§3 正态总体方差的假设检验

- 单个总体的方差的检验
- 两个正态总体方差比的检验

一、单个总体的情况

1. 双边检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均属未知，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，要求检验假设（显著性水平为α）：

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$$

σ_0^2为已知常数。

基本思想：

由于S^2是σ^2的无偏估计，当H_0为真时，比值$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$一般来说应在1附近摆动，而不应过分大于1或过分小于1。

由于当H_0为真时，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量，

上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

此处的 k_1, k_2 值由下式确定：

$$P\{H_0\text{为真拒绝}H_0\}$$

$$= P_{\sigma_0^2}\{(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1) \cup (\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2)\} = \alpha$$

为计算方便起见，习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\} = \frac{\alpha}{2}, \text{或 } P_{\sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\} = \frac{\alpha}{2}$$

得临界点 $k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

于是得拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

上述检验法为 χ^2 检验法。

例1 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ (小时^2)的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$(小时^2)。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化（取 $\alpha = 0.02$）？

解：

本题需检验假设：

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5000,\quad H_1:\sigma^2\neq 5000$$

取 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为检验统计量，

则上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\quad 或\quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

而 $\alpha=0.02, n=26$，得 $\chi^2_{0.99}(25)=11.523, \chi^2_{0.01}(25)=44.313$

即 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le 11.523$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge 44.313$

由观察值 $s^2 = 9200$ 得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46 > 44.314$

所以拒绝 H_0， 认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。

2. 单边检验

以右边检验为例.

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均属未知,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，要求检验假设（显著性水平为α ）：

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2,\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

σ_0^2为已知常数。

基本思想:

因 H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 要小，当 H_1 为真时，S^2 的观察值 s^2 往往偏大.

因此拒绝域的形式为: $s^2 \geq k$

下面求 k.

$P\{$当 H_0 为真拒绝 $H_0\}$

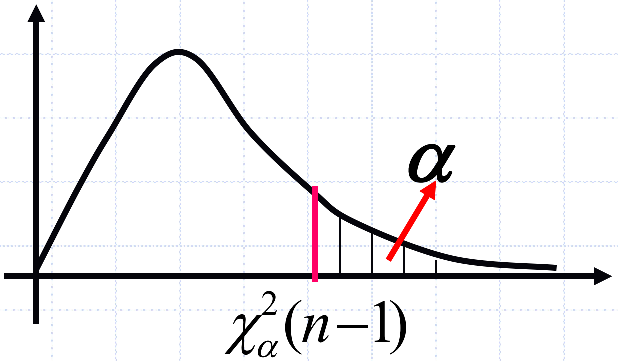
$$= P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2}\{S^2 \geq k\} = P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\}$$

$$\leq P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\} (\text{因 } \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2})$$

要控制 $P\{$当 H_0 为真拒绝 $H_0\} \leq \alpha$，只需令

$$P_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\} = \alpha$$

$$P_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\ge\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\}=\alpha$$



H_0为真时 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

得 $\dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^2}=\chi_\alpha^2(n-1)$

得临界点 $k=\dfrac{\chi_\alpha^2(n-1)\sigma_0^2}{n-1}$

得拒绝域 $s^2\ge\dfrac{\chi_\alpha^2(n-1)\sigma_0^2}{n-1}$

关于 σ^2 的检验 （χ^2 检验法）

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$ （μ 已知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n)$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	(μ 未知)	$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1$

二、两个总体的情况(*F*检验法)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，且设两样本独立。

它们的样本方差为 S_1^2，S_2^2，且设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均为未知. 检验假设(显著性水平为 α)

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

基本思想:

当 H_1 为真时, $E(S_1^2)=\sigma_1^2>\sigma_2^2=E(S_2^2)$ 观察值 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ 有偏大的趋势.

因此**拒绝域**的形式为: $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq k$

下面求 k.

$P\{$当H_0为真拒绝 $H_0\}$

$$=P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq k\}\leq P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\geq k\}\ (\text{因}\ \sigma_1^2/\sigma_2^2\leq 1)$$

要控制$P\{$当H_0为真拒绝$H_0\}\leq\alpha$,只需令

$$P_{\sigma_1^2\leq\sigma_2^2}\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\geq k\}=\alpha$$

$$P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\} = \alpha$$

又 $$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

得临界点 $k = F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$

得拒绝域 $$\frac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

上述检验法称为 ***F*检验法。**

关于 σ_1^2, σ_2^2 的另外两个检验问题的拒绝域在附表中给出。

关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	μ_1,μ_2均未知	$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

例2 研究机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子18 只，测得样本方差 $s_1^2=0.34(mm^2)$；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差 $s_2^2=0.29(mm^2)$。设两样本相互独立，且设由机器A, 机器B生产的管子的内径分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 这里 $\mu_i,\sigma_i^2(i=1,2)$ 均未知。作假设检验:(取 $\alpha=0.1$)

$$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

解： 此处

$$n_1=18, n_2=13, F_\alpha(18-1,13-1)=F_{0.1}(17,12)=2.08$$

选检验统计量 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq F_{0.1}(17,12)=2.08$

现在

$$s_1^2=0.34, s_2^2=0.29, \frac{s_1^2}{s_2^2}=1.17<2.08$$

故接受 H_0 .

