

# 基于独立覆盖流形方法与矢量和方法的 边坡稳定性分析

刘高扬<sup>1</sup>, 蔡永昌<sup>1, 2</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 提出一种基于独立覆盖流形方法(independent cover manifold method, ICMM)和矢量和方法的边坡稳定性分析方法。该方法采用 ICMM 计算边坡岩土体的应力场, 避免了有限元及传统流形方法复杂的前处理过程, 可以方便地计算含节理断层等不连续面的复杂边坡的应力状态。在此基础上, 采用矢量和方法计算潜在滑裂面的安全系数, 矢量和方法基于边坡的真实应力状态和力的矢量特征, 物理意义明确, 而且不需要类似强度折减法的迭代计算, 计算代价小。同时采用模拟退火遗传算法进行优化搜索, 得到边坡的临界滑裂面。提出方法结合以上优点, 可以高效精确地计算含有节理断层的复杂边坡的临界滑裂面和安全系数。4 个代表性算例以及工程案例的分析应用验证了提出方法的有效性和精确性。

**关键词:** 边坡工程; 独立覆盖; 数值流形; 矢量和; 优化算法; 边坡稳定性分析

**中图分类号:** P 642

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2017)06 - 1434 - 09

## Slope stability analysis based on independent cover manifold method and vector sum method

LIU Gaoyang<sup>1</sup>, CAI Yongchang<sup>1, 2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A method of slope stability analysis based on independent cover manifold method(ICMM) and vector sum method(VSM) was proposed in this paper. ICMM is employed to calculate the stress fields, particularly for slopes containing discontinuities(joint, faults etc.). This method avoids the complex pre-processing algorithm in the finite element and numerical manifold methods. To calculate the factor of safety, VSM is carried out with the real stress state and the vector sum algorithm. VSM possesses the merits of clear physical meaning and high efficiency without the time-consuming iterations involved in the strength reduction method. Besides, the simulated annealing genetic algorithm(SAGA) is used to determine the critical slip surface. With the above advantages, the factor of safety of complex slopes containing discontinuities could be calculated effectively and precisely by the proposed method. Four representative numerical examples and one engineering case validate the proposed method.

**Key words:** slope engineering; independent cover; numerical manifold method; vector sum method; optimization algorithm; slope stability analysis

**收稿日期:** 2016 - 09 - 29; **修回日期:** 2017 - 01 - 05

**基金项目:** “十二五”国家科技支撑计划项目(2011BAB08B01)

Supported by the China National Twelfth Five-year Science and Technology Supporting Programme(Grant No.2011BAB08B01)

**作者简介:** 刘高扬(1987 - ), 男, 2009 年毕业于长安大学地质工程专业, 现为博士研究生, 主要从事岩石力学和边坡稳定性方面的研究工作。E-mail: gaoyang.liu@outlook.com

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2016.1261

## 1 引言

在边坡工程中, 通常岩体是非均质并且非连续的, 比如被复杂节理、裂隙或软弱结构面切割的岩体。采用传统的有限元方法计算边坡真实应力状态时, 在网络划分、裂纹扩展带来的网格变动等方面面临着巨大的挑战与困难。为了解决上述连续和非连续变形的力学问题, G. H. Shi<sup>[1]</sup>于 20 世纪 90 年代初提出了数值流形方法(numerical manifold method, NMM), 并率先应用在块体与节理岩体的变形模拟中。流形方法一经提出便备受关注, 近年来数值流形的研究已经涉及很多方面, 如流形覆盖系统生成<sup>[2-4]</sup>、裂纹扩展<sup>[5-6]</sup>、工程应用<sup>[7-8]</sup>等, 并取得了丰硕的研究成果, 关于数值流形方法的更多进展可参见 G. Ma 等<sup>[9]</sup>的研究。蔡永昌和刘高扬<sup>[10]</sup>指出流形方法的流形覆盖系统生成算法和采用高阶覆盖位移函数时的线性相关性引起的总刚度矩阵奇异性等问题, 是流形方法迫切想要解决的问题和研究焦点所在。

为了解决上述问题, 蔡永昌等<sup>[10-11]</sup>提出了一种基于独立覆盖的高阶流形方法 ICMM(independent covers manifold method)。该方法基于完全独立的物理覆盖, 在物理覆盖上可以定义一至高阶的覆盖位移函数, 在独立的物理覆盖间采用连接单元进行过渡, 避免了传统流形方法复杂的覆盖系统生成算法, 同时消除了高阶流形方法特有的线性相关性带来的总体刚度矩阵奇异性问题, 可以方便地应用于连续体分析、从连续到非连续破坏以及完全非连续问题的统一分析。在边坡稳定性分析中, 采用 ICMM 可以高效精准地计算边坡的真实应力状态。

在得到边坡应力场之后, 本文采用 X. R. Ge 等<sup>[12-14]</sup>提出了矢量和分析方法来计算边坡的安全系数。郭明伟等<sup>[15]</sup>指出, 极限平衡法和强度折减法都是基于边坡失稳时的应力状态进行计算的, 并不能真正的反应边坡在真实状态下的安全性; 基于滑裂面应力分析的方法虽然基于边坡的真实应力, 但其安全系数仅仅是抗滑力和下滑力的代数和比值, 对于非规则形状的滑裂面其物理意义不明确。而矢量和法克服了以上缺点, 该方法从边坡当前的应力状态出发, 安全系数的定义为滑裂面上抗滑力和下滑力矢量和在主滑方向上投影的比值。其安全系数定义清晰, 物理力学意义明确, 计算过程简单。

边坡稳定性分析的最后一步是临界滑裂面的搜索, 目前临界滑裂面的搜索方法有模式搜索法<sup>[16]</sup>、

变分法<sup>[17]</sup>、动态规划法<sup>[18-19]</sup>、启发式算法<sup>[20-22]</sup>等。本文采用一种模拟退火遗传算法对临界滑裂面进行搜索。该方法将模拟退火法和遗传算法相结合, 使得遗传算法在前期发挥全局搜索的优势, 很容易收敛到全局较优解; 后期采用模拟退火法来处理遗传算法得到的全局较优解, 充分利用了模拟退火法后期局部搜索的强大功能, 最终收敛到全局最优解。

