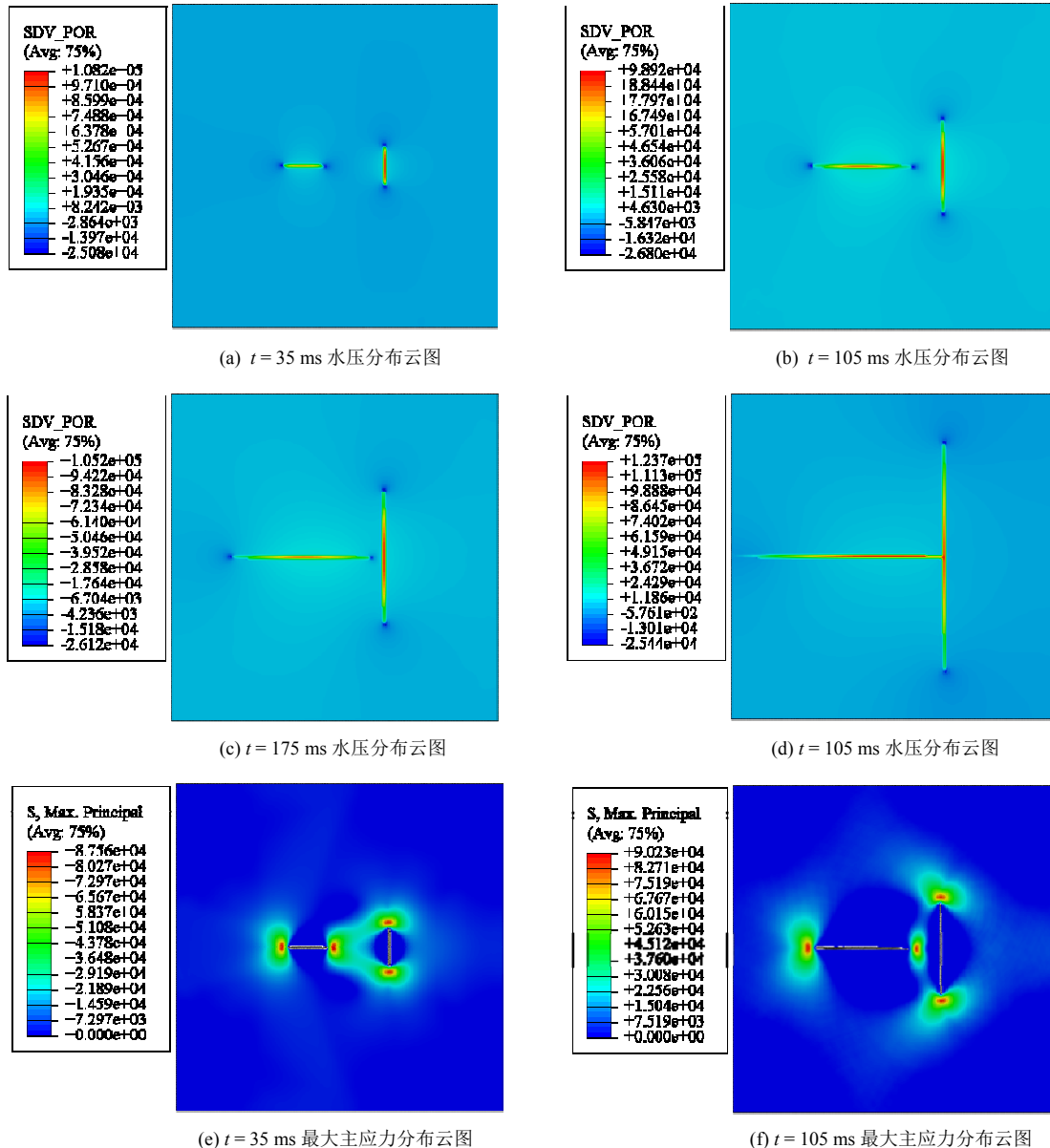
图 14 二维水力压裂裂缝相交计算几何模型和边界条件
Fig.14 Geometry and boundary conditions for the 2D calculation of joining of two cracks driven by water volume injection

