第三章 多维随机变量及其分布

第三章 多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量

- 二维随机变量
- 联合分布函数
- 联合分布律
- 联合概率密度

一、二维随机变量

1）定义：

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X, Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量。

注 意 ：

(1) X, Y是定义在同一样本空间 S上.

(2) 需将(X, Y)看作一个整体来研究。

(3) 在几何上，二维随机变量$(X,\ Y)$可看作平面上的随机点.

2）二维随机变量的例子

例1 考察某地区成年男子的身体状况.

例2 考察某地区的气候状况 .

二、联合分布函数

1）定 义

设(X, Y)是一个二维随机变量，则对于任意一对实数$(x, y)(x, y \in R)$，二元函数

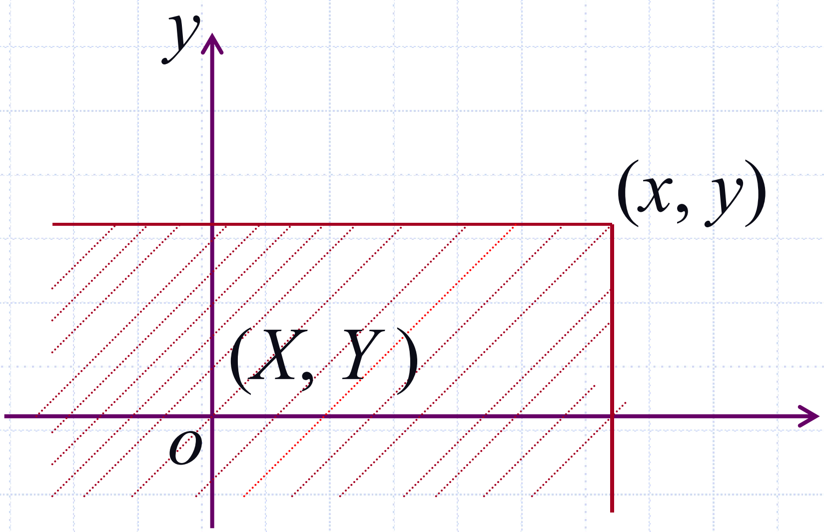
$$F(x, y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\}$$

$$\underline{\underline{\text{记成}}} \; P\{X \le x, Y \le y\}$$

称为二维随机变量(X, Y)的分布函数，或随机变量X和Y的联合分布函数.

2）二元分布函数的几何意义

$F(x, y)$表示平面上的随机点(X, Y)落在以(x, y)为右上顶点的无穷矩形域中的概率.

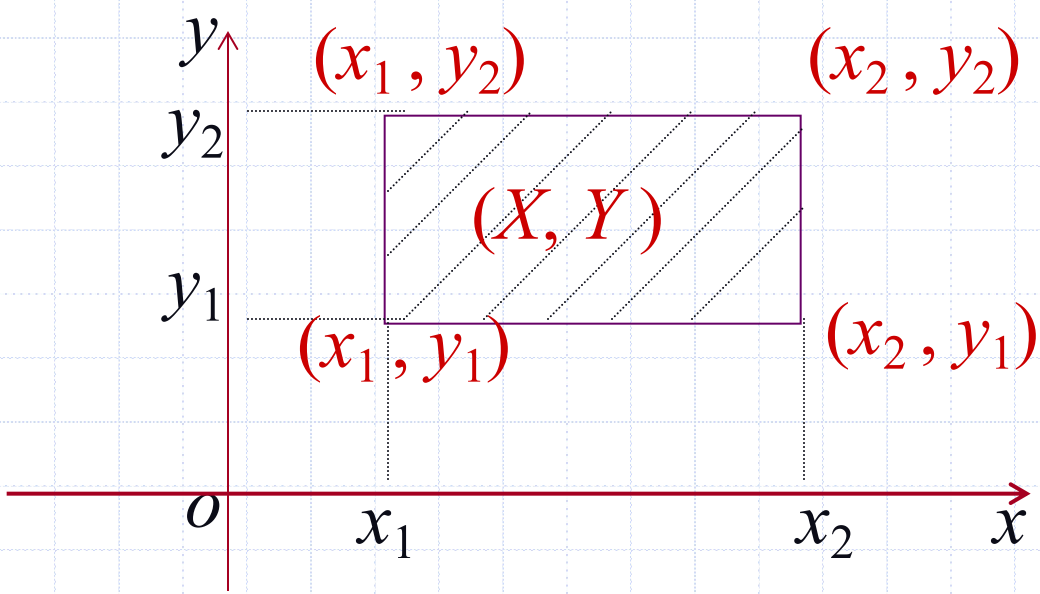


3）一个重要的公式

设：$x_1 < x_2$， $y_1 < y_2$， 则

$$P\{x_1 < X \le x_2, \quad y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, \quad y_2) - F(x_2, \quad y_1) - F(x_1, \quad y_2) + F(x_1, \quad y_1)$$