本文中边坡稳定性分析实施步骤包括: 采用 ICMM 计算边坡真实应力状态、采用矢量和方法确定整体下滑趋势方向并计算安全系数, 最后采用模拟退火遗传算法进行优化搜索, 得到边坡的临界滑裂面并计算相应的安全系数。

## 2 ICMM 基本理论

如图 1 所示的具有 2 条裂纹的物体  $\Omega$ , 采用流形方法进行分析时, 可首先定义如图所示的三角形(或任意形状)有限元网格。在传统 NMM 中, 结点的数学覆盖定义为围绕该结点的所有数学单元集合, 称这样的数学覆盖定义方法为“完全重叠的覆盖”。裂纹、材料边界等的物理线进一步剖分数学覆盖为独立变形的物理覆盖区域。传统 NMM 中物理覆盖的剖分需要复杂、耗时的几何算法和点-区域判断算法, 对其进行三维分析的难度更高, 同时高阶位移函数的线性相关性也是一个难以避免的问题。

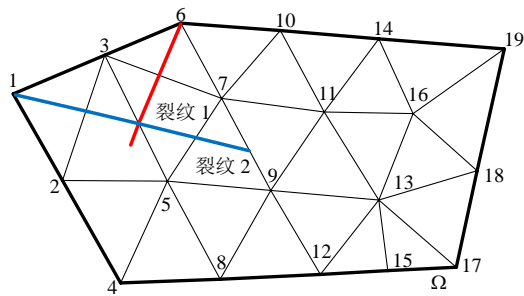


图 1 有限元网格(数学网格)

Fig.1 Finite element mesh(mathematical mesh)

为了解决流形方法存在的这些困难, 蔡永昌等<sup>[10-11]</sup>提出了 ICMM 方法, 区别于“完全重叠的覆盖”, ICMM 将每个数学单元定义为一个独立覆盖。本节简要介绍 ICMM 独立覆盖、连接单元及节理单元的推导, 其他推导过程详见蔡永昌和刘高扬<sup>[10]</sup>的研究。

如图 1 中的数学单元 3-5-7 和 3-7-6, 可以将其定义为完全独立的覆盖  $C_1$  和  $C_2$ 。对于任意一独立覆盖  $C_i$ , 其覆盖位移函数  $u(x, y)$  为

$$u(x, y) = \Phi(x, y) \cdot a \quad (1)$$

式中： $\mathbf{a}$ 为覆盖自由度； $\Phi(x, y)$ 可根据需要取为一阶至多阶的简单多项式，甚至解析解等多种形式：

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_c & 0 & y_c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & x_c & 0 & y_c & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中： $(x_c, y_c)$ 为对应覆盖的形心坐标。

则独立覆盖  $C_i$  上应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\Phi\mathbf{a} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} \quad (3)$$

式中： $\mathbf{B}$ 为应变矩阵， $\mathbf{L}$ 为微分算子， $\boldsymbol{\alpha}$ 为自由度列阵。

应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

式中： $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵。

在 ICM 中，假设相邻独立覆盖的连接面上存在一连接单元。例如独立覆盖  $C_1$  和  $C_2$  之间存在一连接单元  $L_{1,2}$ ，如图 2 所示。

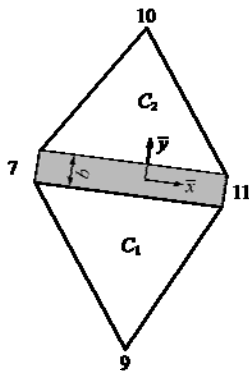


图 2 独立覆盖之间的连接单元

Fig.2 Link element between independent covers

假设相邻独立覆盖  $C_j$  和  $C_{j+1}$  之间存在一厚度为  $b$  的连接单元  $L_{j, j+1}$ ，连接单元的应变可以表示<sup>[10]</sup>为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{\bar{x}\bar{y}} \\ \bar{\varepsilon}_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \lambda [\Phi_{C_{j+1}} \quad -\Phi_{C_j}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{C_{j+1}} \\ \mathbf{a}_{C_j} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_L \mathbf{a}_L \quad (5)$$

其中，

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{b} \lambda [\Phi_{C_{j+1}} \quad -\Phi_{C_j}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{C_{j+1}} \\ \mathbf{a}_{C_j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{C_{j+1}} \\ \mathbf{a}_{C_j} \end{bmatrix}$$

式中： $\mathbf{a}_L$ 为连接单元的自由度， $\lambda$ 为坐标转换矩阵。

连接单元  $L_{j, j+1}$  的应力为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}} \\ \bar{\sigma}_{\bar{y}\bar{y}} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_L \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_L = \mathbf{D}_L \mathbf{B}_L \mathbf{a}_L \quad (6)$$

其中，

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中： $G$ 为剪切模量， $G = E/[2(1+\nu)]$ ， $E$ 为弹性模量， $\nu$ 为泊松比。

假设独立覆盖  $C_k$  被节理剖分为两个独立覆盖  $C_{k_1}$  和  $C_{k_2}$ ，如图 3 所示。采用 Goodman 节理单元来模拟节理，推导过程与连接单元类似，则节理单元应变  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$  为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \frac{1}{b} \Delta \bar{\mathbf{u}}_s = \frac{1}{b} \mathbf{N}_s \mathbf{a}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{a}_s \quad (8)$$

式中： $\Delta \bar{\mathbf{u}}_s$ 为节理单元表面位移差， $\mathbf{N}_s$ 为节理单元形函数矩阵， $\mathbf{a}_s$ 为节理单元自由度列阵， $\mathbf{B}_s$ 为节理单元应变矩阵。

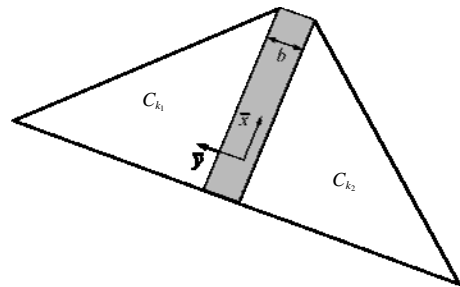


图 3 节理单元

Fig.3 Joint element

节理单元应力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s$  为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s = \mathbf{D}_s \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{a}_s \quad (9)$$