所示, 计算结果与单条裂缝相似, 孔压先上升后下降, 且由于液体流速小于裂尖速度而在裂缝尖端出现负压区, 但是裂缝区以外整体孔压水平较单条裂缝扩展时要高。图 15(e)~(h)给出了 2 条裂缝应力场的相互作用过程(图中未显示 $\phi > 0.95$ 的单元), 起始阶段 2 条裂缝的裂尖相距较近时应力场相互作用较强, 随着各自在压裂液作用下不断扩展, 应力的相互作用效应逐渐减弱。

4.5 裂缝分叉算例

计算模型节 4.3 相同, 毕奥模量 $M = 1.0 \times 10^7$ Pa, 其余材料参数如表 2 所示。输入裂尖能量足够大会使动态裂缝会发生分叉现象, 在注液流量 $Q = 5.0$ m^3/s 作用下压裂裂缝发生了分叉, 不同时刻最大主应力云图如图 16 所示(图中未显示 $\phi > 0.95$ 的单元), 应力最大值同样呈现出先增大后减小的趋势。对水力压裂而言, 流入裂尖的能量不是来自外部边

C. Miehe 等^[16, 30-31]在不考虑惯性的情况下进行过相似计算, 考虑了惯性的水压计算结果如图 15(a)~(d)



(e) $t = 35$ ms 最大主应力分布云图

(f) $t = 105$ ms 最大主应力分布云图

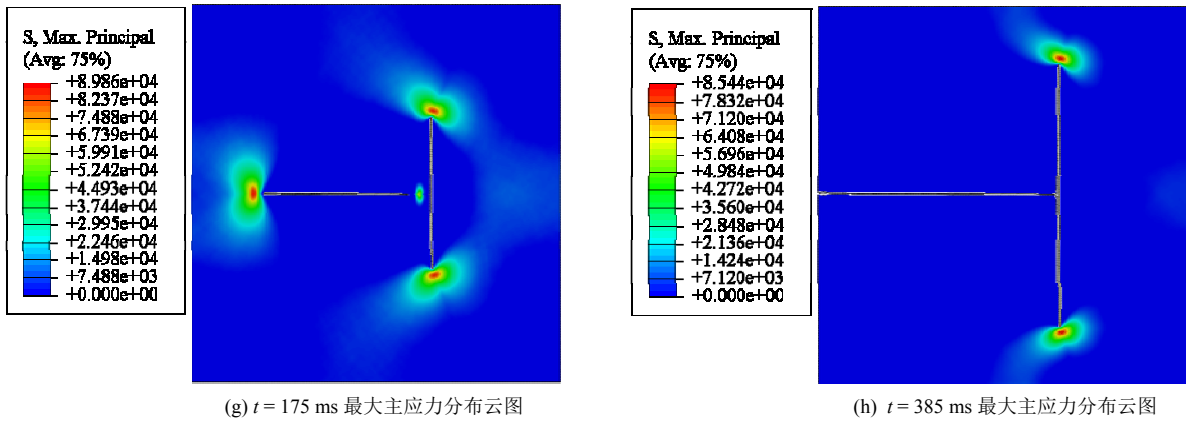


图 15 水压分布云图和最大主应力分布云图(单位: Pa)

Fig.15 Water pressure field and maximum principal stress field(unit: Pa)

