§2 边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

边缘分布的定义：

如果已知二维随机变量$(X, \ Y)$的分布，

称 X（或者 Y）的分布为 X（或者 Y）

关于二维随机变量 $(X, \ Y)$的边缘分布.

边缘分布也称为边沿分布或边际分布.

本节问题：已知联合分布，如何求边缘分布？

一、 联合分布函数 $\longrightarrow$ 边缘分布函数

设二维随机变量 $(X, \ Y)$ 的分布函数为 $F(x, \ y)$,

则随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\}$$
$$= P\{X \le x, Y < +\infty\}$$
$$= F(x, +\infty)$$

同理，随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$
$$= P\{X < +\infty, Y \le y\}$$
$$= F(+\infty, y)$$

例1 设二维随机变量 $(X, \ Y)$的联合分布函数为

$$F(x, \ y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty)$$

试求：(1) 常数 A、B、C; (2) X 及 Y 的边缘分布函数.

解： (1) 由分布函数的性质，得

$$1 = F(+\infty, \ +\infty) = A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 = F(x, \ -\infty) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 = F(-\infty, y) = A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

由以上三式可得, $A=\dfrac{1}{\pi^2}, B=\dfrac{\pi}{2}, C=\dfrac{\pi}{2}$

则 $$F(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty)$$

(2) X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

同理, Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\quad y\in(-\infty,+\infty)$$

二、联合分布律 $\longrightarrow$ 边缘分布律

随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i,\ Y = y_j\},\quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots)$$

现求随机变量 X 的分布律为:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, \bigcup_j (Y = y_j)\}$$

$$= P\{\bigcup_j (X = x_i, Y = y_j)\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$= \sum_j p_{ij} \qquad i = 1,2,\cdots$$

同理,随机变量 Y 的分布律为:

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad j = 1,2,\cdots$$

X以及Y的边缘分布律也可以由下表表示

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	

边缘分布律名称的由来：写在联合分布律表格的边上。

例2 掷一枚骰子，直到出现小于5点为止。

X 表示最后一次掷出的点数，Y 为掷骰子的次数。

求：随机变量（X,Y）的联合分布律及 X、Y 的边缘分布律。

解:

X 的可能取值为1，2，3，4，

Y 的可能取值为1，2，3，· · ·

(X,Y)的联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = i, Y = j\} = \frac{1}{6}\cdot(\frac{2}{6})^{j-1},$$

$$i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,\cdots$$

例2（续）

$$p_{ij}=(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6},i=1,\cdots,4;j=1,2,\cdots$$

X 的边缘分布律为

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$i=1,2,3,4.$$

Y 的边缘分布律为

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{4}P_{ij}=\sum_{i=1}^{4}(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}$$

$$j=1,2,\cdots$$

三、联合密度函数 →边缘密度函数

二维连续型随机变量 $(X, \ Y)$的概率密度函数为$f(x,y)$,

求随机变量 X的边缘密度函数： $f_X(x)$

由 $F_X(x)=P\{X\le x\} = F(x,+\infty)$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right]du$$

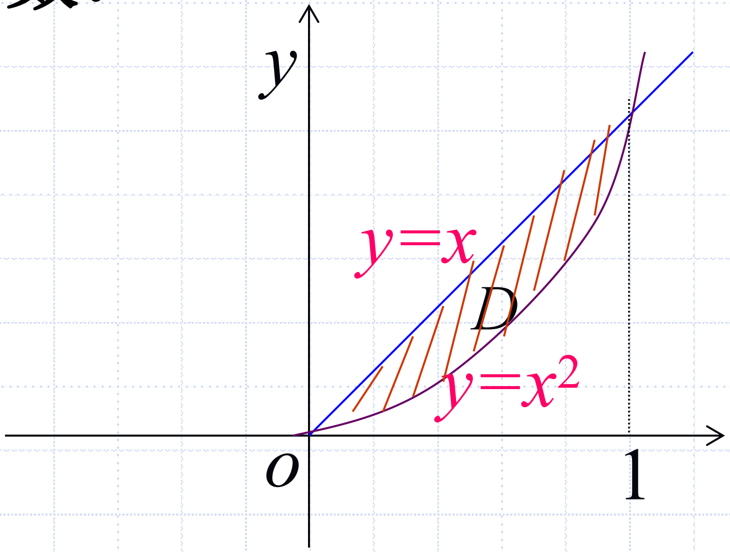
得 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \ y)dy$$

同理得 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \ y)dx$$

注意：积分上下限的确定.

例 3

区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围，随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布.试求随机变量 (X, Y) 的联合密度函数及 X、Y 各自的边缘密度函数.