其中，

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中： $k_s, k_n$ 为节理的劲度系数。

同理，利用连接单元可以推导得到应力和位移边界条件的表达式。在此基础上根据变分原理可以得到：

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11)$$

式中： $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵， $\mathbf{F}$ 为等效荷载列阵， $\mathbf{a}$ 为待求解的自由度列阵。上述公式的详细推导过程见蔡永昌和刘高扬<sup>[10]</sup>的研究。

当边坡含有节理、断层或软弱结构面等不连续面时，传统的流形方法需要采用复杂的覆盖生成算法来分别生成物理覆盖、流形单元，其中涉及复杂、耗时的点-区域判断等算法。而 ICM 则摒弃了这些缺点，只需要将独立覆盖再进一步剖分为不同的独立覆盖即可，计算代价较小且实施过程简单。同时在应力高梯度区域可以灵活地采用高阶覆盖函数以提高精度，不会有线性相关性的问题。

### 3 矢量和分析方法安全系数表达式

矢量和分析方法<sup>[23]</sup>是基于力的矢量特征，以边

坡的整体稳定性为研究对象的分析方法。其安全系数的定义为: 潜在滑裂面上的总极限抗滑力矢量在潜在滑动体的整体下滑趋势方向的负向上投影和总滑动力矢量在潜在滑动体的整体下滑趋势方向上投影的比值。

边坡整体下滑趋势方向示意图如图 4 所示, 图中,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_n$  分别对应为潜在滑裂面上点 A 的应力矢量、剪应力、法向应力;  $\hat{d}$  为整体下滑趋势方向;  $\theta$  为整体下滑趋势方向与 x 轴的夹角。S 为潜在滑裂面, 则矢量和法安全系数可表达为

$$F = \frac{R}{T} \tag{12}$$

其中,

$$R = \int_S \sigma'_s (-\hat{d}) dS \tag{13}$$

$$T = \int_S (\sigma_s \hat{d}) dS \tag{14}$$

$$\hat{d} = \frac{-\int_S (c - \sigma_n \tan \varphi) \hat{d}_r dS}{\left\| \int_S (c - \sigma_n \tan \varphi) \hat{d}_r dS \right\|} \tag{15}$$

式中:  $\sigma'_s$  为滑裂面上任一点的抗滑应力矢量,  $\hat{d}_r$  为滑裂面单位极限抗滑剪应力方向(单位矢量),  $\varphi$  为内摩擦角。

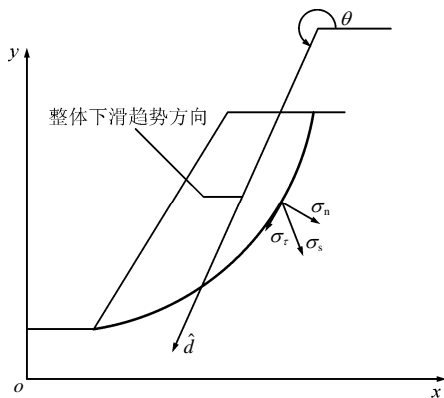


图 4 边坡整体下滑趋势方向示意图

Fig.4 Sketch of potential slip direction of the whole slope

## 4 基于模拟退火遗传算法的临界滑裂面搜索

### 4.1 滑裂面形状的确定

边坡滑裂面搜索本质上可以转化为最优化问题, 一般的优化搜索方法均需要定义一个由一个或多个自变量构成的目标函数。这些自变量是能够唯一确定潜在滑裂面的几何位置和形状的参数<sup>[24]</sup>。在运用优化方法搜索临界滑裂面之前, 必须先指定滑

裂面与自变量的关系。对于均质边坡, 可以采用圆弧滑裂面进行模拟。而对于非均质或者含有节理、断层和软弱结构面的复杂边坡, 则必须采用非圆弧滑裂面进行模拟。这类滑裂面是通过离散滑裂面为 n 个点, 再用通过这些离散点的多段折线或者样条曲线来拟合滑裂面。目前的文献中, 模拟非圆弧滑裂面一般以滑裂面的 n 个离散点的坐标为自变量<sup>[24-26]</sup>, 这种方法很容易产生大量的上凸或者波浪形的不合理潜在滑裂面(见图 5), 从而浪费巨大的计算代价进行优化求解。

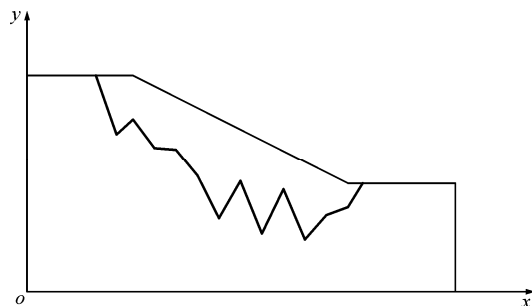


图 5 不合理的滑裂面

Fig.5 Unqualified slip surface

本文借鉴 A. R. Zolfaghari 等<sup>[27]</sup>的方法, 通过直线段的斜率和斜率增量来搜索临界滑裂面。对于如图 6 所示包含 n 个离散点的非圆弧滑裂面, 其合理性要求<sup>[27-29]</sup>为

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n \tag{16}$$

该滑裂面可由一组自变量  $(x_1, \alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \dots, \Delta\alpha_n)$  完全确定, 即潜在滑裂面的目标函数可以表示为

$$F = f(x_1, \alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \dots, \Delta\alpha_n) \tag{17}$$

其中根据朗肯理论,  $\alpha_1$  的初始值在  $270^\circ \sim 360^\circ - (45^\circ + \varphi/2)$  范围生成。