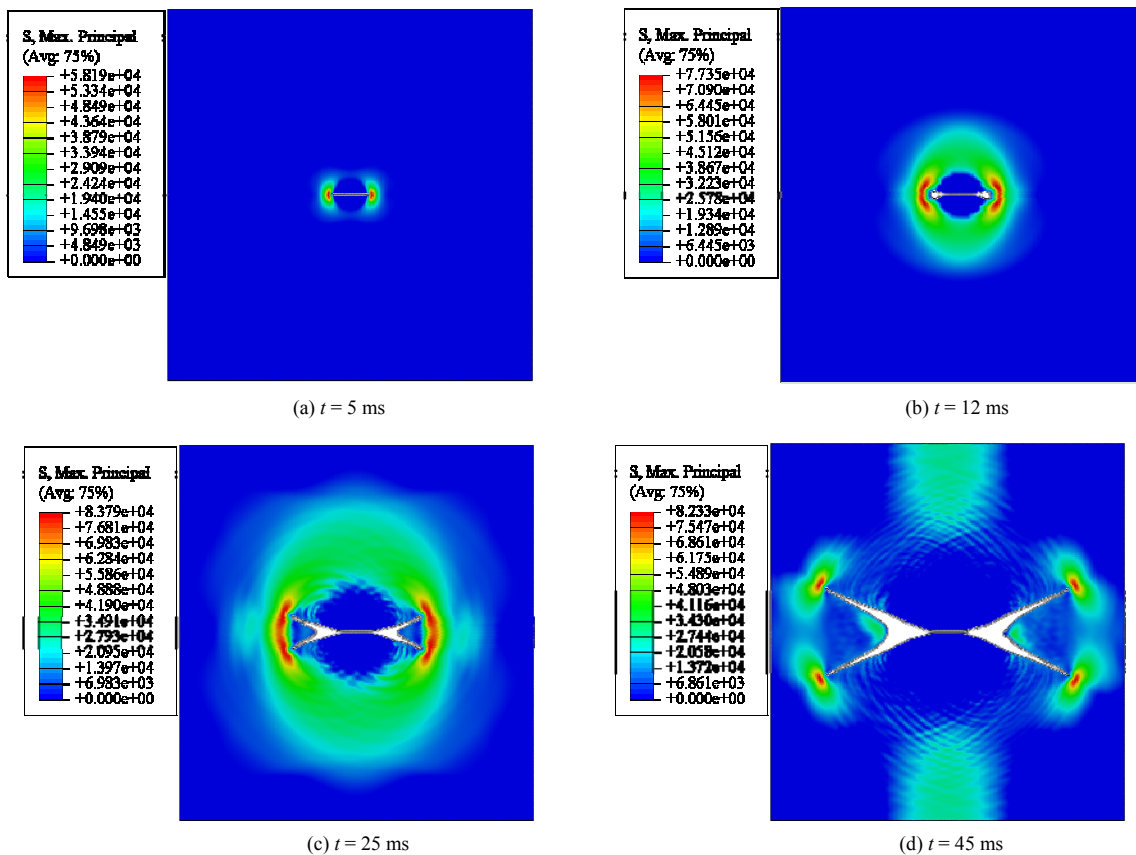


图 16 水力压裂裂缝分叉算例最大主应力云图(单位: Pa)

Fig.16 Maximum principal stress field of the crack branching case driven by water volume injection(unit: Pa)

界输入的机械能而是来自裂缝内部的水压力，所以在裂缝分叉之前裂尖附近产生了很大面积的破坏区。

4.6 裂缝三维扩展算例

为了考察本文所提方法计算三维水力压裂裂缝扩展的能力，现考虑一个 $20\text{ m} \times 20\text{ m} \times 20\text{ m}$ 的立方体，立方体的中心部位设有 $2.25\text{ m} \times 1.25\text{ m} \times 0.25\text{ m}$ 的初始裂缝，6 个外表面受法向位移约束且 $p = 0$ 。以恒定流量 $Q = sV_{\text{injec}} = 0.703\text{ m}^3/\text{s}$ 向初始裂缝内

注水，计算所用的材料参数如表 2 所示，采用边长为 0.25 m ($h = 0.25\text{ m}$) 的均匀八结点六面体网格对模型进行有限元空间离散。图 17 给出了不同时间裂缝内的孔压分布情况(图中只显示了 $\phi > 0.95$ 的单元)，计算结果显示虽然初始裂缝有明显的优势方向，但是随着注水时间的增加三维裂缝基本呈“圆饼”状向四周扩展，同时随着裂缝扩展，裂缝内的孔压也开始下降，当裂缝扩展至模型边界时孔压又开始上升，这与二维算例的情形一致。