4）分布函数具有以下的基本性质：

（1）$F(x,y)$是变量 x,y 的不减函数，即

对于任意固定的 y，当 $x_1 < x_2$时，$F(x_1,y) \le F(x_2,y)$;

对于任意固定的 x，当 $y_1 < y_2$时，$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$;

(2) $0 \le F(x,y) \le 1$,　且

对于任意固定的 y，　$F(-\infty,y) = 0$;

对于任意固定的 x，　$F(x,-\infty) = 0$;

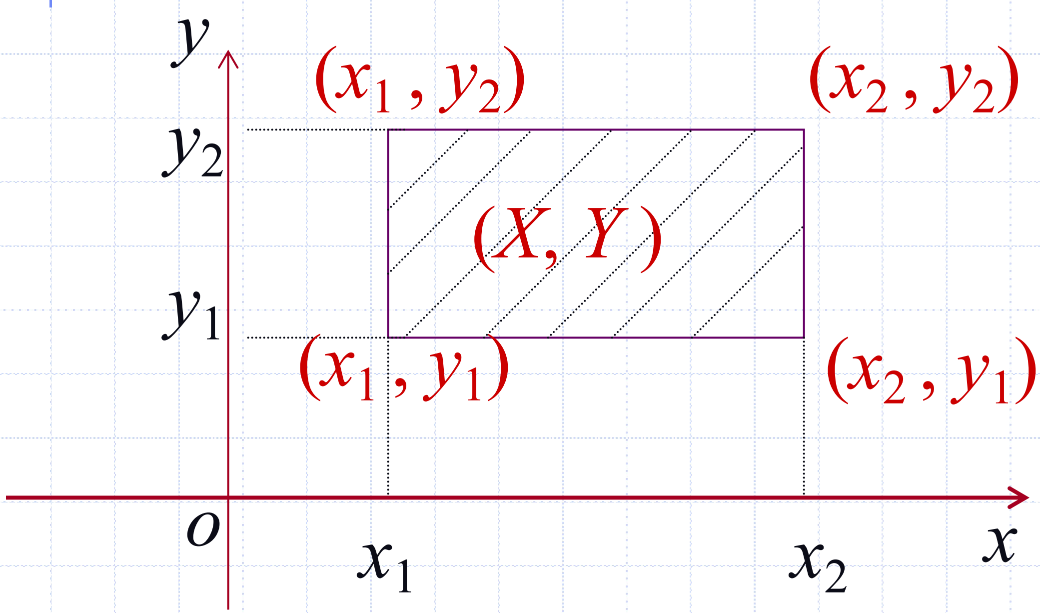
$F(-\infty,-\infty) = 0$;　$F(+\infty,+\infty) = 1$.

重要!

（3）　$F(x,y)=F(x+0,\ y)$，　$F(x,y)=F(x,\ y+0)$，

即　$F(x,y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

(4) $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq 0.$



5）n 维随机变量

设 E 是一个随机试验，S是其样本空间，

$$X_i = X_i(e) \quad (e \in S) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是该样本空间上的 n个随机变量.

则称

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)) \quad (e \in S)$$

为样本空间 S上的n维随机变量.

6）n 维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任意一n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数．

三、二维离散型随机变量

1）定义：

若二维随机变量 $(X, \ Y)$的取值是有限个或可列 无穷个数对，则称 $(X, \ Y)$为二维离散型随机变量 .

X 的取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_i, \quad \cdots$$

Y 的取值为

$$y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_j, \quad \cdots$$

则称

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, \ j = 1, \quad 2, \quad \cdots)$$

为二维离散型随机变量 $(X, \ Y)$的(联合)分布律.