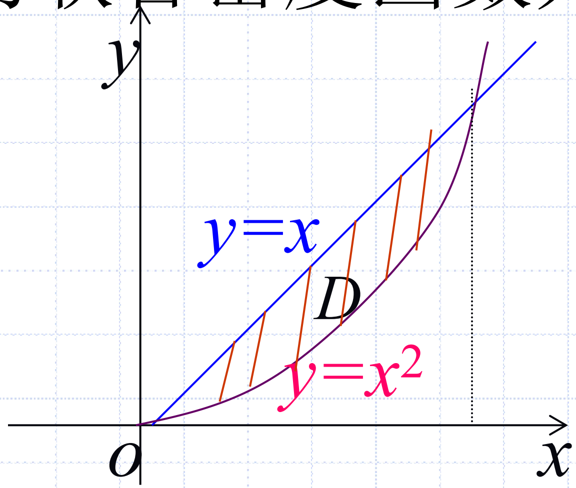
例 3（续）

解: (1)区域 D 的面积为

$$A=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以，二维随机变量（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$



例 3（续）

(2) 随机变量 X的边缘密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

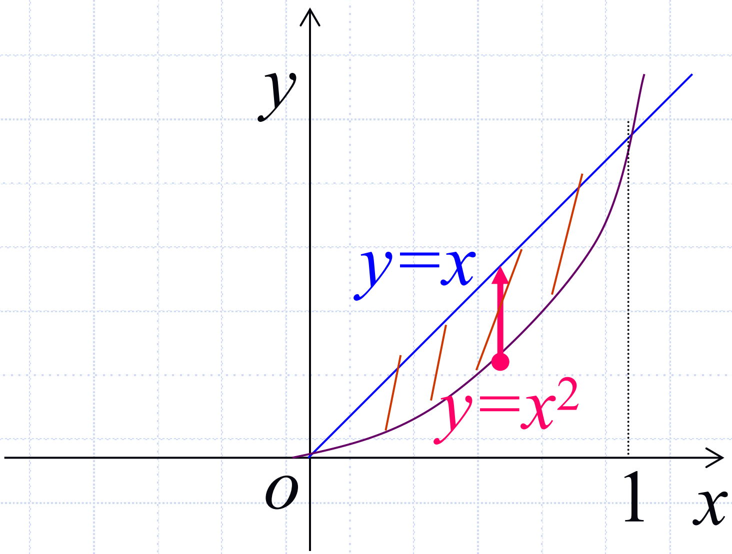
当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2)$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



例 3（续）

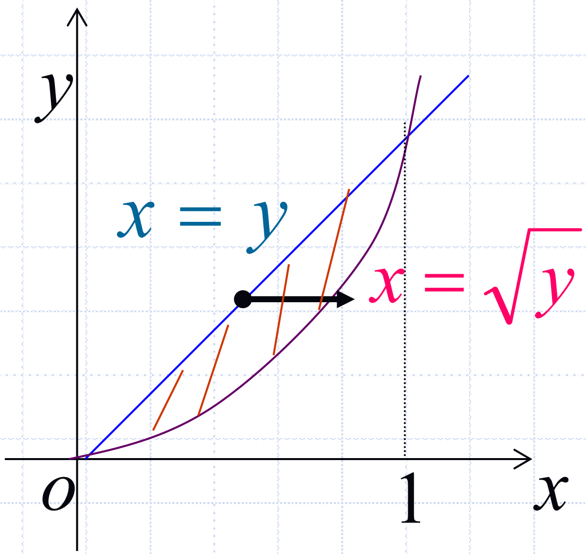
同理，随机变量 Y的边缘密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)$$



所以，

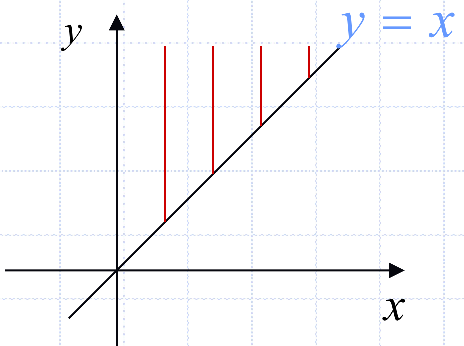
$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 4 设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1) 常数c；(2) X及Y的边缘密度函数。

解：



(1) 由密度函数的性质得，到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}cxe^{-y}dx$$

$$=\frac{c}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=\frac{c}{2}\times 2=c.\qquad \text{所以}, c=1$$