练习

某机器加工某种零件，规定零件长度为100cm，标准差不超过2cm。每天定时检查机器的运行情况。某日抽取10个零件，测得平均长度 $\bar{x}=101$cm，样本标准差 $s=2cm$ ，问该日机器工作是否正常 $(\alpha=0.05)$？

解： 设加工零件长度为X, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均未知。

(1)检验假设 $H_0: \mu=\mu_0=100$; $H_1: \mu\neq 100$.

这是t-检验，当 H_0 成立时，统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

对 $\overline{x}=101,\ n=10,\ s^2=2^2,$

计算得 $t=\dfrac{101-100}{2}\sqrt{10}=1.5811$.

对 $\alpha = 0.05$，由 *t*-分布表查得 $t_{0.025}(9) = 2.2622.$

因为 $|t| = 1.5811 < 2.2622$，接受假设 H_0，即认为 $\mu = 100$ 。

(2)检验假设 $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 2^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 2^2$

当 H_0 成立时，统计量

$$\chi_n^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域为 $\chi_n^2 \ge \chi_{0.05}^2(n-1)$

由 $(\alpha = 0.05)$，查得 $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$，

又计算得 $\chi_n^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9 \times 2^2}{2^2} = 9$

因为 $\chi_n^2 = 9 < 16.919$，

故接受假设 H_0，即认为 $\sigma^2 < 2^2$。

综合（1），（2）可以认为该日机器工作状态正常。

§4 置信区间与假设检验之间的关系

1、 双侧置信区间与双边检验之间的关系

已知

$(\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n))$是参数$\theta$的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间 (4.1)

显著性水平为α的双边检验

$$H_0:\theta=\theta_0 \qquad H_1:\theta\neq\theta_0 \qquad (4.2)$$

二者关系：

双侧置信区间(4.1) $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ 双边假设检验(4.2)的接受域

$$\underline{\theta}(x_1,\cdots,x_n)<\theta_0<\overline{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$$

说明：

(1) 要检验假设(4.2)时，可先求出 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，然后考察 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是否包含 θ_0：

$$\begin{cases} 若\theta_0 \in (\underline{\theta},\overline{\theta}), & 则接受 H_0; \\ 若\theta_0 \notin (\underline{\theta},\overline{\theta}), & 则拒绝 H_0. \end{cases}$$

(2) 要求出参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间(4.1)，可先求出显著性水平为 α 的假设检验问题(4.2)的接受域：$\underline{\theta}(x_1,\cdots,x_n)<\theta_0<\overline{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

那么 $(\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n))$ 就是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

正态总体 μ 的双边假设检验与置信区间对照

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (σ^2 已知)	$\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert\le z_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (σ^2 已知)	$(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$\left\|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\|\leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （σ^2未知）	$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}})$

正态总体σ^2 的双边假设检验与置信区间对照

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

2、单侧置信区间与单边检验问题

单侧置信区间 $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ 左边假设检验

$(-\infty, \overline{\theta}(X_1, \cdots, X_n))$

$H_0: \theta \geq \theta_0, H_1: \theta < \theta_0$

的接受域 $-\infty < \theta_0 \leq \overline{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$

单侧置信区间 $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ 右边假设检验

$(\underline{\theta}(X_1, \cdots, X_n), +\infty)$

$H_0: \theta \leq \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$

的接受域 $\underline{\theta}(x_1, \cdots, x_n) \leq \theta_0 < +\infty$

例 3　新设计的某种化学天平，其测量的误差服从正态分布，现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg，即要求 $3\sigma \le 0.1$。现拿它与标准天平相比，得10个误差数据，其样本方差 s^2 =0.0009. 试问在 $\alpha = 0.05$的水平上能否认为满足设计要求？

解一：　$H_0: \sigma \le 1/30 = \sigma_0$；　$H_1: \sigma > 1/30$

μ未知, 故选检验统计量　$\chi^2 = \dfrac{9S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$

拒绝域：$\chi^2 = \dfrac{9s^2}{1/900} > \chi^2_{0.05}(9) = 16.919$

现 $\chi^2 = \dfrac{9s^2}{1/900} = 7.29 < 16.919$, 落在拒绝域外

故接受原假设, 即认为满足设计要求.

解二: σ^2的单侧置信区间为

$$\left(0,\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) = \left(0,\ \frac{0.0081}{3.325}\right) = (0,\ 0.0024)$$

而 $\sigma_0^2 = \dfrac{1}{900} = 0.0011 < 0.0024$, 则 H_0 成立,

从而接受原假设, 即认为满足设计要求.