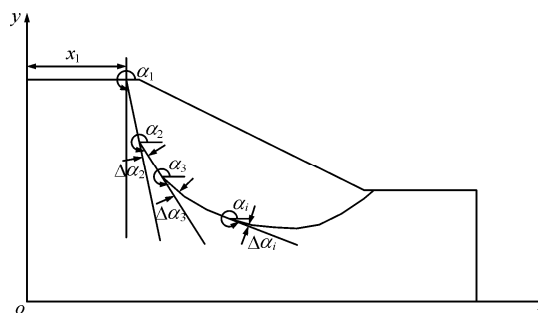


图 6 非圆弧滑裂面

Fig.6 Non-circular slip surface

可以看出, 每条直线段其实都和上条直线段有关。x1 和 xn 的合理取值区间需要预先指定。有了 x1 和 alpha1, 根据边坡的几何形状可以 y1, 通过斜率增量可以得到后面的每条直线段, 从而唯一确定了该滑

裂面。在最后求得  $x_n$  后与合理取值区间对比, 如果在区间之外则给该条滑裂面的目标函数赋一极大值, 使其在优化过程中被淘汰掉。这种方法预先排除了各种不合理的潜在滑裂面, 从而大大减轻了优化过程的计算量。

#### 4.2 模拟退火遗传算法搜索临界滑裂面

近年来, 众多学者致力于临界滑动面的搜索技术, 其中遗传算法<sup>[27, 30-31]</sup>与模拟退火算法<sup>[32]</sup>是近年来广泛采用的 2 种智能算法。遗传算法<sup>[33]</sup>采用达尔文生物进化的思想, 具有较强的全局搜索能力, 可以较好得避免算法避免陷入局部最优。但是遗传算法的缺点在于局部搜索能力相对较差<sup>[34]</sup>, 致使该算法在进化后期搜索效率较低。并且遗传算法容易产生早熟收敛的问题。模拟退火法<sup>[35]</sup>是基于物理中固体物质退火过程与优化问题之间的相似性提出的优化方法。模拟退火法优点在于局部搜索效率高, 但其对整个搜索空间的状况了解不多, 不利于快速进入最有希望的搜索区域, 这就使得模拟退火算法在前期全局搜索的运算效率偏低。

因此, 本文采用了一种模拟退火遗传算法<sup>[36-37]</sup>, 对边坡滑裂面进行优化求解。该方法将模拟退火法和遗传算法相结合, 使得遗传算法在前期发挥全局搜索的优势, 很容易收敛到全局较优解; 后期采用模拟退火法来处理遗传算法得到的全局较优解, 充分利用了模拟退火法局部搜索的强大功能, 最终收敛到全局最优解。

采用模拟退火遗传算法进行临界滑裂面搜索的具体实施步骤如下:

(1) 编码和初始种群的生成。根据式(17)将目标函数的各个参数在约束范围内生成二进制基因编码(基因), 将基因按顺序连接在一起形成遗传算法搜索的染色体结构(记作  $T_i$ )。根据实际情况选择合适的种群大小, 生成初始种群。

(2) 种群中个体适应度的检测评估。将每组二进制染色体转化为滑裂面的十进制控制参数, 进而确定潜在滑裂面, 并采用矢量和方法计算相应的安全系数  $F_i$ , 该过程表示为

$$F_i = f(T_i) \tag{18}$$

因为遗传算法是求适应函数的最大值, 而边坡稳定性分析中所求的为潜在滑裂面的最小安全系数, 因此将适应值函数  $f_{fit}$  定义为

$$f_{fit} = \frac{1}{F_i^2} \tag{19}$$

采用  $F_i$  的二次方, 是考虑二次方情况下安全系

数变化比一次方时对适应值函数的影响灵敏<sup>[24]</sup>。

(3) 根据适应值函数对种群进行选择、交叉、变异操作, 形成新的染色体种群, 并计算种群中最优染色体  $T_{opt}$  对应的最小安全系数  $F_{min}$ 。

(4) 判断是否满足终止条件。如果否跳转至步骤(2); 如果是跳转至步骤(5)。终止条件有 2 个: 一是达到最大迭代次数  $N_{max}$ ; 二是在一定迭代次数  $N_{iter}$  内  $F_{min}$  保持不变, 即满足:

$$|F_{min} - F_{min, old}| < \varepsilon \tag{20}$$

式中:  $F_{min}$  为当前种群的最小安全系数,  $F_{min, old}$  为  $N_{iter}$  代前种群的最小安全系数,  $\varepsilon$  为容许误差。本文中  $N_{max} = 50$ ,  $N_{iter} = 20$ ,  $\varepsilon = 0.01$ 。

(5) 给定初始温度  $T$ , 并将上代遗传算法得到的全局较优解  $F_{min}$  对应的染色体  $T_{opt}$  作为模拟退火法作为初始解。

(6) 交换随机 2 个角度增量, 产生新解  $T'_{opt}$ , 并计算增量  $\Delta F' = f(T'_{opt}) - f(T_{opt})$ 。

(7) 若  $\Delta F' < 0$ , 则接受  $T'_{opt}$  为新的最优解, 否则以概率  $\exp[-(\Delta F')^2 / T]$  接受作为新的最优解  $T'_{opt}$ 。

(8) 判断是否满足终止条件。如果满足则输出当前解为最优解, 否则降低温度令  $T = T \times K$  ( $K$  为 0~1 范围的常数), 跳转至步骤(6)。

至此, 就完成了边坡的临界滑裂面搜索及其对应最小安全系数计算的全部过程。

基于以上内容, 笔者编制了 ICMM、矢量和方法以及临界滑裂面搜索等程序及其相应接口。首先采用 ICMM 计算边坡的真实应力状态, 在此基础上采用矢量和方法确定潜在滑裂面的整体下滑趋势方向和安全系数, 最后采用模拟退火遗传算法进行优化搜索, 进而得到边坡的临界滑裂面及其对应的安全系数。