例 4（续）

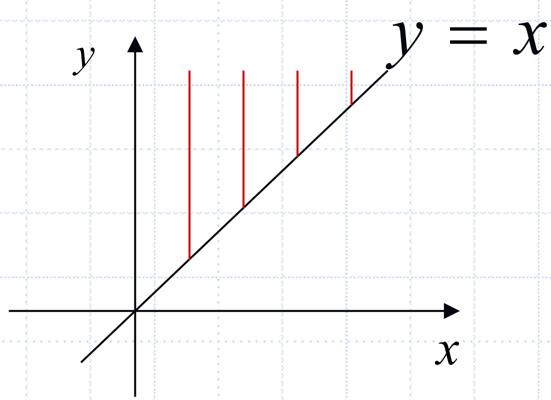
$$f(x, y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 当$x>0$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^{+\infty} xe^{-y}dy = xe^{-y}$$

所以, X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-y} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$



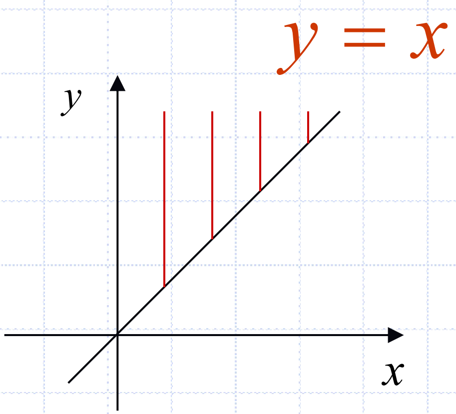
例 4（续）

$$f(x,\ y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^y xe^{-y}dx=\dfrac{y^2}{2}e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$



例 5 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求$X$及$Y$的边缘密度函数.

结 论 1:

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布.

即若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$， **则有，**

$$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2).$$

结 论 2:

上述的两个边缘分布中 的参数与二维正态分布中的参数 ρ 无关.

结 论 3:

结论 2 表明：如果

$$(X_1,Y_1)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\ \ \sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_1\right),$$
$$(X_2,Y_2)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\ \ \sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_2\right).$$

(其中$\rho_1\neq\rho_2$)

则:(X_1,Y_1)与(X_2,Y_2)的分布不相同,

但是X_1与X_2的分布相同, Y_1与Y_2的分布相同.

说明：联合分布唯一确定边缘分布，反之不然.

即：不能由边缘分布确定联合分布。

小结：

1 二维随机变量的边缘分布与联合分布的关系：

联合分布唯一确定边缘分布，但不能由边缘分布确定联合分布。

2 二维正态分布的性质。

难点：求边缘分布时如何确定积分上、下限及边缘密度不为零的范围。

确定积分上、下限时，用到了二重积分的思想。

§3 条件分布

- 条件分布律
- 条件概率密度
- 条件分布函数

一、离散型随机变量的条件分布律

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

(X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为:

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

定义：设(X,Y)是二维离散型随机变量，

(1)对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律。

(2)同样对于固定的 i, 若$P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

条件分布律具有分布律的以下特性:

1^0 $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$;

2^0 $$\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}}=1.$$

即条件分布律是分布律。

例1 一射手进行射击，击中目标的概率为 p，射击到击中目标两次为止。设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的条件分布律。

解： X的取值是$1,2,3,\cdots;$

Y的取值是$2,3,4,\cdots;$

X,Y的联合分布律为 $(令q=1-p)$

$$P\{X=m,Y=n\}=q^{m-1}\cdot p\cdot q^{n-m-1}\cdot p=q^{n-2}\cdot p^2$$

$$n=2,3,\cdots,m=1,2,\cdots n-1$$

例1（续）

X的边缘分布律为

$$P\{X=m\}=\sum_{n}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}$$

$$=p^2\cdot\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},\quad m=1,2,\cdots$$

Y的边缘分布律为

$$P\{Y=n\}=\sum_{m}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

$$P\{X=m,Y=n\}=q^{n-2}p^2,m=1,2,\cdots n-1,n=2,3,\cdots$$

在 $Y=n$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

当 $n=2,3,\ldots$ 时，

$$P\{X=m \mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{q^{n-2}p^2}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1}, \quad m=1,2,\cdots,n-1;$$

$$P\{Y=n\}=(n-1)p^2q^{n-2}, n=2,3,\cdots$$

$$P\{X=m,Y=n\}=q^{n-2}p^2, m=1,2,\cdots n-1, n=2,3,\cdots$$

在 $X=m$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

当 $m=1,2,3,\ldots$ 时，

$$P\{Y=n \mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}, \qquad n=m+1,m+2,\cdots$$

$$P\{X=m\}=pq^{m-1}, m=1,2,\cdots$$

$$P\{X=m,Y=n\}=q^{n-2}p^2, m=1,2,\cdots n-1, n=2,3,\cdots$$

二、连续型随机变量的条件概率密度

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，由于 $P\{Y=y\}=0$, 所以 $P\{X\le x\mid Y=y\}$ 无意义. 因此不能直接用条件概率公式引入条件分布函数的概念。