2）二维离散型随机变量的分布律

$(X, \quad Y)$的分布律也可以由下表表示

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

3)二维离散型随机变量分布律的性质

性质 1：

对任意的$(i, \; j)$，$(i, \; j = 1, \; 2, \; \cdots)$

有 $0 \le p_{ij} = P\{X = x_i, \; Y = y_j\} \le 1$

性质 2： $$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

例 3

将一枚均匀的硬币掷 3 次，令

X：3次抛掷中正面出现的次数；

Y：3次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值.

试求 (X, Y) 的联合分布律.

解:

X 的可能取值为 0，1，2，3；

Y 的可能取值为 1，3 .

$$P\{X=0,\ Y=1\}=0;\quad P\{X=0,\ Y=3\}=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\quad P\{X=1,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\quad P\{X=2,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=3,\ Y=1\}=0;\quad P\{X=3,\ Y=3\}=\frac{1}{8}.$$

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

四、二维连续型随机变量

1）二维随机变量(X,Y)的概率密度

定义：对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负函数$f(x,y)$，使得对于任意的x，y有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv,$$

则称(X,Y)是连续型的二维随机变量。

函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称为X和Y的联合概率密度。

2) 联合概率密度的性质：

$1^0 \quad f(x,y) \geq 0;$

介于空间曲面$z=f(x,y)$和xoy平面的空间区域的体积为1.

$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1;$

3^0 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在G 内的概率为：

$$\boxed{P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.}$$

这个公式非常重要！

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy.$$

$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积.

概率 $\rightarrow$ 二重积分 $\rightarrow$ 体积

3) 关于联合概率密度的常见计算问题

1^0 根据联合概率密度的性质求$f(x,y)$中的常数；

2^0 由联合概率密度$f(x,y)$求联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv\,;$$

3^0 求(X,Y)落在某区域的概率。

做法是：转化为密度函数的二重积分.

难点是：积分上下限的确定.

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy.$$

例 4　设二维随机变量$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求$(X,\ Y)$的联合分布函数;

(3) 求$P\{0<X<1,\ -3<Y<2\}$.

(4) $P\{X+Y\geq 1\}$.

$$f(x,\ y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解：

(1) 由密度函数的性质，得

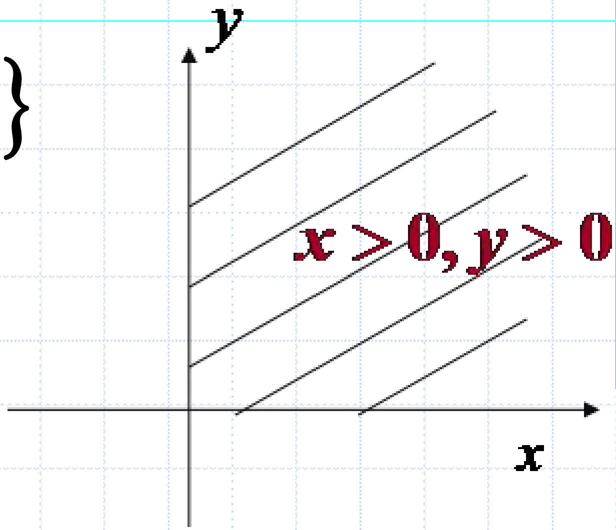
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy$$

$$=c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy=c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}dy=\frac{c}{12}$$

所以，$c=12.$

(2) $F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dvdu$$



当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\ y)=0$；

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dvdu$$

$$=12\int_{0}^{x} e^{-3u}du\cdot\int_{0}^{y} e^{-4v}\,dv=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x,\ y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) $P\{0<X<1,\ -3<Y<2\}$

$$=\iint\limits_{0<x<1,\ -3<y<2} f(x,\ y)dxdy$$

$$=12\int_0^1 dx\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dy$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}dy=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