## 5 算例

### 5.1 算例 1

本算例来自来自 ACADS 考题<sup>[38]</sup>。边坡的几何模型如图 7 所示, 算例 1~4 的材料参数均见表 1。

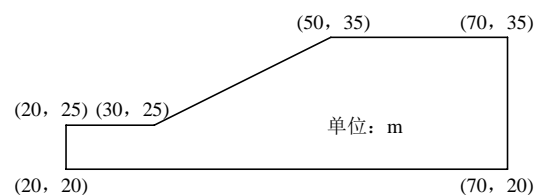


图 7 算例 1 的几何模型

Fig.7 Geometry of slope in example 1



表 1 算例中的材料参数

Table 1 Material properties for the four examples

算例	材料编号	重度 / (kN · m <sup>-3</sup> )	黏聚力 / kPa	内摩擦角 / (°)	泊松比	弹性模量 / kPa
1	1	20.0	3.0	19.6	0.25	10 <sup>4</sup>
	1	19.5	0.0	38.0	0.25	10 <sup>4</sup>
2	2	19.5	5.3	23.0	0.25	10 <sup>4</sup>
	3	19.5	7.2	20.0	0.25	10 <sup>4</sup>
3	1	25.0	1 000	38.0	0.20	10 <sup>7</sup>
	2	18.0	120	24.0	0.30	5 × 10 <sup>5</sup>
4	1	19.0	15.0	20.0	0.25	10 <sup>4</sup>
	2	19.0	17.0	21.0	0.25	10 <sup>4</sup>
	3	19.0	5.0	10.0	0.25	10 <sup>4</sup>
	4	19.0	35.0	28.0	0.25	10 <sup>4</sup>

ICMM 中采用高阶覆盖函数可以方便地提高应力计算精度, 本例中 ICMM 采用 2 阶覆盖函数。节点数目分别为 114, 207 和 969 时, 有限元和 ICMM 计算得到边坡的安全系数如表 2 所示。

表 2 不同节点数下算例 1 安全系数对比

Table 2 Comparisons of factor of safety in example 1 with different number of nodes

节点数目	安全系数	
	有限元	ICMM(2 阶)
114	0.822	1.095
207	0.941	1.084
969	0.984	1.022

由表 2 可知, 相较于传统的有限元方法, 2 阶的 ICMM 在边坡的应力分析中精度明显更高, 尤其是节点数目较少时, 优势更为明显。节点数目为 969 时本文方法得到的边坡整体下滑趋势方向与  $x$  轴夹角为 198.55°, 如图 8 所示。搜索过程中潜在滑裂面由蓝线表示, 最终得到的临界滑裂面由红线表示, 其对应的安全系数为 1.022。本算例裁判推荐的标准安全系数为 1.000, 可见本文方法在该均质边坡稳定性分析中得到安全系数与裁判答案非常接近, 误差只有 2.2%。

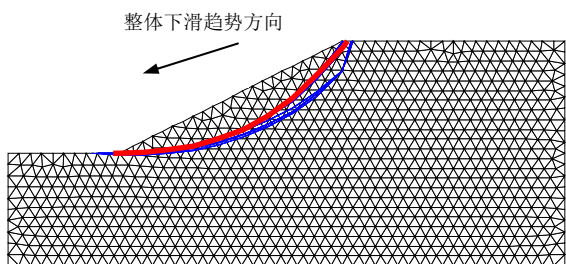


图 8 算例 1 边坡的临界滑裂面

Fig.8 The critical slip surface of example 1

### 5.2 算例 2

本算例同样来自 ACADS 考题<sup>[38]</sup>, 其轮廓尺寸与算例 1 相同, 但坡体由 3 种土层组成, 几何模型如图 9 所示。

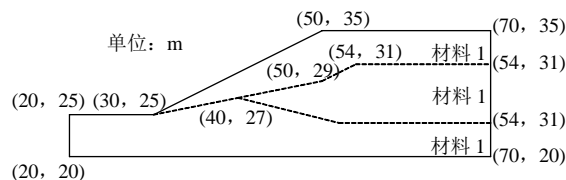


图 9 算例 2 的几何模型

Fig.9 Geometry of slope in example 2

ICMM 计算模型节点数为 658。本算例采用极限平衡法得到的安全系数为 1.230~1.520, 推荐的裁判答案为 1.39。采用本文方法得到边坡整体下滑趋势方向和临界滑裂面如图 10 所示, 边坡的整体滑动方向与  $x$  轴夹角为 200.85°, 搜索过程中的潜在滑裂面由蓝线表示, 最终得到的临界滑裂面由红线表示, 其对应的安全系数为 1.384。结果与裁判答案基本一致, 误差仅为 0.6%。算例 1 和 2 表明了本文方法在均质和非均质边坡稳定性分析中都能得到令人满意的结果。

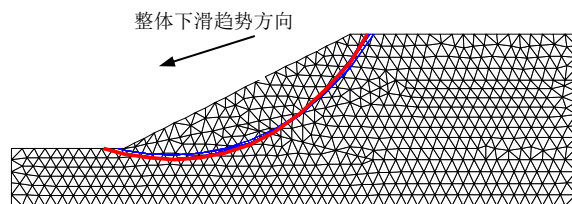


图 10 算例 2 边坡的临界滑裂面

Fig.10 The critical slip surface of example 2

### 5.3 算例 3

算例 3 最初由李连崇等<sup>[39]</sup>提出, 之后郑文博等<sup>[40]</sup>也对其进行了分析计算。本算例为一垂直岩质边坡, 在距离坡脚 5 m 高处有一节理面, 节理倾角 45°, 贯通率 100%。该边坡的几何模型如图 11 所示。

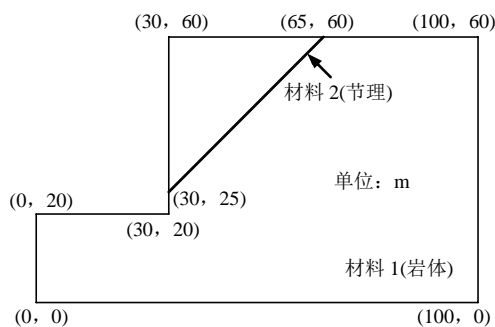


图 11 算例 3 的几何模型

Fig.11 Geometry of slope in example 3

采用 ICMM 计算含节理边坡实施过程非常简单，只需在建模时将节理设置为节理单元即可，而不需要增加额外的节点或者单元。根据朱伯芳<sup>[41]</sup>的方法计算可得节理单元的切向劲度系数  $k_s = 1.93 \times 10^6$  kPa，法向劲度系数  $k_n = 5 \times 10^6$  kPa。ICMM 计算模型节点数为 658 个，本例中临界滑裂面直接采用节理单元所在的面，采用本文方法得到的整体下滑趋势方向和临界滑裂面如图 12 所示。不同方法安全系数计算结果如表 3 所示。