定义：给定 y, $f_Y(y)>0$, 设对于任意固定的正数ε>0，$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 若对于任意实数 x,

$$P\{X\le x\mid y<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)dy]dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)dy}$$

$$(\text{当}\varepsilon\text{很小时}) \quad \approx \frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

与一维随机变量概率密度的定义式比较,得出以下定义

$$F_{X|Y}(x\,|\,y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}du,$$

称为在条件$Y=y$下X的条件分布函数.

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称为随机变量X 在$Y=y$的条件下的**条件概率密度.**

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\quad (\text{对固定的}x, f_X(x)>0)$$

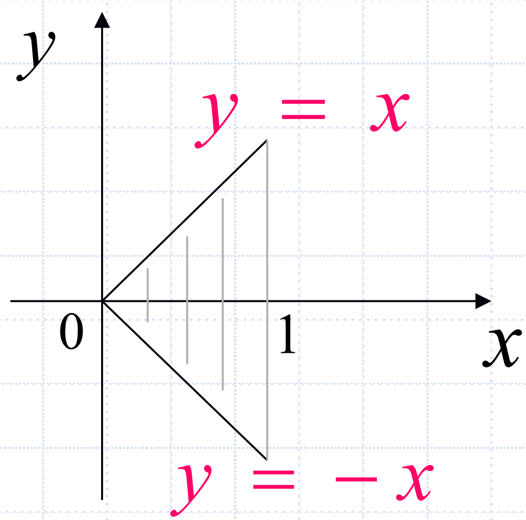
称为随机变量Y 在$X=x$的条件下的**条件概率密度.**

例 2 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求：(1) $f_X(x)$, $f_Y(y)$; (2) $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) $P\{X>\frac{1}{2}\mid Y>0\}$.



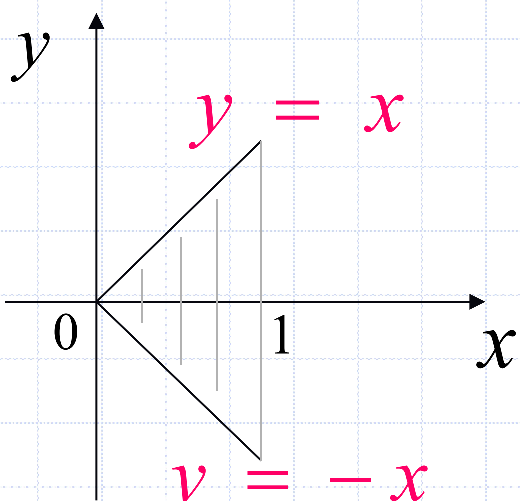
解:

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1dy = 2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 2（续）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{1} 1dx = 1-y, & 0 \le y < 1, \\ \int_{-y}^{1} 1dx = 1+y, & -1 \le y < 0, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1 \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 当 $|y|<1$, $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1 \\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1, \\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

例 2（续）

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, 其它.\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

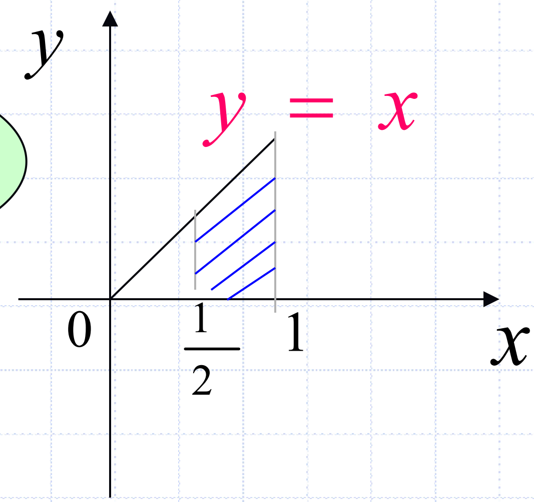
当$0<x<1$,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & -x<y<x,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

$$(3)\quad P\{X>\frac{1}{2}|Y>0\}=\frac{P\{X>\frac{1}{2},Y>0\}}{P\{Y>0\}}$$

$$=\frac{(1+\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\div 2}{\frac{1}{2}\times 1\times 1}=\frac{3}{4}$$

梯形的面积



小结：

1 条件分布律；

2 条件概率密度。

难点： 如何确定条件密度不为零的范围。