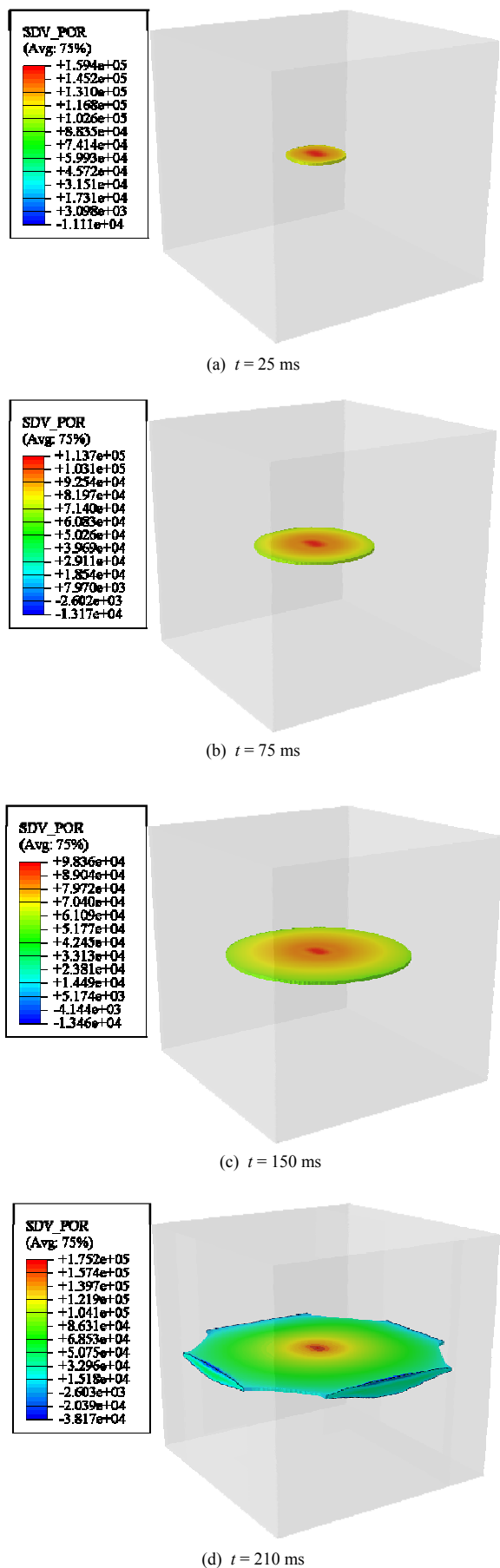


图 17 裂缝内水压分布云图(单位: Pa)

Fig.17 Water pressure field in the crack(unit: Pa)

5 结 论

本文提出了动力水力压裂的相场模拟方法, 并基于显式有限元求解框架予以数值实现, 主要结论如下:

(1) 将充满微观孔隙的岩体等效为宏观均匀多孔介质, 基于动力达西 - 毕奥渗流理论考虑液体在岩体中渗流过程, 从而考虑动力荷载作用下固体变形和流体压力的耦合关系; 将裂缝内流体均化为泊肃叶流, 通过修改渗透张量的方式考虑泊肃叶流的平均流速, 再结合相场演化方程, 就可以利用相场方法模拟动力水力压裂过程。

(2) 基于有限元显式时间积分框架数值实现了所提出的模拟方法, 在每一增量步内首先更新相场, 然后同时更新位移场和水压力场, 即位移场与水压力场强耦合, 与相场弱耦合, 计算时间步长由水压力场的向前差分求解控制, 较小的时间步长可以保证相场求解精度。

(3) 通过一维动力固结算例验证了本文所提方法能够正确计算动力荷载作用下的位移场和孔压场, 二维流量控制的水力压裂算例说明了动力水力压裂裂缝扩展的典型特征, 裂缝相交、分叉和裂缝三维扩展算例展现了方法计算复杂裂缝扩展形式的的能力, 故本文为复杂的动力水力压裂数值计算提供了新方法。

参考文献(References):

- [1] 张有天. 岩石水力学与工程[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005: 112 - 114.(ZHANG Youtian. Rock hydraulics and engineering[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005: 112 - 114.(in Chinese))
- [2] TERZAGHI K. Principles of soil mechanics, IV—Settlement and consolidation of clay[J]. Engineering News-Record, 1925, 95(3): 874 - 878.
- [3] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, 12(2): 155 - 164.
- [4] BIOT M A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena[J]. Journal of Applied Physics, 1954, 25(11): 1385 - 1391.
- [5] GARAGASH D I, DETOURNAY E, ADACHI J I. Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 669: 260 - 297.
- [6] ZHANG H B, LIU J S, ELSWORTH D. How sorption-induced matrix deformation affects gas flow in coal seams: a new FE model[J].