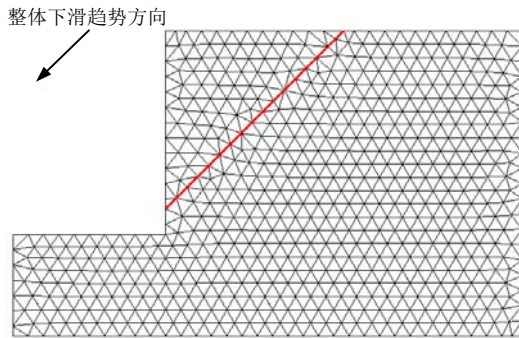


图 12 算例 3 边坡的临界滑裂面

Fig.12 The critical slip surface of example 3

表 3 不同方法计算算例 3 所得安全系数结果对比

Table 3 Comparisons of values of safety factor in example 3 with different methods

FEM <sup>[39]</sup>	FRPA-Slope <sup>[39]</sup>	数值流形 - 图论 <sup>[40]</sup>	本文方法
0.99	1.01	1.003	0.996

该算例临界滑裂面为贯通的节理面，整体下滑趋势方向与  $x$  轴夹角为  $225^\circ$ 。本文方法得到的安全系数与其他方法基本一致。

### 5.4 算例 4

算例 4 由 Y. M. Cheng 等<sup>[28]</sup>对 A. R. Zolfaghari 等<sup>[27]</sup>中一算例修改得到的，之后 Y. C. Li 等<sup>[29]</sup>也采用了该算例来检验其程序的合理性。该算例为包含一条节理面的非均质边坡，几何模型如图 13 所示。

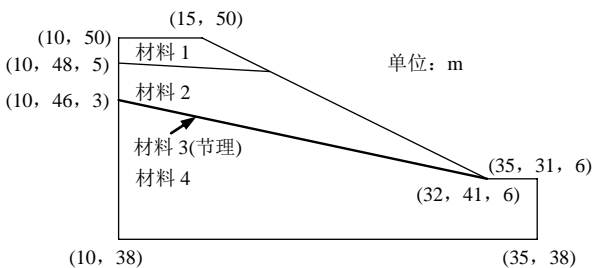


图 13 算例 4 的几何模型

Fig.13 Geometry of slope in example 4

根据朱伯芳<sup>[41]</sup>的方法计算可得节理单元的切向劲度系数  $k_s = 7.408 \times 10^5$  kPa，法向劲度系数  $k_n =$

$2 \times 10^6$  kPa。需要注意的是，在采用 ICMM 计算含节理边坡的真实应力状态时，可以将计算过程中积分点的应力保存下来，这样后期搜索过程中节理的应力就可以直接由积分点的应力插值得到，从而大大降低了搜索过程的应力计算代价。本文方法得到的整体下滑趋势方向和临界滑裂面如图 14 所示，安全系数与其他方法对比如表 4 所示。可见本文方法得到的安全系数相对较小，但总体来说与其他方法结果相差不大。算例 3 和 4 验证了本文方法在含节理边坡临界滑裂面搜索和安全系数计算中的合理性和精确性。

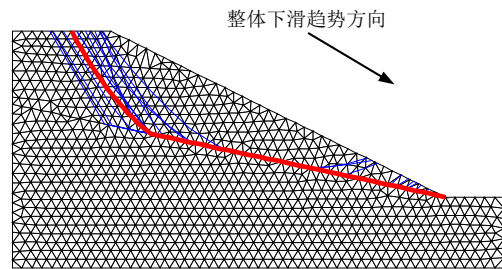


图 14 算例 4 边坡的临界滑裂面

Fig.14 The critical slip surface of example 4

表 4 不同方法计算算例 4 所得安全系数结果对比

Table 4 Comparisons of values of safety factor in example 4 with different methods

Y. M. Cheng 等 <sup>[28]</sup>	Y. C. Li 等 <sup>[29]</sup>	本文方法
1.200 6	1.197	1.182 5

## 6 工程实例应用

为了进一步分析验证本文方法，对云南晋宁磷矿露天高边坡进行稳定性分析。矿区内对磷矿的露天开采形成了一个南北走向的深凹露天矿坑，本文对 134 号剖面线的西侧边坡进行分析。该边坡倾向坡外，为顺层边坡，倾角  $23^\circ$ ，根据现场踏勘和地质勘查资料，该剖面自下而上地层岩性依次为中风化白云岩、强风化砂页岩、全风化黏土岩、中风化白云质磷块岩，岩土体参数取值如表 5 所示。对 134 号剖面线边坡进行适当简化，计算的几何模型如图 15 所示。

表 5 晋宁磷矿边坡岩体计算参数

Table 5 Material properties of slope at Jinning mine

岩性名称	重度/ ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )	黏聚力/ kPa	内摩擦 角/( $^\circ$ )	泊松 比	弹性模量/ kPa
中风化白云岩	25.7	550.0	35.4	0.32	4 960
强风化砂页岩	21.2	42.0	30.0	0.35	1 880
强风化白云质磷块岩	18.9	39.0	28.0	0.41	1 660
全风化黏土岩	16.8	22.4	18.0	0.35	1 750