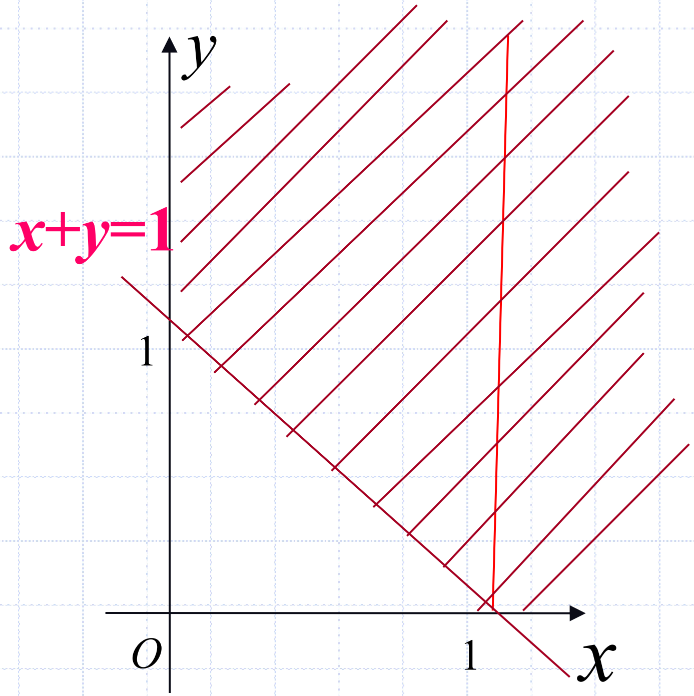
(4) $P\left\{ X+Y \geq 1 \right\}$

$$= \iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,\ y)dxdy$$

$$= 12\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\infty} e^{-(3x+4y)}dy$$

$$+ 12\int_1^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(3x+4y)}dy$$

$$= 4e^{-3} - 3e^{-4}$$

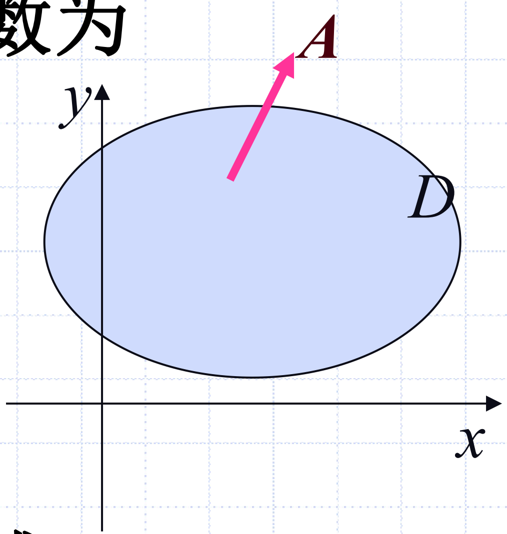


4）常见二维分布

(1）二维均匀分布

设 D 是平面上的有界区域， 其面积为 A.

如果二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为



$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x, y)\in D\\ 0 & (x, y)\notin D\end{cases}$$

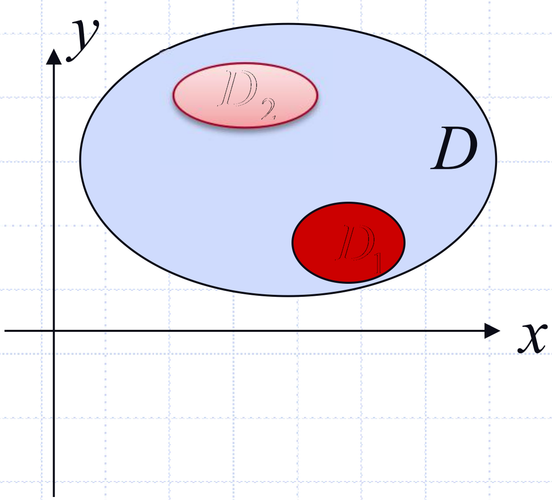
则称二维随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

二维均匀分布几何意义

如果二维随机变量$(X,\ Y)$服从区域D上的均匀分布，则：

1) 我们可以认为随机点 $(X,\ Y)$只落在区域 D内；

2) 落在 D内任一个子区域 D_1内的概率与D_1的面积成正比，而与 D_1的形状以及 D_1在D中的位置无关。



二维随机点(X,Y)落在区域D内任意面积相等的子区域内的概率相等。

(2）二维正态分布

设二维随机变量 $(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量$(X,\ Y)$服从参数为$(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$的正态分布，记作

$$(X,\ Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2\ \rho)$$

$$-\infty<\mu_i<+\infty\ (i=1,\ 2),\ \sigma_i>0\ (i=1,\ 2),\ -1<\rho<1.$$

小结：

1 联合分布函数的定义及性质。

2 二维离散型随机变量的联合分布律的定义及性质。

3 二维连续型随机变量的联合概率密度的定义及性质，特别是

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy.$$

要求：熟练掌握二重积分的计算问题.

4 二维均匀分布和二维正态分布。

作业：

P83： 2，3