- International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(8): 1 226 - 1 236.
- [7] ADLER P M, THOVERT J F, MOURZENKO V V. Fractured porous media[M]. Oxford: Oxford University Press, 2012: 66 - 81.
- [8] BOONE T J, INGRAFREA A R. A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1990, 14(1): 27 - 47.
- [9] SCHREFLER B A, SECCHI S, SIMONI L. On adaptive refinement techniques in multi-field problems including cohesive fracture[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(4): 444 - 461.
- [10] SECCHI S, SCHREFLER B A. A method for 3-D hydraulic fracturing simulation[J]. International Journal of Fracture, 2012, 178(1/2): 245 - 258.
- [11] RÉTHORÉ J, BORST R D, ABELLAN M A. A two-scale model for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks[J]. Computational Mechanics, 2008, 42(2): 227 - 238.
- [12] IRZAL F, REMMERS J J C, HUYGHE J M, et al. A large deformation formulation for fluid flow in a progressively fracturing porous material[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 256: 29 - 37.
- [13] GRASSL P, FAHY C, GALLIPOLI D, et al. On a 2D hydro-mechanical lattice approach for modelling hydraulic fracture[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2015, 75: 104 - 118.
- [14] 严成增, 郑宏, 孙冠华, 等. 模拟水压致裂的二维 FDEM-flow 方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(1): 67 - 75. (YAN Chengzeng, ZHENG Hong, SUN Guanhua, et al. A 2D FDEM-flow method for simulating hydraulic fracturing[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(1): 67 - 75. (in Chinese))
- [15] MIKELIC A, WHEELER M F, WICK T. Phase-field modeling of a fluid-driven fracture in a poroelastic medium[J]. Computational Geosciences, 2015, 19(6): 1 171 - 1 195.
- [16] MIEHE C, MAUTHE S, TEICHTMEISTER S. Minimization principles for the coupled problem of Darcy-Biot-type fluid transport in porous media linked to phase field modeling of fracture[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2015, 82: 186 - 217.
- [17] VERRUIJT A. An introduction to soil dynamics[M]. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2009: 91 - 92.
- [18] LEWIS R W, SCHREFLER B A. The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media[M]. New York: John Wiley, 1998: 453 - 459.
- [19] FRANCFORT G A, MARIGO J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, 46(8): 1 319 - 1 342.
- [20] MIEHE C, WELSCHINGER F, HOFACKER M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 83(10): 1 273 - 1 311.
- [21] BORDEN M J, VERHOOSSEL C V, SCOTT M A, et al. A phase-field description of dynamic brittle fracture[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 217: 77 - 95.
- [22] 刘国威, 李庆斌, 左正. 相场断裂模型分步算法在 ABAQUS 中的实现[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(5): 1 019 - 1 030. (LIU Guowei, LI Qingbin, ZUO Zheng. Implementation of a staggered algorithm for a phase field model in ABAQUS[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(5): 1 019 - 1 030. (in Chinese))
- [23] LIU G W, LI Q B, MSEKH M A, et al. Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model[J]. Computational Materials Science, 2016, 121: 35 - 47.
- [24] HAMANN T, QIU G, GRABE J. Application of a coupled Eulerian-Lagrangian approach on pile installation problems under partially drained conditions[J]. Computers and Geotechnics, 2015, 63: 279 - 290.
- [25] ABAQUS. ABAQUS theory manual and user's manual[K]. Providence, RI, USA: Dassault Systemes Simulia Corp., 2012.
- [26] SCHANZ I M, CHENG A D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column[J]. Acta Mechanica, 2000, 145(1 - 4): 1 - 18.
- [27] CHUKWUDOZIE C, BOURDIN B, YOSHIOKA K. A variational approach to the modeling and numerical simulation of hydraulic fracturing under in-situ stresses[C]// Thirty-eighth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering. Stanford: Stanford University Press, 2013: 11 - 13.
- [28] GARAGASH D I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: early-time solution[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(18): 5 811 - 5 835.
- [29] DETOURNAY E, GARAGASH D I. The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2003, 494: 1 - 32.
- [30] MIKELIC A, WHEELER M F, WICK T. A phase-field method for propagating fluid-filled fractures coupled to a surrounding porous medium[J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2015, 13(1): 367 - 398.
- [31] WHEELER M F, WICK T, WOLLNER W. An augmented-Lagrangian method for the phase-field approach for pressurized fractures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 271: 69 - 85.