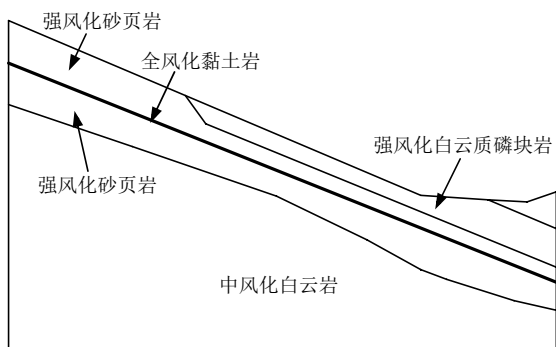


图 15 晋宁磷矿边坡计算的几何模型

Fig.15 Geometry of slope at Jinning mine

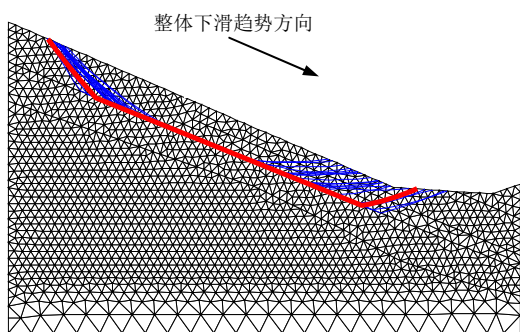


图 16 晋宁磷矿边坡的临界滑裂面

Fig.16 The critical slip surface of slope at Jinning mine

本文方法得到的整体下滑趋势方向和临界滑裂面如图 16 所示。边坡的整体滑动方向与  $x$  轴夹角为  $331.81^\circ$ ，搜索过程中的潜在滑裂面由蓝线表示，最终得到的临界滑裂面由红线表示，其对应的安全系数为 1.737。可见该边坡在天然工况下处于稳定状态。

## 7 结 论

ICMM 避免了传统流形方法复杂的覆盖系统生成算法，将 ICMM 引入边坡稳定性分析可以方便地模拟节理引起的位移不连续和高应力梯度等特征，具有较为明显的灵活性。

本文在 ICMM 计算的边坡真实应力场的基础上，结合矢量和方法计算边坡的安全系数，该方法物理意义明确，计算代价小，只需要计算一次边坡的应力状态即可。之后采用直线段斜率增量的方式来确定潜在滑裂面，这种方法预先排除了各种不合理的潜在滑裂面，大大减轻了优化过程的计算代价。相对于单独使用遗传算法或者模拟退火法，本文采用的模拟退火遗传算法不仅发挥了遗传算法全局搜索的优势，同时结合了模拟退火法局部收敛快的特点，优化效率大大提高。笔者综合以上方法的优势编制了相应程序，并结合算例验证了程序的有效性和精确性。

## 参考文献(References):

- [1] SHI G H. Manifold method of material analysis[C]// Transaction of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing. [S.l.]: [s.n.], 1991: 57 - 76.
- [2] CAI Y C, WU J. A robust algorithm for the generation of integration cells in numerical manifold method[J]. International Journal of Impact Engineering, 2016, 90: 165 - 176.
- [3] CHEN Y L, LI L X. An improved numerical manifold method and its application[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015, 52: 120 - 129.
- [4] 苏海东, 颀志强, 龚亚琦, 等. 基于独立覆盖的流形法的收敛性及覆盖网格特性[J]. 长江科学院院报, 2016, 33(2): 131 - 136.(SU Haidong, XIE Zhiqiang, GONG Yaqi, et al. Characteristics of convergence and cover mesh in numerical manifold method based on independent covers[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2016, 33(2): 131 - 136.(in Chinese))
- [5] 徐栋栋, 郑宏, 夏开文, 等. 高阶扩展数值流形法在裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(7): 1 375 - 1 387. (XU Dongdong, ZHENG Hong, XIA Kaiwen, et al. Application of higherorder enriched numerical manifold method to crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(7): 1 375 - 1 387.(in Chinese))
- [6] 刘学伟, 刘泉声, 卢超波, 等. 温度 - 应力耦合作用下岩体裂隙扩展的数值流形方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(7): 1 432 - 1 441.(LIU Xuewei, LIU Quansheng, LU Chaobo, et al. A numerical manifold method for fracture propagation of rock mass considering Thermo-mechanical coupling[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(7): 1 432 - 1 441.(in Chinese))
- [7] 董志宏, 邹爱清, 丁秀丽. 基于数值流形元方法的地下洞室稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(增 2): 4 956 - 4 959.(DONG Zhihong, WU Aiqing, DING Xiuli. Stability study of underground cavern with numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(Supp.2): 4 956 - 4 959.(in Chinese))
- [8] NING Y J, AN X M, MA G W. Footwall slope stability analysis with the numerical manifold method[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, 48(6): 964 - 975.
- [9] MA G, AN X, HE L E I. The numerical manifold method: a review[J]. International Journal of Computational Methods, 2010, 7(1): 1 - 32.
- [10] 蔡永昌, 刘高扬. 基于独立覆盖的高阶流形方法[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2015, 43(12): 1 794 - 1 800.(CAI Yongchang, LIU Gaoyang. High-order manifold method with independent covers[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2015, 43(12): 1 794 - 1 800.(in Chinese))
- [11] CAI Y C, ZHU H H, ZHUANG X Y. A continuous/discontinuous deformation analysis(CDDA) method based on deformable blocks for fracture modeling[J]. Frontiers of Structural and Civil Engineering, 2013, 7(4): 369 - 378.
- [12] GE X R. Stability and deformation analysis of complex rock foundations of several large dams and hydropower stations in China[C]// Proceedings of International Workshop on Rock Foundation. Rotterdam: AA Balkema, 1995: 243 - 248.
- [13] 葛修润. 用 PC 型微机对岩体工程课题进行有限元分析[C]// 第一届全国计算岩土力学研讨会论文集. 成都: 西南交通大学出版社, 1987: 74 - 85.(GE Xiurun. The finite element analysis of rock mass and engineering with PC[C]// Proceedings of Symposium on the 1st National Computational Mechanics on Rock and Soil. Chengdu:



- Southwest Jiaotong University Press, 1987: 74 - 85.(in Chinese))
- [14] 葛修润. 抗滑稳定分析新方法——矢量和分析法的基本原理及其应用[C]// 岩石力学与工程的创新和实践: 第十一次全国岩石力学与工程学术大会. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2010: 26 - 44.(GE Xiurun. A new method for anti-sliding stability analysis—basic principle of vector sum analysis method and its application[C]// Proceedings of the 11th National Rock Mechanics and Engineering Conference. Wuhan: Hubei Science and Technology Press, 2010: 26 - 44.(in Chinese))
- [15] 郭明伟, 葛修润, 李春光, 等. 边坡和坝基抗滑稳定分析的三维矢量和法及其工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(1): 8 - 20.(GUO Mingwei, GE Xiurun, LI Chunguang, et al. Threedimensional vector sum method employed in slope and dam foundation stability analyses and its applications to practical engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(1): 8 - 20.(in Chinese))
- [16] GRECO V, GULLA G. Slip surface search in slope stability analysis[J]. Rivista Italiana di Geotecnica, 1985, 19(4): 189 - 198.
- [17] DE JOSSELIN DE JONG G. Application of the calculus of variations to the vertical cut off cohesive frictionless soil[J]. Geotechnique, 1980, 30(1): 1 - 16.
- [18] BAKER R. Determination of the critical slip surface in slope stability computations[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1980, 4(4): 333 - 359.
- [19] YAMAGAMI T, KOJIMA K, TAKI M. A search for the three-dimensional critical slip surface with random generation of surface[C]// Proceedings of the 36th Symposium on Slope Stability Analyses and Stabilizing Construction Methods. Tokyo, Japan: Japanese Geotechnical Society, 1991: 27 - 34.
- [20] GAO W. Determination of the noncircular critical slip surface in slope stability analysis by meeting ant colony optimization[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2015, 30(2): 06015001.
- [21] KAHATADENIYA K S, NANAKORN P, NEAUPANE K M. Determination of the critical failure surface for slope stability analysis using ant colony optimization[J]. Engineering Geology, 2009, 108(1/2): 133 - 141.
- [22] KALATEHJARI R, AREFNIA A, A RASHID A S, et al. Determination of three-dimensional shape of failure in soil slopes[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2015, 52(9): 1 283 - 1 301.
- [23] 郭明伟, 葛修润, 王水林, 等. 基于矢量和方法的边坡动力稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(3): 572 - 579.(GUO Mingwei, GE Xiurun, WANG Shuilin, et al. Dynamic stability analysis of slope based on vector sum analysis method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(3): 572 - 579.(in Chinese))
- [24] 王成华, 夏绪勇, 李广信. 基于应力场的土坡临界滑动面的遗传算法搜索[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(3): 425 - 428.(WANG Chenghua, XIA Xuyong, LI Guangxin. Genetic algorithm for searching for critical slip surface in soil slopes based on stress field[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2004, 44(3): 425 - 428.(in Chinese))
- [25] 李南生, 唐博, 谈凤婕, 等. 基于统一强度理论的土石坝边坡稳定分析遗传算法[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 243 - 249.(LI Nansheng, TANG Bo, TAN Fengjie, et al. Slope stability analysis of earth-rock dams based on unified strength criterion by genetic algorithm[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(1): 243 - 249.(in Chinese))
- [26] BOLTON H, HEYMANN G, GROENWOLD A. Global search for critical failure surface in slope stability analysis[J]. Engineering Optimization, 2003, 35(1): 51 - 65.
- [27] ZOLFAGHARI A R, HEATH A C, MCCOMBIE P F. Simple genetic algorithm search for critical non-circular failure surface in slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2005, 32(3): 139 - 152.
- [28] CHENG Y M, LI L, CHI S C, et al. Particle swarm optimization algorithm for the location of the critical non-circular failure surface in two-dimensional slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(2): 92 - 103.
- [29] LI Y C, CHEN Y M, ZHAN T L, et al. An efficient approach for locating the critical slip surface in slope stability analyses using a real-coded genetic algorithm[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2010, 47(7): 806 - 820.
- [30] MCCOMBIE P, WILKINSON P. The use of the simple genetic algorithm in finding the critical factor of safety in slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2002, 29(8): 699 - 714.
- [31] SUN J P, LI J C, LIU Q Q. Search for critical slip surface in slope stability analysis by spline-based GA method[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(2): 252 - 256.
- [32] CHENG Y M. Location of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(3): 255 - 267.
- [33] HOLLAND J H. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence[M]. Michigan: U Michigan Press, 1975: 1 - 232.
- [34] MaN K-F, TANG K-S, KWONG S. Genetic algorithms: concepts and applications[J]. IEEE transactions on Industrial Electronics, 1996, 43(5): 519 - 534.
- [35] BELEGUNDU A D, CHANDRUPATLA T R. Optimization concepts and applications in engineering[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011: 1 - 432.
- [36] 王银年, 葛洪伟. 求解 TSP 问题的改进模拟退火遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(5): 44 - 47.(WANG Yinnian, GE Hongwei. Improved simulated annealing genetic algorithm for solving TSP problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(5): 44 - 47.(in Chinese))
- [37] 姚明海, 王娜, 赵连朋. 改进的模拟退火和遗传算法求解 TSP 问题[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(14): 60 - 65.(YAO Minghai, WANG Na, ZHAO Lianpeng. Improved simulated annealing algorithm and genetic algorithm for TSP[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(14): 60 - 65.(in Chinese))
- [38] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 1 - 560.(CHEN Zuyu. Stability analysis of soil slope—principle and method, program[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 1 - 560.(in Chinese))
- [39] 李连崇, 唐春安, 邢军, 等. 节理岩质边坡变形破坏的 RFPa 模拟分析[J]. 东北大学学报, 2006, 27(5): 559 - 562.(LI Lianchong, TANG Chun'an, XING Jun, et al. Numerical simulation and analysis of deformation and failure of jointed rock slopes by RFPa-slope[J]. Journal of Northeastern University, 2006, 27(5): 559 - 562.(in Chinese))
- [40] 郑文博, 庄晓莹, 李耀基, 等. 基于流形方法和图论算法的岩/土质边坡稳定性分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(11): 2 045 - 2 052.(ZHENG Wenbo, ZHUANG Xiaoying, LI Yaoji, et al. The use of graph theory in rock/soil slope stability analysis based on numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(11): 2 045 - 2 052.(in Chinese))
- [41] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998: 1 - 607.(ZHU Bofang. The finite element method theory and applications[M]. Beijing: China Water Power Press, 1998: 1 - 607.(in Chinese))